NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06246528 5

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

*QCB

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMUS XIII.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNOS MDCCXCV & MDCCXCVI.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM. MDCCCII.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

NOVA ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMUS XIII.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE AD ANNOS MDCCXCV & MDCCXCVI.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM. MDCCCII.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

TABLE DE MATIER

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
ANNÉES MDCCXCV et MDCCXCVI.

Page

I. Evènemens mémorables:

I. Visite de LEURS ALTESSES IMPÉRIALES MESDAMES LES GRANDES-DUCHESSES 3

II. Visite de SA MAJESTÉ le Roy de Suède 4

II. Changemens arrivés dans l'Académie:

I. Membres décédés 5
II. Nouvelles réceptions 12
III. Promotions 15

III. Gratifications et récompenſes:

I. Poſseſsions en Tauride accordées à Mr. Pallas 16
II. Penſion viagère à Mr. Krafft . . . . ibid.
III. Penſion académique à Mr. Schangnine . . . . ibid.
IV. Montre d'or garnie de brillans à Mr. Roumovski 17

IV. Préſens faits à l'Académie:

I Pour la Bibliothèque 17
II Pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle 22
III Pour le Cabinet de curioſités 24
IV. Pour le Médailler et le jardin botanique 25

V. Mémoires et autres ouvrages manuſcrits préſentés à l'Académie 25

* VI.

Page

VI. Obſervations, expériences et notices intéreſsantes faites et communiquées à l'Académie:

I. Sur une terre inconnue dans le Spath peſant 28
II. Sur deux Manuſcrits de la Bibliothèque de Zaluski 29
III. Sur la dépuration de l'éther ſulfurique 30
IV. Sur la décomposition du tartre par le muriate de chaux . . . ibid.
V. Sur la viteſse des vibrations du ſon . . . . ibid.
VI Sur les oſsemens d'un animal inconnu trouvés près d'Azof . . . 32

VII. Rapports préſentés et lus dans les Conférences académiques:

I. Sur un télégraphe nouveau 33
II. Sur un projet de diriger les balons aëroſtatiques 34
III. Sur le projet d'une écluſe au pas de Trollhätta et d'un pont ſur la riviere Götha-Elf 35
IV. Sur une machine pour mâter les vaiſseaux 36
V. Sur la triſection d'angle par Mr. Pizzati 37
VI. Sur un mouvement prétendu perpétuel 38
VII. Sur un enduit pour la vaiſselle de cuisine 40
VIII. Sur la triſection de l'angle, par Mr. le Lieutenant Tychkévitch . 41
IX. Premier rapport de Mr. Pallas 42

VIII. Leçons publiques 45

IX. Ouvrages publiés par l'Académie 46

X. Prix adjugés 47

XI. Extraits des mémoires contenus dans ce volume:

I. Claſse de Mathématique et de Physico-Mathématique 53
II. Claſse de Physique 65
III. Claſse d'Aſtronomie et de Météorologie 73

NOVA

NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARUM IMPERIALIS
Tomus XIII.

MATHEMATICA ET PHYSICO-MATHEMATICA.

Pag.

Leonh. Euleri. Exemplum quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamſi nulla via pateat variabiles a ſe invicem ſeparandi . . 3

——. De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum ſint primi nec ne? 14

——. Reſolutio formulae Diophanteae $ab(maa+nbb) = cd(mcc+ndd)$ per numeros rationales . 45

——. Solutio problematis mechanici 64

Nicolai Fuſs. De motu baculi ſuper plano inclinato, cui inſiſtit, deſcendentis 70

——. Examen théorétique des revêtemens à dos incliné et des revêtemens à aſsiſes inclinées, propoſés par quelques auteurs de Fortification 80

Joh. Trembley. Recherches ſur les équations linéaires aux différences partielles du troiſième degré 101

Pag.

Sim. Gourieſ. Eſsai de démontrer rigoureuſement un théorème fondamental des équations de condition de la différentielle des fonctions à pluſieurs variables et du calcul des variations 154

Nicolai Fuſs. De Polygonis ſymmetrice irregularibus circulo ſimul inſcriptis et circumſcriptis . . . 166

F. T. Schubert. De evolutione ſectionum cylindri . 190

C. F. Kausler. Solution de quelques problèmes remarquables de l'Analyſe indéterminée . . . 205

—— Nova demonſtratio theorematis, nec ſummam, nec differentiam duorum biquadratorum biquadratum eſse poſse 237

—— Nova demonſtratio theorematis, nec ſummam, nec differentiam duorum cuborum cubum eſſe poſse 245

PHY-

PHYSICA.

Pag.

T. Lowitz. Methodus nova potaſsinum carbonicum plene ſaturatum obtinendi, adjectis novis obſervationibus potaſsini acido carbonico imperfecte ſatiati naturam ſpectantibus 257

B. F. J. Hermann. Déſcription de la celèbre mine de Zméof, aux monts d'Altaï, en Sibérie . . . 275

J. T. Kölreuter. Mirabil. Jalaparum hybridarum ulterius continuata deſcriptio 305

Joh. Lepechin. Cheiranthus Tauricus 336

B. F. J. Hermann. Deſcription d'une nouvelle mine de cuivre nommée Achirite 339

Sevaſtianof. Déſcription d'une nouvelle eſpèce de Canard et d'une variété de l'huitrier, qui ſe trouvent dans le Cabinet d'Hiſtoire naturelle de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences . 346

B. F. Hermann. Remarques ſur les différentes méthodes de rendre le ſer malléable 352

Sevaſtianof. Déſcription de l'Acarauna longiroſtris, nouveau genre de poiſson, appartenant à l'ordre des torachiques, et qui ſe trouve dans le Muſée de notre Académie 357

N. Ozeretskovski. De oſsibus ligno incluſis 367

Ejus-

Pag.

Ejusdem. De ſpeciebus ſyſtematicum genus Trichechi conſtituentibus 371

Baſil. Severguine. Diſtribution méthodique des pierres de roche agrégées 376

—— Notice ſur une nouvelle variété de Spath de plomb blanc 392

—— Notice ſur l'oxide de fer en forme d'aiguilles, qui ſe trouve ſur les améthyſtes de l'isle de Kija en Onega 395

ASTRO-

ASTRONOMICA ET METEOROLOGICA.

Pag.

Maur. Henry. Obſervations de Venus, faites à l'obſervatoire de l'Académie IMPÉRIALE de St. Pétersbourg, vers le tems de la plus grande digreſsion occidentale de cette planète, qui a eu lieu en Mai 1798 399

Steph. Rumovski. Meditatio de figura telluris exactius cognoſcenda 407

F. T. Schubert. Supplementum ad theoriam lunae Eulerianam 418

Maur. Henry. Paſsage de Mercure ſur le ſoleil du 7 Mai 1799 463

W. L. Krafft. Eſsai ſur la méthode de trouver la latitude ſur mer par les hauteurs ſimultanées de deux aſtres 477

M. Henry. Sur l'occultation de ε des gemeaux du 8 Août 1798 494

W. L. Krafft. Supplément au mémoire ſur la reduction des diſtances lunaires 517

F. S. Schubert. Sur les paſsages de Mercure ſur le ſoleil, qui auront lieu dans le dix-neuvième ſiècle. Premiere partie 529

P. Ino-

Pag

P. Inochodzof. De relativa nonnullorum locorum elevatione, in quibus obſervationes barometricae ac thermometricae ſunt inſtitutae 555

J. A. Euler. Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1795 565

—— Extrait des obſervations météorologiques faites à Moſcou en 1795 par Mr Stritter . . 583

—— Extrait des obſervations météorologiques faites à St. Pétersbourg en 1796 593

—— Extrait des obſervations météorologiques faites à Moſcou en 1796 par Mr. Stritter . . 609

HIS-

Page	ligne	au lieu de	liſez
Page 351	ligne 2,	au lieu de dailleur	liſez d'ailleurs
-	5	eſt	ſoit
357	19	reſplendiſsants	reſplendiſsantes
358	2	des	de
-	ibidem	plusieures	pluſieurs
-	8	parmis	parmi
-	9	parmis	parmi
-	11	moſtruosités	monſtruosités
-	18	a	à
-	19	exterieures	extérieurs
-	ibidem	variées	variés
-	-	elegantes	élégans
-	21	monſtrueuſes	monſtrueuſe
-	24	genre	genres
-	26	les	le
-	ibidem	desquelles	desquels
359	1	jé	je
-	6	c'eſt trouve	s'eſt trouvé
-	7	de Bresil	du Bresil
-	21	pour	par
-	24	obtu	obtus
361	21	qu'elle	qu'il
362	9	toute	tout
-	12	unies	unit
-	14	extremitées	extrémités
-	18	extrémitées	extrémités
-	23	deſtinée	déſtiné
-	26	J'ai vais	Je vais
-	ibidem	qni	qui
-	27	determinées	déterminé
363	20	retreciſes	retrécies
-	24	jointe	joints
-	ibidem	a	à
364	1	a faire	à faire
-	4	exterieure	extérieur
-	6	synonime	synonyme
-	14	garnis	garni
-	15	des	d'
-	ibidem	ſeparées	ſéparés
-	16	unies	unis

Page	ligne	au lieu de	liſez
Page 365	ligne 1	au lieu de la qu'elle	liſez laquelle
-	- 6	- attentinement	- attentivement
-	- 7	- établit	- établi
-	- 8	- extremmement	- extrèmement
-	- 10	- natnraliſte	-- naturaliſte
-	- 15	- paraſiticus	- paraſiticus
-	- 16	- deſsus mettioné	- ci-deſsus mentionné
- 413	- 15	- Bougeurus	- Bouguerus
- 524	- 24	- ôtet	- ôter
- 573	- 16	- température	- températures
- 581	- 2	- conſidérablemens	- conſidérablement
-	- 4	- entieremens	- entierement
-	- 13	- Pendans	- Pendant
-	- 25	- pendans	- - pendant
-	- 27	- charir	- charier

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES
SCIENCES.

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE
DES SCIENCES
ANNÉES MDCCXCV ET MDCCXCVI.

I.
Evènemens mémorables.

1. Viſite de LEURS ALTESSES IMPÉRIALES Meſdames les Grandes-Ducheſses.

La période de deux ans, dont nous nous propoſons de rendre compte dans ce volume, fournit deux évènemens auſſi mémorables que flatteurs pour l'Académie. Le premier, qui arriva le 26 Août 1795, fut la viſite dont LEURS ALTESSES IMPÉRIALES, Meſdames les Grandes-Ducheſses ALEXANDRA PAVLOVNA, HELENA PAVLOVNA, MARIA PAVLOVNA & EKATHERINA PAVLOVNA, accompagnées de S. E. Madame la Comteſſe de *Lieven*, Dame d'honneur de S. M. I. et de quelques autres dames de Leur ſuite, honorèrent le muſée académique.

 Mr.

Mr. de Bakounin, Gentilhomme de la chambre de S. M. I. et directeur en fonction de l'Académie, et pluſieurs Académiciens s'empreſsèrent à montrer et à expliquer à LEURS ALTESSES IMPÉRIALES tout ce qui dans cette riche collection pouvoit intéreſser ces auguſtes Princeſses, Lesquelles, après avoir tout examiné avec beaucoup d'attention, ſe retirèrent fort ſatisfaites et temoignèrent leur contentement de la maniere la plus gracieuſe.

II. Viſite de S. M. le Roy de Suède.

L'autre évènement mémorable, dont nous ayons à faire mention, eſt auſſi une viſite dont l'Académie ſe trouva infiniment flattée. S. M. le Roy de Suède, GUSTAVE ADOLPHE & S. A. R. M[gr.] le Duc de Sudermanie, le premier ſous le nom de Comte de *Haga*, le ſecond ſous celui de Comte de *Vaſa*, honorèrent, le 18 Août 1796, le muſée académique de leur préſence, pour voir les diverſes collections de raretés des trois regnes de la nature et les autres objets de curioſités, d'arts, d'antiquités, etc. qu'on y trouve raſsemblés. M[rs] les Académiciens y furent appellés et s'y rendirent avec empreſsement, tant pour préſenter leurs hommages à ces illuſtres hôtes, que pour Leur expliquer les objets de curioſité les plus remarquables que l'Académie poſsède. Pluſieurs d'entr'eux ſe rappellerent avec émotion, d'avoir rendu, il y a 19 ans, les mêmes devoirs, et dans le même lieu, à l'auguſte pere de Sa Majeſté, le Roy GUSTAVE III de glorieuſe mémoire, qui, ſous le nom de Comte de *Gothland*, avoit auſſi daigné illuſtrer de ſa préſence ce même muſée et tous les différens départemens de l'Académie.

II.

II.

Changemens arrivés dans l'Académie.

I. Membres décédés.

L'Académie a eu, vers la fin de l'année 1796, la douleur de rayer de ſa liſte des membres honoraires un nom qui la décoroit depuis vingt ans et qui étoit cher à la patrie, celui de l'immortel Comte Pierre Alexandrovitch Roumäntzof-Zadunaïski, Feld-Maréchal général, Sénateur, Gouverneur-général de Kiev, Tchernigof et Novgorod-Severſki, Lieutenant-Colonnel du régiment des gardes d'Ismaïlof, Chef du régiment de Grenadiers de la petite Ruſſie et Chevalier des ordres de St. André, de St. Alexandre-Nevski; de St. George et de St. Vladimir de la 1re Claſse, de l'aigle noir et de Ste. Anne. Ce heros, dont la mort fut regardée par la Ruſſie reconnoiſſante comme une calamité publique, avoit été reçu, par acclamation, membre honoraire de l'Académie, le jour de ſon jubilé ſemi-ſeculaire (1776), avec pluſieurs autres Seigneurs que les Sciences révéroient depuis longtems comme leurs protecteurs les plus zélés.

Outre cette perte, qui en fut une pour l'état entier, l'Académie s'eſt vu enlever par la mort, dans le courant des années 1795 et 1796, dix de ſes membres, ſçavoir: deux Académiciens effectifs; deux membres ſortis de cette claſſe pour entrer dans celle des honoraires regnicoles; deux membres honoraires externes qui jadis avoient été Académiciens ordinaires; un aſsocié étranger et trois membres correſpondans. Tous ces ſavans ayant tenu à l'Académie par les

les liens d'une aſsociation plus ou moins étroite et lui ayant tous rendu des ſervices, ils ont des droits ſur ſa reconnoiſſance et méritent que leurs noms reſtent conſignés dans cette hiſtoire.

Mr. *Michel de Verevkin*, Conſeiller d'Etat actuel, décéda à ſa terre de Michaïlowo, près de la ville de Klin, le 21 Mars 1795. Madame la Princeſse de Daschkof le fit recevoir en 1782 au nombre des correſpondans regnicoles et le gratifia en 1784 de la penſion académique de 200 Roubles.

Mr. *Jean Sievers*, Hanovrien, cy-devant Apothicaire à Irkoutzk, mourut le 6 Avril 1795. Déſtiné à faire un voyage en Boukharie et au Thibet, et doué de toutes les qualités qui font le bon obſervateur: d'une ſagacité rare, d'un zéle ardent, d'une patience à toute épreuve et de connoiſsances très étendues en hiſtoire naturelle, ſurtout en Botanique: l'Académie, qui l'avoit reçu le 5 Mars 1795 au nombre de ſes correſpondans regnicoles pouvoit ſe promettre les plus grands avantages de cette aſsociation, et des ſervices ſignalés d'un naturaliſte prêt à parcourir des contrées ſi fertiles et ſi peu connues, lorsqu'à la veille de ſon départ une maladie d'eſprit, un dégout prématuré de la vie le porta à en abrêger le cours. Le Tome X des *Nova Acta* contient un mémoire poſthume de Botanique de feu Mr. Sievers, auquel Mr. le Conſeiller d'Etat et Chevalier Pallas avoit mis la derniere main.

Mr. *Nicétas Socolof*, Docteur en Médecine, Conſeiller de Cour, ancien Académicien pour la Chymie et membre de

de l'Académie Ruſse, mourut à Moſcou le 7 Avril 1795. Il fut un des élèves de l'Académie et accompagna Mr. Pallas dans ſon expédition, en qualité d'étudiant. Après ſon retour de cette expédition l'Académie l'envoya achever ſes études à Strasbourg, où il prit le grade de Docteur en Médecine. De retour à St. Pétersbourg, l'Académie le reçut au nombre de ſes Adjoints en 1783. En 1784 il fut nommé Conſeiller de Cour et en 1787 Me. la Princeſse Daschkof le fit recevoir au nombre des Académiciens ordinaires. Sa ſanté s'étant dérangée par les travaux chymiques, auxquels ſon état l'appelloit, il ſe vit obligé de demander ſa dimiſſion en 1792. L'Académie le plaça au nombre de ſes aſsociés libres regnicoles et lui aſsûra l'expectative à la premiere penſion académique qui viendroit à vaquer; mais il ne vecut pas aſsez pour en obtenir la jouiſsance. Il alla d'abord fixer ſa demeure à Kalouga et de là il ſe rendit à Moſcou, où il termina ſes jours agé de 48 ans.

Mr. *Baſile Kreſtinin*, Citoyen d'Archangel et Correſpondent de l'Académie Impériale des Sciences, décéda dans cette ville le 5 Mai 1795 dans un âge fort avancé. Il étoit l'auteur de divers ouvrages approuvés par l'Académie et imprimés ſéparément, ainſi que de pluſieurs articles intéreſsans inſérés dans les calendriers hiſtoriques et géographiques et dans l'ourage périodique intitulé: Новыя Ежемѣсячныя Сочиненїя. Reçu au nombre des Correſpondans en 1786 et gratifié à différentes repriſes de récompenſes pécuniaires, il obtint enfin en 1791 la penſion académique de 200 Roubles, dont il a joui jusqu'à ſa mort.

Mr.

Mr. *Chrétien Théophile Kratzenſtein*, ancien Académicien de St Pétersbourg, Doyen de la faculté de Médecine à l'Univerſité de Copenhague et Conſeiller de Juſtice de de S. M. le Roy de Danemark, mourût le 6 Juillet 1795, probablement des ſuites de la frayeur que lui avoit cauſé le grand incendie qui du 7 au 9 Juin de la même année a conſumé, avec toute la partie occidentale de la ville de Copenhague, ſa maiſon, ſes inſtrumens et ſa Bibliothèque. Le défunt étoit né à Wernigerode en 1723. Il fut reçu Académicien ordinaire pour la Mécanique en 1748 et arriva à St. Pétersbourg au mois de Juillet de cette année. Il quitta l'Académie au mois d'Août 1753, après avoir enrichi les premiers volumes des *Novi Commentarii* de pluſieurs mémoires auſſi ingénieux qu'intéreſſans. En lui accordant la dimiſſion demandée l'Académie le plaça au nombre de ſes membres externes. Auſsi en cette qualité il lui envoya de tems en tems des mémoires eſtimables et remporta en 1780 le prix pour la queſtion concernant l'imitation des voyelles et en dernier lieu (en 1794) le prix propoſé pour la queſtion ſur l'état magnétique de la terre.

Mr. *Alexis Kononof*, Profeſſeur extraordinaire de Mathématique de l'Académie Impériale des Sciences, mourût à St. Pétersboug le 9 Octobre 1795, agé de 29 ans. Elevé au Gymnaſe académique aux fraix de la couronne, il s'y diſtingua par ſa conduite reglée et par ſon appliquation à l'étude, que des ſuccès rapides couronnèrent, au point que l'Académie le choiſit en 1785, avec trois autres étudians, également élèves du Gymnaſe, pour l'envoyer achever ſes études à l'Univerſité de Göttingue, d'où il revint en 1789, à la ſuite d'un rappel de l'Académie et muni des témoignages les

les plus favorables de ſes profeſſeurs. Après avoir ſubi un examen rigoureux, dont il ſe tira avec honneur, l'Académie le jugea digne de la place d'Adjoint pour les Mathématiques, qui lui fut conférée encore la même année. En 1794 il fut employé à donner un cours public de phyſique expérimentale, dont il s'acquitta à la ſatisfaction de l'Académie et de ſon Chef qui, au commencement de l'année ſuivante (1795), l'avança au grade de Profeſſeur extraordinaire. La même année il donna un ſecond cours de Phyſique et mourût, peu de tems après l'avoir achevé, dans la 29me année de ſon âge. Il ſe trouve un mémoire de Phyſico-Mathématique de ſa compoſition dans le VIIe Volume des nouveaux Actes de l'Académie.

Mr. *Jean George Zimmermann*, Docteur en Médécine, Conſeiller de Cour et Médecin de corps de S. M. Britannique, Chevalier de l'ordre de St Vladimir de la 3me claſſe et membre de pluſieurs Académies, mourût à Hanovre le 7 Octobre 1795 dans ſa 67me année. Il étoit né à Brugg en Suiſſe et fut reçu au nombre des Aſsociés externes de l'Académie le 9 Janvier 1787.

Mr. *Jean Chrêtien Hebenſtreit*, Docteur en Médecine et Profeſseur de Botanique à Leipzik, ancien Académicien de St. Pétersbourg, décéda à Leipzik le 27 Septembre 1795 agé de 75 ans et 2 mois. L'Académie l'avoit engagé en 1749 comme Académicien ordinaire pour la Botanique, et il arriva à St. Pétersbourg au mois d'Août de la même année. En 1753 il fit avec le Préſident de l'Académie, le Feld-Marechal et Hetmann Comte de Razoumovski un voyage

en Ukraine, d'où il ſe rendit à Leipzik. Il retourna à St. Pétersbourg en 1756 et y occupa pour la ſeconde fois ſa place d'Académicien ordinaire pour la Botanique qu'il remplit ſans interruption jusqu'en 1759. En cette année il quitta entièrement l'Académie pour retourner à Leipzik, où il reſta jusqu'à ſa mort. Les Tomes V et VIII des nouveaux Commentaires renferment trois mémoires de Botanique de cet Académicien.

Mr. *Eric Laxmann*, Cónſeiller de Collège, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir, ancien Académicien de St. Pétersbourg et membre de pluſieurs Académies et Sociétés ſavantes, mourût le 5 Janvier 1796 dans ſa 59me année. Il étoit né le 24 Juillet 1737 à Abo en Finnlande, où il fit ſes premieres études. Il ſe voua d'abord à l'état eccleſiaſtique et obtint, après avoir fini ſa Théologie, une place de Paſteur adjoint dans ſa patrie. En 1762 il fut appellé à St. Pétersbourg, pour être Régent à la grande école Luthérienne de St. Pierre. En 1764 il fut nommé Paſteur de la communeauté Luthérienne à Barnaul, aux mines de Kolyvan, où il eut l'occaſion de ſuivre le penchant naturel qui le portoit à l'étude de l'Hiſtoire naturelle, en s'appliquant d'abord à la Minéralogie et puis auſsi à toutes les autres branches, Zoologie, Botanique, etc. De retour à St. Pétersbourg, l'Académie des Sciences l'engagea le 26 Février 1770 en qualité de Profeſſeur de Chymie et d'Economie, place qu'il quitta le 18 Janvier 1781, en conſervant le titre d'Académicien, pour ſe rendre à Nertchinsk, où il occupa pendant quelque tems la place de membre de la Chancellerie des mines, avec le rang et le titre de Conſeiller

ſeiller de Cour. Quelque tems après il fut attaché au Cabinet de S. M. I. avec 600 Roubles d'appointemens et la fonction de faire des voyages minéralogiques, tendant à découvrir les thréſors cachés de la vaſte et riche Sibérie. Fidèle à ſes anciennes liaiſons avec l'Académie Mr. Laxmann ne négligea pas les occaſions que ces fréquens voyages lui fourniſsoient, de ramaſser pour l'Académie, et de lui envoyer de tems en tems des curioſités naturelles et des notices intéreſsantes, ce qui engagea le Chef à le gratifier en 1784 de la penſion académique. D'Irkoutzk où il s'étoit domicilié avec ſa famille, il revint à différentes repriſes à St. Pétersbourg, où il fut décoré en 1794 de l'ordre de St. Vladimir de la 4me Claſse et avancé en 1795 au rang de Conſeiller de Collège. Il quitta de nouveau St. Pétersbourg, vers la fin de la dite année, pour s'en rétourner à Irkoutzk, et mourût en route, à 118 Verſtes au delà de Tobolsk. Il a publié divers ouvrages, et les Tomes XIV, XV, XVI, XVII, XVIII et XIX des nouveaux Commentaires, de même que les Tomes III et VII des nouveaux Actes, renferment pluſieurs mémoires d'Hiſtoire naturelle de cet infatigable naturaliſte.

Mr. *Alexis Protaſsof*, Docteur en Médecine, Conſeiller de Cour, Profeſseur d'Anatomie, membre de l'Académie Impériale des Sciences et de l'Académie Ruſse, mourut à St. Pétersbourg le 5 Mai 1796 dans ſa 72me année. Elevé dans le Gymnaſe académique il fut nommé étudiant en 1743 et envoyé enſuite aux dépens de l'Académie à Strasbourg et à Leyde, pour y achever ſes études. En 1751 il fut reçu au nombre des Adjoints de l'Académie qui le nomma en 1763 Profeſseur extraordinaire d'Anatomie. En 1771

il fut placé au nombre des Académiciens effectiſs et avancé en 1779 au rang de Conſeiller de Cour. Chargé pendant pluſieurs années des fonctions de Secrétaire de la Commiſſion adminiſtrative de l'Académie et dans la ſuite de la Sur-Intendance de l'attelier des graveurs et des artiſtes, et en dernier lieu de la rédaction de l'ouvrage périodique que l'Académie publioit depuis pluſieurs années ſous le titre de Ежемѣсячныя Сочинения il vaqua à tous ces différens employs avec autant d'activité que de ponctualité et finit ſa carriere le jour mentionné ci-deſſus, après avoir aſſiſté encore à une ſéance de l'Académie Ruſse.

II. Nouvelles receptions.

Pour reparer ces pertes, en partie très ſenſibles, l'Académie s'eſt aſsocié dans le courant des deux années 1795 et 1796 pluſieurs Seigneurs de la nation encore plus diſtingués par leur amour pour les Sciences que par leur naiſsance et leur rang; ainſi que quelques Savans eſtimables et avantageuſement connus, tant externes que regnicoles. En voici la liſte:

Reçu parmi les Aſsociés honoraires regnicoles

S. E. Mr. Jacques de *Boulgakof*, Conſeiller privé, et Chevalier grand-croix de l'ordre de St. Vladimir de la 2de Claſse. Reçu le 5 Mars 1795.

S. E. Mr. Pierre de *Soimonof*, Lieutenant Général, Sénateur, Chevalier grand-croix de l'ordre de St. Vladimir de la 1re Claſse. Reçu le 27 Août 1795.

S. E. Mr. Alexis de *Vaſilief*, Conſeiller privé et Directeur en Chef du Collège Impérial de Médecine, Chevalier Grand-

Grand-croix de l'ordre de St. Vladimir de la 2[de] Claſse, Reçu le 20 Octobre 1796.

M. Charles de *Hablitzl*, Conſeiller d'Etat, Vice-Gouverneur de la Tauride et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 3[e] Claſse. Rayé de la liſte des Correſpondans penſionnaires et reçu Aſsocié honoraire le 28 Nov. 1796.

S. E. Mr. André de *Nartof*, Conſeiller privé, Préſident du Collège des mines et Chevalier de l'ordre Royal Danois du Danebrog. Reçu le 15 Décembre 1796.

S. E. Mr. le Comte Apollos *Mouſin - Pouchkin*, Chambellan actuel de S. M. I. et Vice-Préſident du Collège des mines. Reçu le 15 Décembre 1796.

De plus l'Académie aggrègea comme membres honoraires, à la recommendation du Chef et à la ſuite de l'approbation qu'elle avoit donné à quelques mémoires qui lui avoient été préſentés de la part des récipiendaires:

Mr. l'Abbé Maurice *Henry*, Aſtronome de S. A. S. Electorale Bavaro-Palatine. Reçu le 26 Octobre 1795.

Mr. Joſeph *Sarti*, Maître de Chapelle de S. M. I. Reçu le 26 Mai 1796.

Le nombre des membres effectifs de la Conférence académique fut augmenté dans le période dont nous rapportons içi les principaux évènemens:

1°) par Mr. Benoît François Jean *Hermann*, Conſeiller de Cour qui après avoir été depuis 1790 membre honoraire penſionné de l'Académie, à ſon retour de Pychminsk, où

où il avoit été Directeur d'une fabrique d'acier, vint prendre poſseſsion le 10 de Mars 1796 de ſa place d'Académicien effectif qui lui avoit été aſsûrée, avec mille Roubles d'appointemens, dès l'année 1790.

2°) par Mr. l'Abbé Maurice *Henry*, cy-devant Aſtronome de S. A. Electorale Bavaro-Palatine et Membre honoraire de l'Académie Impériale des Sciences depuis le mois d'Octobre de l'année paſsée, lequel fut reçu le 7 Juillet 1796 membre ordinaire pour la Claſse d'Aſtronomie.

3°) par Mr. Simeon Gourief, Capitaine d'Artillerie et Lecteur de Phyſico-Mathématiques du Corps des officiers de la flotte à rames. Il fut nommé Adjoint effectif pour la Claſse de Mathématique le 26 Mai 1796

4°) par Mr. Jean Henry *Buſse*, Sous-Bibliothécaire de l'Académie et Conrecteur de ſon Gymnaſe, qui fut reçu Adjoint pour l'hiſtoire le 29 Janvier 1795.

Reçu au nombre des Aſsociés étrangers:

Mr. John *Churchman*, Phyſicien Américain. Reçu le 8 Janvier 1795, à la recommandation de M^e^ la Princeſse Daschkof.

Mr. Guillaume Théophile Fréderic *Beitler*, Profeſseur de Mathématique et d'Aſtronomie au Gymnaſe illuſtre de Mitau. Reçu le 26 Octobre 1795.

Mr. *Dougald Stewart*, Profeſſeur à l'Univerſité d'Edinbourgh. Reçu le 29 Octobre 1795.

Reçu

Reçu au nombre des Correſpondans:

Mr. Jean *Sievers*, cy-devant Apothicaire à Irkoutzk, déſtiné, lors de ſa réception, à faire un voyage au Thibet. Reçu le 5 Mars 1795.

Mr. Laurent Daniel *Ljungberg*, cy-devant Officier du Génie au Service de S. M. le Roy de Suède, actuellement à St. Pétersbourg et à la veille de faire un voyage en Amérique.

Mr. Alexandre *Fomin*, citoyen d'Archangel et membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg. Reçu le 11 Juin 1795.

Mr. Pierre *Schanguine*, Sur-Intendant des mines de Kolyvan à Barnaül. Reçu le 31 Août 1795.

Mr. Alexandre *Razderischin*, Conſeiller de Cour et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4[me] Claſse. Reçu le 2 Novembre 1795.

Mr. Jean *Böber*, Conſeiller de Cour, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir de la 4[me] Claſse, et membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg, établi à Ekathérinoslav. Reçu le 22 Fevrier 1796.

Mr. Henry *Storch*, Aſseſseur de Collège et membre de la Société libre économique de St. Pétersbourg. Reçu le 7 Avril 1796.

Mr. Maurice de *Praſse*, Mathématicien à Leipzik, Reçu le 19 Septembre 1796.

III. Promotion.

Outre les promotions de M[rs.] Henry & Buſse que nous avons déjà rapportées dans l'article précédent, en parlant des

des nouvelles réceptions faites par l'Académie, il y eut encore deux promotions proprement dites au commencement de l'année 1795. Mrs. les Adjoints Kononof et Zacarof furent nommés Profeſseurs extraordinaires, le premier pour les Mathématiques dans la ſéance du 26 Janvier, le ſecond pour la Chymie dans la ſéance du 29 Janvier.

III.

Gratifications et recompenses.

Pour récompenſer les longs et nombreux ſervices de Mr. le Conſeiller d'Etat et Chevalier Pallas SA MAJESTÉ IMPÉRIALE lui a très gracieuſement donné, au mois de Mars 1795, des poſseſsions en Tauride, avec la permiſſion de s'y établir et d'y continuer ſes ſavantes occupations, et avec la jouiſsance des mêmes appointemens qu'il avoit tiré jusqu'à préſent de la caiſse académique. En conſéquence de quoi Mr. Pallas a quitté St. Pétersbourg le 12 Août 1795, pour aller s'établir en Tauride.

En Juillet 1795 Mr. l'Académicien et Chevalier Krafft, en recompenſe des leçons de Phyſique qu'il avoit données jusqu'àlors à LEURS ALTESSES IMPERIALES, Monſeigneur le Grand-Duc ALEXANDRE PAVLOVITSCH et Monſeigneur le Grand-Duc CONSTANTIN PAVLOVITSCH, a été gratifié d'une penſion viagère de 600 Roubles.

Le 17 Septembre 1795 Mr. Pierre *Schanguine*, Sur-Intendant des mines de Kolyvan à Barnaul et Correſpondent de l'Académie, a été gratifié de la penſion académique de 200 Roubles.

Mr.

Mr. le Conſeiller de Colléges Roumovski ayant été appellé à Zarskoe-Sélo au mois de Juillet 1796, pour expliquer à SA MAJESTÉ IMPÉRIALE l'uſage d'un téleſcope de Herſchel de 10 pieds, dont S. M. le Roi d'Angleterre avoit fait préſent à la Souveraine: il a eu l'honneur de faire voir à SA MAJESTÉ la Lune et pluſieurs autres objets céleſtes pendant ſept ſoirées conſécutives, et de s'entretenir avec cette auguſte Princeſse ſur pluſieurs ſujets d'Aſtronomie et de Géographie. À ſon départ il a reçu de la part de SA MAJESTÉ une montre d'or garnie de Brillans, avec une chaine de la même richeſse. Le Mécanicien Koulibin, que Mr. Roumovski avoit pris avec lui, pour ſoigner le tranſport de l'inſtrument, reçut une tabatière d'or.

IV.
Préſens faits à l'Académie.

I. *Pour la Bibliothèque.*

De la part de Mr. Conſeiller de Cour *Gouthrie*:

Recherches ſur les antiquités de la Ruſsie etc. St. Péterſbourg 1794. in 8vo.

De la part de S. E. Mr. le Comte de *Brühl* Miniſtre de Saxe à Londres:

On the inveſtigation of aſtronomical circles. London 1794.
A regiſtre of one of Mr. Mudge's time keepers. London 1794.

De la part de Mr. *Romano*, Officier du Génie au Service de la République de Veniſe:

Nova Analyſeos elementa, auctore I. B. *Nicolai*, Tom. I. Pars 2. Patavii 1793. in 4to.
Nuovo metodo di applicare alla sintesi la ſoluzione analitica di qualunque problema geometrico, di Ant. *Romano*. Venezia 1793. in 8vo.

 De

De la part de Mr. *Storr*, Profeſseur à Tubingue:

Inveſtigandae cryſtallifodinarum oeconomiae quaedam pericula, in 4to.

Diſsertatio inauguralis medica, de ſale alpino. in 4to.

Diſsertatio inauguralis de moscho. in 4to.

Sciagraphia methodi materiae medicae qualitatum aeſtimationi ſuperſtructae. Pars I et II. in 8vo.

De la Part de Mr. le Conſeiller d'Etat *Pallas*:

Краткое Физическое и Топографическое Описаніе Таврической Области. in 4to.

De la part du Gymnaſe illuſtre à Anſpach:

Einige Gedancken über die Methode bey dem Religionsunterrichte in den obern Klaſsen der Schulen, von Inſpector *Rothe*.

Von den Vorzügen der öffentlichen, und beſonders wiſsentſchaftlichen, vor der häuslichen Erziehung, von Mag. *Martini*.

Euſebianae de Jacobi fratris Jeſu vita et morte narrationis partes quaedam explicantur —— a Profeſsore et Rectore *Faber*.

Wie ſoll man auf Schulen überſetzen? von Mag. *Schaefer*.

De la part de Mr. *Tychſen*, Profeſseur à Butzov:

Physiologus Syrus, ſeu hiſtoria animalium XXXII in S. S. memoratorum ſyriace e codice bibliothecae Vaticanae nunc primum edidit, vertit et illuſtravit O. G. *Tychſen*. Roſtochii 1794. in 8vo.

Fortgeſetzter Mecklenburg-Sicilianiſcher Briefwechſel. Der neuen Monatsſchrift von und für Mecklenburg 14ter Jahrgang, 2tes Stück. Februar 1794.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode* à Berlin:

Aſtronomiſches Jahrbuch, für das Jahr 1797. Berlin 1794. in 8vo.

Claudius Ptolemäus Beobachtung und Beſchreibung der Geſtirne und der Bewegung der himmliſchen Sphäre. Berlin 1795. in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Scherer* à Jena.

Verſuch einer populären Chemie. Mühlhauſen 1795. in 8vo.

Ueber das Leuchten des Phosphors im atmosphäriſchen Stick-Gas; nebſt D. Pfaffs Bemerkungen zu Hrn. Profeſsor Göttlings Schrift: Beytrag zur Berichtigung der antiphlogiſtiſchen Chemie. Weimar 1795.

De

De la part de l'Auteur:

Orphica, ein muſikaliſches Inſtrument, erfunden von C. L. *Röllig*. Wien 1795. in 8vo.

De la part de l'Académie Américaine des arts et ſciences de Boſton:

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. II. Part. I. Boſton 1793. in 4to.

De la part des Auteurs.

Xenocratis de alimento ex aquatilibus. Auct. Cajetano de *Ancora*. Neapoli 1794.

Guide de Voyageurs pour les antiquités et curiosités naturelles de Pozzuoli et des environs; ouvrage de Mr. C. d'*Ancora*, traduit de l'Italien par Mr. *Manv'lles*. Naples 1792.

Opuſcoli di vario argomento di Guiſeppe Caſsella, Regio Aſtronomo alla Marina. Opuſcolo I. Saggio d'un tentativo per riſolvere l'equazioni di tutt'i gradi. Napoli 1788.

Memoria ſull'eruzione del Veſuvio, accaduta la ſera de 15 Giugno 1794, di Scipione Breislak et d'Antonio Winspeare. Napoli 1794.

De la part de l'Académie Royale de Stockholm:

Kongl. Vetenskaps Academiens Nya Handlingar, années 1792 — 1798.

De la part de Auteur:

Diſsertazione ſulla triſezione del angolo, oſsia del arco, colla piana Geometria etc. dal Abbate Gius. Mar. Pizzati. in Venezia 1795. in 8vo.

De la part de Mr. l'Académicien *Bode* à Berlin:

Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1798. Berlin 1795. in 8vo.

Sammlung aſtronomiſcher Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten u.s.w. zweyter Supplement-Band zum aſtronomiſchen Jahrbuch. Berlin 1795. in 8vo.

Aſtronomiſches Jahrbuch für das Jahr 1799. Berlin 1796, in 8vo.

Aſtronomiſche Tafeln, zur Beſtimmung der Zeit aus den beobachteten gleichen, obwol unbekannten Höhen zweyer Fixſterne, von Jul. Aug *Koch*. Berlin und Strahlsund 1797, in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Schröter*:

New obſervations, in further proof of the mountainous inequalities, rotation, atmoſphere and twilight of the planet Venus.

De la part de Mr. le Major *Vega*:

Theſaurus logarithmorum completus ex arithmetica logarithmica et ex trigonometria artificiali Adriani Vlacci collectus etc. a Georgio *Vega.* Lipſiae 1794, in fol.

Beyträge zum 3ten Bande der Vorleſungen über die Mathematik des Georg *Vega.* Wien 1794, in 8vo.

De la part de Mr. le Baron de *Meidinger*:

Icones piſcium Auſtriae indigenorum, quos collegit, vivisque coloribus expreſſos edidit Carolus liber Baro a Meidinger. Decuria I — V. Viennae Auſtriae 1785 — 95, in fol.

De la part de Mr. l'Aſſeſſeur *Storch*:

Statiſtiſche Ueberſicht der Statthalterſchaften des Ruſſiſchen Reichs, nach ihren merkwürdigſten Kultur-Verhältniſſen, in Tabellen; von Heinr. *Storch* Riga 1795, in fol.

De la part de l'auteur, Mr. *Entner* d'Entnersfeld:

Plan in ſich enthaltend viele ſo leichte als untrügliche Mittel die geſammten öſterreichiſchen Erblande auf die höchſte Stufe der Gröſse zu erheben, u. s. w. Wien 1781, in 8vo.

Unmaſsgebliche Vorſchläge der Theurung ſowol für das Gegenwärtige als für das Zukünftige abzuhelfen u. s. w. Wien 1791, in 8vo.

Lehrbuch der Landwirthſchaftlichen Oeconomie, zum Gebrauch derjenigen welche ſich dieſer Wiſſenſchaft entweder theoretiſch oder practiſch widmen wollen. 2 Theile. Wien 1796, in 8vo.

Almanach von 366 Tägen und eben ſo vielen Nächten, in einer Auswahl von lehrreichen, wahrhaften vorzüglichen Geſchichten, Sprüchen und Reden. Wien 1796, in 8vo.

Trauerrede über das allerbetrübteſte Hinſcheiden Kayſer Joſeph II. Wien 1790.

Trauerrede über den bedauerlichen Hintritt Ihro Königl. Hoheit der durchl. Frauen Erzherzogin von Oeſtereich, Maria Anna. Wien.

De

De la part du bureau dès longitudes à Londres:

The nautical Almanac and aſtronomical Ephemeris, for the Years 1797—1800. London. in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Walter* à Berlin:

Anatomiſches Muſeum, geſammelt von Johann Gottlieb *Walter*, beſchrieben von ſeinem Sohne Friedrich Auguſt Walter. Berlin 1796, in 4to.

De la part de Mr. le Docteur *Böttcher*:

Auswahl des chirurgiſchen Verbandes, für angehende Wundärzte. Berlin 1795, in 8vo.

Vermiſchte mediciniſch-chirurgiſche Schriften, Königsberg 1792, in 8vo.

Abhandlung von den Krankheiten der Knochen, Knorpeln und Sehnen, 1r. Theil. Königsberg 1795, in 8vo.

De la part de Mr. le Docteur *Crome*:

Die Staatsverwaltung von Toſcana, unter der Regierung S. K. H. Leopold des II[ten], aus dem Italieniſchen überſetzt und mit Anmerkungen begleitet von Dr. A. F. W. Crome, 2 Bände. Gotha 1795, in 4to.

De la part de Mr. de *Praſſe* à Leipzik:

Uſus Logarithmorum Infinitinomii in theoria aequationum. Lipsiae 1796, in 4to.

De la part de la Société électorale météorologique à Manheim:

Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſervationes anni 1791. Manhemii 1794, in 4to.

Ephemerides Societatis meteorologicae Palatinae. Obſervationes anni 1792. Manhemii 1795, in 4to.

Additamentum obſervationum annorum antecedentium. Manhemii 1795.

De la part de Mr. le Docteur *Scherer* à Jena:

Grundzüge der neuern chemiſchen Theorie, Jena 1795, in 8vo.

De la part de Mr. l'Adjoint *Gourief*:

Навигаціонныя и Мореходныя Изслѣдованія, сочинены Г. Безу, съ Французскаго подлинника на Россійской языкъ переведены и дополнены С. Гурьевымъ. С. Петербургъ 1790, in 4to.

De

De la part de la Société Royale des Sciences de Göttingue.

Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingenſis. Volumen XII. ad annos 1793 et 1794, in 4to.

De la part de Mr. *Seyffer*, Profeſseur à Göttingue:

Beſtimmung der Länge von Göttingen, Gotha, Dantzig, Berlin und Herefield, aus der Sonnenfinſterniſs vom 5ten September 1793. Götting. 1794.

De la part de Mr. *Tychſen*, Profeſseur à Butzov:

O. G. Tychſen introductionis in rem numariam Muhamedanorum. Additamentum I. Rostochii 1796, in 8vo.

Foſsilia Aegyptiaca Muſei Borgiani Velitris, deſcripsit Greg. *Wad*, Danus. Velitris 1794, in 4to.

De la part de Mr. le Docteur de *Careno* à Vienne:

Obſervationes de epidemica conſtitutione anni 1789 in civico noſocomio Viennensi. Accedit tentamen de morbo Pellagra. Vindobonae 1794. in 8vo.

Dieta patologica, oſsia metodo di vivere per gli ammalati, del Dottore Giorgio Reyher Tradotto dal tedesco, dall' Dottore Luigi Careno. Firenze 1795. in 8vo.

P. Moſcati, über eine convulsiviſche Krankheit im Wayſenhauſe zu Mayland, an Hrn. Aloïs von Careno. Aus dem Italieniſchen. Wien 1796. in 8vo.

De la part de Mr. *Beitler*, Profeſseur à Mitau:

Un ouvrage d'Aſtronomie en Langue Chinoiſe.

De la part de Mr. *Creve*, Profeſseur à Mayence:

Vom Baue des weiblichen Beckens 1r Theil, Leipzig 1794, in 4to.

II. *Pour le cabinet d'Hiſtoire naturelle.*

De la part de Mr. le Conſeiller de Cour et Chevalier *Razdérischin*:

Une collection de cent ſoixante neuf pièces de minéraux et autres foſsiles indigènes, faiſant ſuite à la collection de quatre vingt dix pièces, dont le même donateur avoit enrichi le cabinet de Minéraux en 1788 (V. Hiſtoire de cette année, à la tête du Tome VI des Nova Acta). Mr. de Razdérischin a ajouté à cette collection un Catalogue raiſonné très détaillé.

De

De la part de Mr. le Conſeiller de Cour *Hermann*.

Une collection de vingt pièces de minéraux et autres foſsiles de la Sibérie, en partie entièrement inconnus jusqu'ici aux minéralogiſtes et découverts tout récemment dans les nouvelles minières, accompagnée d'un Catalogue raiſonné du donateur.

De la part de Mr. le Conſeiller de Cour *Loder* à Jena:

Un très beau tableau de végétaux ſquélétés, ſupérieurement bien exécuté par Mr. le Docteur *Biber* à Gotha, avec un Catalogue des fleurs et feuilles dont les ſquélètes ſe trouvent dans cette collection, claſsifiés ſelon le le ſyſtème de *Linné*.

De la part de S. E. Mr. Lieutenant Général de *Levandinof*:

L'Os maxillaire inférieur, avec une dent molaire, à demi-petrifiés, d'un animal inconnu de taille énorme, qui a été trouvé aux bords de la mer d'Azof, par un négociant de Charkof nommé *Boutenkof*.

De la part?

Un morceau de bois *Lagetto*, ou bois dentelle (Lacebarktree) des Indes occidentales, avec un petit gobelet fait de ce bois.

Envoyé de la nouvelle Ruſsie:

Un monſtre humain, ſavoir un enfant mûr à deux corps, deux têtes, quatre bras et trois pieds, ou plutôt deux enfans tenans l'un à l'autre par les côtés, et de manière que le bras et le pied gauche de l'un, et le bras et le pied droit de l'autre ſe trouvent à leur place naturelle, tandisque les deux autres pieds n'en font qu'un qui ſe trouve placé au dos de l'un des deux corps, et que les deux autres bras, quoique diſtinctément prononcés, tiennent l'un à l'autre dans presque toute leur longueur.

Envoyé du Gouvernement de Smolensk:

Un monſtre humain, ſavoir un foetus de six mois, pareillement à deux corps, deux têtes, quatre bras et quatre jambes, ou plutôt deux foetus tenans l'un à l'autre par la région hypogaſtrique.

III.

III. *Pour le Cabinet de curioſités.*

De la part de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE:

Une collection de curiosités Japonoiſes, envoyées de l'isle de Ceylon à *Sa Majeſté l'Impératrice* par Mr. le Docteur Stutzer, Suèdois de nation, qui avoit fait quelque sejour au Japon. Cette collection dont *Sa Majeſté Impériale* a fait préſent au muſée académique, conſiſte en divers ouvrages en lac noir très fin, garnis d'or, de perles et de nacre, comme aſsiettes, boites, etc.; en ſabres; en modèles de palanquins; en monnoyes Japonoiſes d'or, d'argent et de cuivre: en papier de *miroir* de différentes couleurs, fabriqué d'une plante marine, et employé par les Japonois à faire des éventails et des jalouſies tant pour les chambres que pour les palanquins; en peintures et cartes géographiques Japonoiſes; en plans des villes et temples du pays; en livres traduits en Japonois d'après des traductions Hollandoiſes, tels que les tables anatomiques de *Culmus*, la Chirurgie de *Heiſter*, *Roſenſtein* ſur les maladies des enfans etc.; enfin en trois caſsettes remplies d'inſectes très bien imités en cuivre d'après nature.

De la part de Mr. Conſeiller d'Etât et Chevalier *Pallas*:

Une halebarde trouvée aux environs des anciennes habitations des Mordouans entre la Soura et la Maksha, dans le Gouvernement de Penza, où l'on en a déterré depuis peu plusieurs de la même forme et matière.

De la part de Mr. le Conſeiller de Cour et Chevalier *Razdérischin*:

Quelques antiquités Tchoudes trouvées à 40 Verſtes de Ekathérinbourg. En creuſant à une profondeur de 14 toiſes la minière de Goumaſhevsk, on a découvert une des anciennes minieres des Tchoudes, dans laquelle on a trouvé le corps d'un ouvrier Tchoude, muni d'un de ces ſacs de cuir, dans lesquels les foſsoyeurs des métaux de ce peuple avoient coûtume de transporter les mines de cuivre; la pique de cuivre de cet ouvrier avec un reſte de la manche de bois; un clou de cuivre et trois pièces de talc qu'ils employoient comme des moules, pour y fondre leurs clous de cuivre. Toutes ces pièces furent dépoſées au muſée académique.

IV.

IV. *Pour le jardin botanique:*

De la part de Mr. le Conſ d'Etât et Chevalier *Pallas*:

Pluſieurs paquets de ſemences cueillies par cet Académicien ſur les bords du Don et en Tauride, dans le courant des années 1795 et 1796 et envoyées à l'Académie.

V. *Pour le médailler.*

Une médaille d'or, en forme de croix, frappée en mémoire de la priſe d'Ismail et déſtinée à être portée à la boutonniere par les Officiers qui ont aſſiſté à l'aſsaut de cette ville.

Une médaille en argent, de forme ovale, frappée à la même occaſion, pour être diſtribuée aux bas-officiers et aux ſoldats qui ont eu part à l'action de cette journée glorieuſe, et pour être portée pareillement à la boutonniere, comme une marque de diſtinction militaire.

V.

Mémoires et autres ouvrages manuſcrits préſentés à l'Académie.

1795

Le 12 *Janvier.* Extrait d'un Journal tenu pendant un voyage à la cour de Jédo; par M. le Docteur *Stutzer.*

— — —. Déſcription du Moxa et de la cure des épingles, très usitée au Japon; par le même.

Le 26 *Janvier.* Mémoire ſur la différence en longitude des obſervatoires de Paris et de Greenvich, avec les obſervations, d'où elle a été déduite, et une critique raiſonnée de celle que le Général Roy a conclue de ſes opérations géodésiques; par Mr. le Comte de *Brühl.*

Le 16 *Mars.* Extrait ſuccinct des obſervations météorologiques faites en 1794 à Nertchinsk, Schilkinsk et Kliſchginsk; par Mr. le Conſeiller de Collège *Barbot de Marny.*

Le 9 *Avril.* Recherches ſur les équations linéaires aux différences partielles du ſecond degré; par Mr Jean *Trembley.*

Le 4 *Mai.* Obſervations météorologiques faites à Kiachta; par Mr. Jean *Sievers.*

Le 13 *Août.* Описаніе Бѣлаго Моря; par Mr. *Fomin.*

Le 31 *Août.* Obſervationes meteorologicae per annum 1794 in urbe Saratovia inſtitutae; par Mr. Conſeiller de Cour *Meyer.*

Le 7 *Septembre.* Описаніе махины для подъему въ карабельныхъ пристаняхъ на большую высоту великихъ тяжестей; par Mr. le Major *Polef*

Le 5 *Octobre.* Abrégé de Trigonometrie ſphérique; par Mr. l'Abbé *Henry.*

— — — Aſtronomie ſphérique; par le même.

— — — Mémoire ſur l'éclipſe du ſoleil du 5 Sept. 1793, obſervée à Manheim; par le même.

— — — Obſervation de l'occultation d'Aldebaran par la lune, faite à l'obſervatoire électoral de Manheim le 10 Août 1792; par le même.

— — — Beſchreibung eines neuen Telegraphs; par Mr. le Profeſseur *Parrot.*

— — — Mémoire amélioré ſur la méthode de ſéparer l'or et l'argent par le départ, fondée ſur les affinités des corps; par Mr. le Baron de *Meidinger.*

Le 8 *Octobre.* De progreſsionibus arcuum circularium, quorum tangentes ſecundum datam legem procedunt; par Mr. le Profeſseur *Pfaff* à Helmſtedt.

Le 12 *Octobre.* Sur le calcul des variations des étoiles; par Mr. le Profeſseur *Beitler.*

Le 23 *Novembre.* Obſervation de l'occultation de Jupiter et de ſes ſatellites par la lune, faite à l'obſervatoire de Mitau le 23 Septembre 1795; par Mr. *Beitler.*

— — — Obſervation de l'occultation de l'étoile μ de la baleine par la lune, faite à Mitau le 30 Septembre 1795; par le même.

Le 3 *Décembre.* Obſervation de l'Eclipſe partiale de la lune arrivée dans la nuit du 11 au 12 d'Octobre 1791, faite à l'obſervatoire de Mitau; par le même.

— — — Eclipſes des Satellites de Jupiter et occultations d'étoiles par la lune, obſervées à Mitau en 1792 et 1793; par le même.

1796.

Le 25 *Janvier.* Beobachtung einer neuen merkwürdigen ſehr entfernten Licht-Erſcheinung im Schlangenträger, vom 18ten Junius 1795; par Mr. le Grand-Baillif *Schröter.*

Le 21

Le 21 *Mars.* Abhandlung über die mancherley Gifte in den Küchen und über die Art, wie die kupfernen Kochgefäſse ſtatt der ungeſunden, unhaltbaren, koſtbaren Verzinnung, ſowol durch eine Glaſur, als auch durch einen andern äuſserſt wolfeilen und dauerhaften Ueberzug, der Geſundheit unſchädlich gemacht werden können; par Mr. le Baron de *Meidinger.*

Le 28 *Avril.* Addition au mémoire ſur les équations linéaires aux différences partielles du ſecond degré; par Mr. *Trembley.*

Le 2 *Mai* Erläuterung der Straboniſchen Topographie des Cimmeriſchen Bosphorus, nach den neueſten Ruſsiſchen Karten von Taurien und Taman; par Mr. le Lieutenant *Marschal de Bieberſtein.*

— — — Примѣчанія о встрѣчающихся около Таврическаго пролива древнихъ Греческихъ надгробныхъ камняхъ; par le même.

Le 5 *Mai.* Witterungs-Beobachtungen vom 16ten May 1786 bis Ausgang des May 1787; von dem Naturforſcher bey der Bilings'ſchen Expedition, Hrn. Doctor *Merk.*

— — — Thermometrical and meteorological obſervations; par Mr. *Sauer*, Secrétaire de l'expédition du Cap. Billings, faites pendant le voyage depuis Moſcou le 25 Nov. 1785, jusqu'à Seredin-Koroma-Oſtrog le 16 Septembre 1787.

— — — Wetterbeobachtungen, die von dem Amanuensis *Krebs* auf der Reiſe vom Tſchuktſchiſchen Vorgebürge nach den Aleutiſchen Inſeln, und von dort wieder zurück nach Kamtſchatka, vom 22ten September 1789 bis zum 31ten December 1792, und dazwiſchen in Petri Pauli Hafen, vom 13ten Decemb. 1789 bis zum 30ten April 1790 angeſtellt worden sind.

— — — Ebendeſselben Witterungs-Beobachtungen, die im Petri Pauli Hafen, auf Kamtſchatka vom 1ſten Jan. bis zum 31ten Julius 1793 aufgezeichnet worden.

Le 12 *Mai.* Moyen de compter les vibrations des ſons et d'en comparer la célérité avec la meſure du tems; par Mr. *Sarti*, Maitre de Chapelle de S. M. I.

Le 16 *Mai* Mémoires ſur la réſpiration, offerts à l'Académie Impériale de St. Pétersbourg: par A. *Ypey.* A. L. M. Docteur en Philoſophie et Médecine à Amſterdam. Ir Mémoire.

Le 19 *Mai.* Selbſt-Beweg-Maſchine, nebſt Bemerkungen; von Joh. Friedr. *Heinle.*

Le 26 *Mai.* Начала Геометрїи трансцендентной и исчисленїя дифференцїяльнаго, извлеченныя изЪ истинной натуры ихЪ предметовЪ; par Mr. *Gourieſ.*

Le 19 *Septembre.* Вновь изобрѣтенной способЪ дѣлить ГеометрическимЪ черченїемЪ уголЪ на три равныя части; par Mr. le Lieutenant *Tſchkévitſch.*

Le 10 *Novembre.* Verſuch einer Philoſophie der Mineralogie; von Joh. Christ. v. *Lehmann.*

Le 19 *Décembre.* Déſcription d'un globe de feu vu en Allemagne le 8 Mars 1796; par Mr. le Major de *Zach.*

Mr. le Conſeiller de Collège et Chevalier *Stritter* a envoyé régulierement chaque mois les obſervations météorologiques faites à Moſcou, et par feuilles détachées, ſes Mémoires hiſtoriques pour la Bibliothèque ancienne Ruſse.

Quant aux mémoires préſentés de la part des Académiciens et lus dans les ſéances académiques, leur nombre monte à 57.

VI.

Obſervations, expériences et notices intéreſsantes, faites et communiquées à l'Académie.

I. *Sur une terre inconnue dans le Spath peſant.*

Le 19 Janvier 1795 Mr. l'Académicien Lowitz rapporta à la Conférence ce qui ſuit: J'ai découvert, il y a plus de deux ans, dans le Spath peſant, outre la terre ponderenſe (baryte), une autre terre qui lui eſt particuliere et tout-à-fait inconnue. Cependant, pour ne rien précipiter, je n'ai voulu communiquer cette obſervation à l'Académie que

que lorsque j'aurois fait une proviſion ſuffiſante de cette terre, pour être en état de l'examiner à fond. Or depuis peu j'ai eu la ſatisfaction de voir, par un excellent mémoire de Mr. Klaproth ſur la terre du Strontianite, inſéré dans les Annales de Chymie de Crell que la nouvelle terre, trouvée tout récemment dans le Strontianite ſi rare d'Ecoſse, eſt parfaitement analogue, dans toutes ſes propriétés, avec celle que j'ai trouvée dans le Spath peſant. Dès que jaurai fini mes recherches et expériences ſur ce ſujet, j'aurai l'honneur d'en préſenter le réſultat à l'Académie Impériale, dans un mémoire particulier plus circonſtancié.

II. *Sur deux manuſcrits de la Bibliothèque de Zaluski.*

Le 2 Mars 1795 Mr. de Bakounin expoſa deux manuſcrits de la Bibliothèque de Zaluski que S. M. l'Impératrice lui avoit ordonné de faire examiner par l'Académie. Le premier eſt écrit en langue Tamule ſur de feuilles oblongues de bambou. Le ſecond eſt un volume in 8vo, fort endomagé, d'une vingtainè de feuilles d'un papier de coton, dont les premieres contiennent une lettre écrite en langue Chaldéenne et les ſept dernieres la traduction latine de cette même lettre écrite en caractères difficiles à déchifrer dont la feuille ci-jointe repréſente un échantillon (Tab. I), et contient ce qui ſuit:

Exemplum infra ſcripte epiſtole rabi Iſmael magiſtri Sinagoge coloc ut miſsa Ieruſalem cuidam moiſi legis moſaice peritiſſimo anno ab initio III. VII. LXXXIII preſide

ſide pontio pilato judeae Tiberii caeſaris imperio que epiſtola ex caldea lingua in latinam per beatum jheronimum apud betheelem paleſtine translata fuit.

III. *Sur la dépuration de l'éther ſulfurique.*

Le 8 Juin 1795 Mr. l'Académicien Lowitz anonça à la Conférence d'avoir trouvé une méthode très ſimple de purifier parfaitement, par le moyen du muriate de chaux, l'éther ſulphurique, et de le dégager de l'eſprit de vin qui s'y trouve lié intimément, et que par ce moyen il a pouſsé la dépuration beaucoup plus loin qu'on n'a pu faire jusqu'ici. Mr. Lowitz promit de communiquer ſon procédé en détail à l'Académie, avec les expériences qu'il a faites ſur ce ſujet.

IV. *Sur la décompoſition du tartre par le muriate de chaux.*

Le 6 Octobre 1796 le même Académicien anonça préalablement d'avoir découvert, par des expériences, un moyen très profitable de décompoſer le tartre par le moyen du muriate de chaux, en ſorte que le contenu de l'acide tartreux en ſoit complettement ſéparé. Il ſe propoſe de communiquer quelque jour ſon procédé dans un mémoire particulier.

V. *Sur la viteſse des vibrations du ſon.*

Mr. *Sarti*, Maître de Chapelle de S. M. I. ayant préſenté à l'Académie le 12 Mai 1796 un mémoire *ſur le moyen de compter les vibrations des ſons et d'en comparer la célérité avec la meſure du tems:* le ſentiment de Mrs. les Académiciens, nommés pour examiner ce mémoire, avoit été en

en ſubſtance: que le moyen que Mr. Sarti y propoſe pour déterminer le nombre de vibrations que produit un ton quelconque eſt ingénieux, et que l'inſtrument qu'il a imaginé pour cet effet paroît être fort propre aux expériences à inſtituer pour cet effet; que l'idée de Mr. Sarti eſt analogue à celle que *Sauveur* avoit propoſé autrefois à l'Académie de Paris; mais que, les expériences de ce Savant n'ayant pas réuſſi, tandisque Mr. Sarti aſsûre en avoir fait en Italie avec un ſuccès décidé: il feroit à ſouhaiter que Mr. Sarti voulût communiquer à l'Académie les réſultats de ces expériences, ou bien les repéter en préſence de l'Académie, afin de pouvoir en comparer les réſultats avec ceux qu'on a tirés autrefois des expériences faites ſur les cordes, en calculant le nombre des vibrations par ſeconde, au moyen de la longueur, du poids et de la tenſion connues.

Mr. Sarti ayant été informé de ce déſir de l'Académie, il s'offrit obligeamment de repéter ſes expériences devant la Conférence, auſsitôt que ſes occupations le lui permettroient, et il ſe rendit à l'invitation de l'Académie le 8 Octobre, où il expoſa, dans une aſsemblée extraordinaire, ſon appareil de tuyaux d'orgue et en démontra l'uſage, en faiſant diverſes expériences tendant à déterminer la viteſse abſolue des vibrations. Ces expériences réuſsirent parfaitement à la ſatisfaction de toute l'Aſsemblée. L'appareil imaginé par Mr. Sarti eſt compoſé de deux tuyaux d'orgue de 5 pieds, poſés ſur leur ſommier, avec deux ſouflets et deux touches, afin de pouvoir faire reſonner chaque tuyau ſéparement, ou tous les deux à la fois, et puis d'un monocorde et d'un pendule à ſecondes. Le ton de chaque tuyau peut être hauſsé ou baiſsé au moyen d'une ouverture laté-

latérale pratiquée en haut, qu'on peut fermer plus ou moins, au moyen d'une lame mobile dans une couliſse. En commençant l'expérience les deux tuyaux ſont mis à l'uniſon; peu-à-peu on remonte la lame baiſsée de l'un des tuyaux, ce qui en fait hauſser le ton et produit une diſsonance qui eſt accompagnée de ſecouſses ou battemens faciles à ſaiſir. Ces battemens produiſent, lorsqu'ils ſont aſſez fréquens, un troiſième ton qui réſulte de la combinaiſon des deux autres, rendus par les deux tuyaux à la fois, et ſont l'effet des coïncidences des vibrations des deux autres tons ſimultanés. Ils ſont d'autant plus lents et d'autant plus faciles à compter que l'intervalle qui ſe trouve entre le rapport des vibrations des deux tons ſimultanés eſt plus petit. On trouve par le monocorde que lorsque les battemens répondent aux oſcillations du pendule à ſecondes les tons des deux tuyaux ſont dans le rapport de 100 à 99; et que par conſéquant le plus grave fait 90 vibrations et l'autre 100 vibrations par ſeconde ce qui détermine la viteſse abſolue d'un tuyau d'orgue de 5 pieds. Il réſulte de la comparaiſon de ce ton, faite par le moyen du monocorde, que le ton, ſur lequel on monte la corde $\bar{a}$ des violons de la chapelle de S. M. I. fait 436 vibrations par ſeconde ce qui étant connu il eſt facile de trouver le nombre des vibrations de tous les tons.

VI. *Sur les oſsemens d'un animal inconnu trouvés près d'Azof.*

Le 15 Décembre 1796 la Conférence reçut de la part de S. E. Mr. le Lieutenant Général de Levandinof la notice ſuivante: Le marchand de Charkof Ivan Boutenkof, en

en faiſant un voyage de commerce dans le Gouvernement de Ekatherinoſlav, aperçut à une diſtance de 70 Verſtes de la forterefse d'Azof, et à deux verſtes du banc de ſable rond, une partie du terrein de la côte escarpée emportée par l'agitation des flots de la mer qui a laiſsé à découvert les reſtes d'un animal inconnu d'une taille énorme, dont la tête git vers l'orient, à deux archines de l'eau. L'os maxillaire inférieur du poids de 30 livres, et quelques côtes qui ont plus d'$\frac{1}{4}$ d'archine de largeur, à demi petrifiés, ſe ſont détachés du reſte. On a trouvé au même endroit des fragmens de cornes auſsi pétrifiées et d'une grandeur déméſurée, ce qui lui a fait préſumer que les oſsemens mentionnés ſont de quelque bête à corne.

VII.

Rapports préſentés et lus dans les Conférences académiques.

I. *Sur un télégraphe nouveau.*

Mr. le Profeſseur *Parrot* ayant envoyé à l'Académie ſa déſcription d'un nouveau télégraphe, Mr. l'Académicien et Chevalier Krafft fut chargé de la lire et d'en dire ſon ſentiment, c'eſt ce qu'il fit dans un rapport préſenté le 8 Octobre 1795 et contenant ce qui ſuit: „L'auteur de ce mémoire donne de bons conſeils qui pourroient être utiles dans la conſtruction d'un télégraphe; mais quant à l'eſprit de la télégraphie je ne trouve rien de neuf dans ſon projet, ſi j'en excepte quelques modifications des principes connus, qui pareillement pourroient être avantageuſes. Il ſeroit

 poſſi-

poſſible que moyennant ces modifications le télégraphe de Mr. Parrot ſignalât plus vite que le télégraphe françois, mais aux dépens de la ſûreté, bien autrement importante que la célérité. Les raiſons qui me portent à croire le télégraphe de Mr. Parrot moins ſûr que le télégraphe françois ſont: 1°) que ſes ſignaux ſont ſujets à être méſentendus de celui qui doit les lire et transmettre; 2°) que pour chaque conſonne il lui faut deux ſignes conſécutifs qui, rendus ſeuls, ſignifient chacun une voyelle, et que pour marquer cette liaiſon il a beſoin d'un troiſième ſigne qui ſuit les deux premiers. Sa maniere d'éclairer les ſignaux eſt auſſi fort compliquée: il lui faut des lampes d'Argand, des réverbères, et même de l'air déphlogiſtiqué, lorsque le tems eſt obſcur et nébuleux. Je remarque ceci, ſans en faire un point d'objection, et en ajoutant que cette maniere d'éclairer étant catoptrique, elle eſt néceſſairement plus foible que ne feroit l'illumination dioptrique des ſignaux. Quoiqu'au reſte une combinaiſon des moyens télégraphiques de l'auteur avec la télégraphie françoiſe pourroit être avantageuſe, je ne vois pas que dans les points eſſentiels ſa machine ait une prérogative marquée ſur le télégraphe connu, à moins que, renonçant à la ſûreté des ſignaux, on n'ait en vue de ſignaler plus vite, ce qui paroît devoir être rarement le cas.“

II. *Sur un projet de diriger les ballons aëroſtatiques.*

Mr. le Directeur ayant demandé le 9 Mars 1795 l'avis de la Conférence ſur un écrit anonyme reçu de Grodno, relatif à un moyen de diriger les ballons aëroſtatiques, à l'aide d'une plaque de ſer adaptée à la carcaſſe et d'un

gros

gros aimant placé au bout d'un timon mobile autour d'un pivot. Comme un projet de cette nature n'exigeoit pas un examen profond et appuyé de calculs: la Conférence expédia tout de ſuite ſon avis conçu en ces termes: „Meſsieurs les Académiciens ayant lu le projet d'un anonyme pour diriger à volonté le mouvement progreſſif des ballons aëroſtatiques par le moyen d'un gros aimant, ils ont trouvé que quand même il en réſulteroit un petit balancement du ballon autour de ſon axe, ce qui ſuivant l'arrangement que l'anonyme propoſe, eſt encore fort douteux, le mouvement progreſſif du ballon ſuivant la direction des courans d'air n'en ſauroit en aucune façon être altéré, vu que le mécanisme projetté ne produit aucune force latérale capable de changer la direction du mouvement à volonté.

III. *Sur le projet d'une écluſe au pas de Trollhätta et d'un pont ſur la riviere Götha-elf.*

Mr. de *Ljungberg*, ci-devant Officier du Génie au ſervice de S. M. le Roy de Suède, s'étant préſenté a la Conférence, avec la permiſſion de Mr. le Directeur, le 16 Avril 1795, il fit à M^rs les Académiciens aſsemblés un expoſé détaillé et raiſonné de quelques plans hydrotechniques relatifs à deux projets de conſtruction; l'un d'une écluſe de de 42 pieds de hauteur au pas de Trollhätta, pour élever les batteaux à la hauteur du torrent; l'autre d'un pont à trois arches, chacune de 15 toiſes d'ouverture, à conſtruire ſur la riviere Götha-Elf, à Konghel dans la province de Bohus. Les mémoires et les deſsins de Mr. Ljungberg furent remis à Mr. l'Académicien Fuſs qui, le 20 Avril ſuivant en fit ſon rapport, (auquel les autres Académiciens de la

Claſse accèderent) de la maniere ſuivante: "J'ai lu le projet de conſtruction d'une écluſe au pas de Trollhätta et d'un pont à trois arches ſur le Gotha-Elf, préſenté à l'Académie par Mr. de Ljungberg. Ces projets ſont hardis et leur exécution pourroit trouver de grandes difficultés que je ne crois pourtant ni inſurmontables, ni même ſupérieures aux reſsources d'un Ingénieur habile tel que Mr. de Ljungberg, dont les connoiſsances théorétiques et pratiques ſont très propres à inſpirer de la confiance à tous ceux qui, faute de connoître le local, ne ſont pas mieux que moi en état de porter un jugement déciſif ſur toutes les parties de ces projets, et qui ſont obligés de s'en tenir uniquement aux principes généraux expoſés dans le mémoire, principes qui me paroiſsent très ſolides et dignes de l'attention du gouvernement, en faveur duquel ces projets ont été conçus."

IV. *Sur une machine pour mâter les vaiſseaux.*

Mr. le Major Polef, Quartier-maître de l'Etât-Major, ayant fait préſenter le 7 Septembre 1795 la déſcription d'une machine pour élever de grands fardeaux à une hauteur conſidérable, et particulierement propre à mâter les vaiſseaux, en priant l'Académie de lui en dire ſon ſentiment: Mrs les Académiciens Kotelnikof et Roumovski furent chargés d'examiner le mémoire de Mr. Polef, et le rapport qu'ils en firent à la Conférence contenoit en ſubſtance ce qui ſuit: „L'auteur tâche de démontrer par des calculs numériques qu'au moyen de ſa machine on peut mâter un vaiſseau en moins de tems et avec moins de bras qu'on ne fait au moyen de la machine uſitée; car d'après ſon comput 12 hommes peuvent mâter un vaiſseau en 8 heures, tandis que

moyen-

moyennant la machine ordinaire 250 hommes employent 24 heures à ce travail. A travers l'obſcurité qui regne dans l'expoſé de ce calcul on n'entrevoit que des principes en partie faux, en partie dubieux, qui le rendent erroné d'un bout à l'autre. Cependant comme la machine de Mr. Polef eſt une combinaiſon de plus de machines ſimples que celle dont on ſe ſert ordinairement dans la mâture, il peut en réſulter un avantage du côté de la force, mais cet avantage ne compenſe pas l'extrême lenteur, avec laquelle, contre l'opinion de l'auteur, le fardeau feroit élevé."

V. *Sur la triſection de l'angle de Mr. Pizzati.*

Le 10 Décembre 1795 l'Académie reçut, de la part de Mr. l'Abbé *Pizzati* à Veniſe, un mémoire imprimé dédié à l'Académie, ſous le titre: *Diſſertazione ſulla triſezione dell'angolo, oſsia del arco, colla piana Geometria* etc. Comme l'auteur ſoumet ſa ſolution de ce problème à l'approbation de l'Académie, Mr. l'Académicien Fuſs fut chargé de l'examiner et d'en dire ſon ſentiment à la ſéance ſuivante, c'eſt-ce qu'il fit par la lecture d'un rapport conçu en ces termes: „D'après la conſtruction géométrique, par laquelle Mr. l'Abbé Pizzati prétend avoir rigoureuſement réſolu le problème de la Triſection de l'angle il faudroit que $\cos\frac{1}{3}\Phi = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}(2-\sqrt{3})\cos\Phi$, où Φ marque l'angle à triſéquer. Cette expreſſion eſt vraye lorsque $\Phi = 0$ et $\Phi = 90^\circ$. Dans tous les autres cas elle ſe s'écarte ſenſiblement de la vérité; car

Pour

Pour	$\Phi = 15°$	on auroit	$\frac{1}{3}\Phi = 5°, 29'$
—	$\Phi = 30$	— —	$\frac{1}{3}\Phi = 10, 52$
—	$\Phi = 45$	— —	$\frac{1}{3}\Phi = 16, 6$
—	$\Phi = 60$	— —	$\frac{1}{3}\Phi = 21, 5$
—	$\Phi = 75$	— —	$\frac{1}{3}\Phi = 25, 45$

D'où l'on voit que la conſtruction de Mr. Pizzati, loin d'être rigoureuſement vraye, comme il s'imagine, n'approche pas même autant de la vérité que pluſieurs conſtructions empiriques connues et aſsez ſimples de ce problème. J'en connois une, où la faute pour l'arc de 45°, qui eſt ici de 1°, 6′, ne monte qu'à 29 ſecondes.

Les deux démonſtrations que l'auteur donne de ſa conſtruction ſont donc néceſsairement vicieuſes. Auſſi quiconque ſe donnera la peine de les examiner, y découvrira ſans peine, dans l'une et l'autre, une petition de principe rien moins que ſubtile. Outre ce vice de raiſonnement les deux démonſtrations ont encore le défaut de ne tenir aucun compte du point d'où l'on tire la ligne triſécante, ce qui eſt pourtant le point eſsentiel de la conſtruction."

VI. *Sur un mouvement prétendu perpétuel.*

Le 19 Mai 1796 l'Académie reçut de la part de S. E. Mr. le Général-Major *Popof* un écrit intitulé: *Selbſt-Beweg-Maſchine, von Joh. Friedr. Heinle, nebſt Bemerkungen*, envoyé par ordre de SA MAJESTÉ IMPÉRIALE, pour être examiné par l'Académie. Quoique l'invention d'un mouvement perpétuel implique déjà par ſa nature une impoſſibilité, la Conférence chargea Mrs. les Académiciens

Krafft

Krafft et Fuſs d'en donner leur ſentiment par écrit, pour être communiqué à Mr. le Général de Popof. L'eſsentiel du ſentiment, porté par ces deux Académiciens, eſt: 1°) Que la machine de Mr. Heinle ne diffère en rien d'eſsentiel de celle dont le Journal des Sçavans de 1695 a fait mention et qui a déjà été refutée par Jean Bernoulli; 2°) que le projet de Mr. Heinle ne ſauroit ſoutenir un examen rigoureux d'après les principes les plus ſolidement établis de la Statique et de la Dynamique des corps ſolides et fluides; vu qu'en appliquant ces principes à la machine en queſtion, ils conduiſent aux réſultats ſuivans:

a) Que la machine, envifagée comme iſolée et ſans en faire le principe moteur pour d'autres mécaniſmes, dans la ſuppoſition d'un concours des circonſtances les plus favorables, qui n'a jamais lieu dans la pratique, pourroit tourner autour de ſon axe et conſerver pendant un petit eſpace de tems un mouvement de rotation; mais

b) Que cette rotation, ſuppoſé qu'elle eut lieu, ſe convertiroit bientôt, et ſans que des obſtacles *externes* s'en melaſsent, en un ſimple mouvement oſcillatoire de peu de durée.

c) Que dans des ſuppoſitions moins favorables mais plus conformes à la nature et à l'expérience, le mouvement de la machine ſe reduit, dès le commencement, à de ſimples balancemens de peu de durée.

d) Que par conſéquent, la machine n'étant, dans aucun cas poſſible, capable de ſe mouvoir d'elle même pendant un intervalle de tems tant-ſoit-peu conſidérable, elle ne ſçauroit être employée comme force motrice, ni produire aucun

des

des effets étonnans que l'auteur en promet avec une emphaſe qui prouve bien plus la vivacité de ſon imagination que la ſolidité de ſes connoiſsances mécaniques.

VII. *Sur un enduit pour la vaiſselle de cuiſine.*

Mr. le Baron de *Meidinger* ayant envoyé, avec le mémoire manuſcrit préſenté de ſa part le 21 Mars 1796, une petite caſserole de cuivre couverte en dedans, au lieu de l'étamure, d'un enduit ou vernis de ſon invention: la Conférence remit la caſserole et le mémoire à Mr. l'Académicien Lowitz et le chargea d'examiner ſi cet enduit eſt auſſi durable et auſſi peu nuiſible à la ſanté que l'auteur le prétend. Voici le rapport que Mr. Lowitz en a fait:

„ L'enduit de couleur d'imprimérie de la caſserole de Mr. Baron de Meidinger a tenu ſi mal qu'après avoir laiſsé bouillir du vinaigre dans ſa caſserole pendant une demiheure ſeulement, les parois en étoient presqu'entierement à découvert. Le vinaigre avoit pris, des particules détâchées du vernis, une couleur noirâtre et montroit des indices d'une diſsolution de cuivre. Comme le vernis s'étoit mieux conſervé au fond du vaſe, j'y fis bouillir de l'huile d'olive, et auſsitôt que celle-ci commença à jetter des vapeurs, le vernis ſe détâcha auſsi en partie au fond de la caſserole.

J'eſsayai moi-même d'enduire de ce vernis deux caſseroles de cuivre, ſelon les préceptes de Mr. de Meidinger, mais malgré pluſieurs tentatives et toutes les précautions imaginables, je ne pus jamais réuſsir à éviter les bourſouflures que la cuite faiſoit naître dans ce vernis. Ayant en-

fin

ſin verniſsé mes caſseroles le moins mal que poſſible, j'y ſis bouillir ſuccesſivement du vinaigre, du lait et de l'huile, et malgré les bourſouflures mon enduit ſe trouva être plus durable que celui de Mr. de Meidinger; car il ne s'en détacha qu'aux endroits où s'étoit formé des enlevures. Même en écurant mes vaſes avec du ſable et de la potaſse, l'enduit n'en parût point avoir ſouffert ſenſiblement. J'attribue cette grande différence entre la durée du vernis de Mr. de Meidinger et du mien au différent degré de la cuite. Or comme il eſt très difficile d'obſerver exactement le degré convenable de cette cuite et d'éviter entierement les enlevures de ce vernis: je crois que ſon introduction et ſon uſage ſont ſujets à beaucoup de difficultés."

VIII. *Sur la triſection de l'angle de Mr. Triſchkévitſch.*

Le 19 Septembre 1796 l'Académie reçut une ſeconde prétendue ſolution de ce problème autrefois ſi fameux, de la part de Mr. le Lieutenant Tychkévitſch, avec une repréſentation, par laquelle l'auteur prétend au prix propoſé, ſelon ſon opinion, ſur la découverte de la triſection. L'Académie lui fit répondre qu'un tel prix n'exiſtoit pas, qu'elle ſera cependant examiner ſon mémoire et qu'elle lui communiquera ſous peu le jugement qui en aura été porté.

Un rapport de Mr. l'Adjoint Gourief qui avoit été chargé de cet examen, fit voir que cette triſection ne mérite aucune attention, parcequ'elle eſt ſondée ſur une ſuppoſition abſolument fauſse et contraire aux premieres notions de la Géométrie élémentaire.

IX. *Premier rapport de Mr. Pallas.*

Mr. la Conſeiller d'Etat et Chevalier Pallas ayant quitté St. Pétersbourg le 12 Août 1795, pour aller s'établir en Tauride, comme il a été dit plus haut: il envoya à l'Académie ſon premier rapport daté de Symphéropol le 22 Décembre. Ce rapport, écrit en allemand, contient ce qui ſuit:

„Je puis enfin anoncer à la Conférence académique mon heureuſe arrivée en Tauride, après pluſieurs empêchemens occaſionnés d'abord par les courſes nécesſaires pour me mettre en posſesſion des terres qui m'ont été très gracieuſement accordées et pour y arranger mon économie, et dans la ſuite par des accès violens nephritico-haemorrhoïdaux.

J'arrivai de Moſcou à Ekathérinoslav par un chemin nouveau très commode, très agréable et de plus de cent verſtes plus court que le chemin de poſte menant par Koursk et Toula. Ce nouveau chemin paſse par Kolomna, Michaïlof, Voroneſh, Oſtrogoshk et Izoum, le long de la Samara jusqu'à Ekathérinoslav. De là j'arrivai en Tauride par Nicopol et Pérécop.

Dans les belles et fertiles plaines du Gouvernement de Voronesh, ſurtout le long de l'Oskoll, dont je ſuivis le cours, je trouvai encore de jolis reſtes de la belle végétation de ces contrées, parmi lesquels ſe rencontra mainte plante inattendue de Sibérie, comme entres autres *Scutellaria lupulina*, *Polygala Sibirica*, *Onosma ſimplex*, *Pedicularis incarnata*, *Campanula lilifolia*, etc. Je découvris auſſi le long du ruiſseau Biryoutch une nouvelle eſpèce de *Sal-*

ſola

ſola, ſort approchante de la *Salſola muricata* qui n'a encore été obſervée d'aucun de nos voyageurs botaniſtes. La rive droite de l'Oskoll (dans les bois de laquelle croît en abondance le roſier ſauvage pomiſere que je n'ai vu nulle part en Ruſſie) eſt la plus élevée et conſiſte en collines calcareo-marneuſes qui s'étendent jusqu'au Donetz. La rive gauche eſt une plaine ſouvent très ſablonneuſe. Le long du Donetz, dont les rives au deſsus de l'Oskol ſont auſſi montagneuſes, on voit au deſsous de l'embouchure de cette riviere alternativement des montagnes de craye qui accompagnent la rive droite méridionale du Donetz jusqu'au Don, et il s'y préſente le monaſtère de Sviätogorsk taillé dans la craye. La rive gauche du Donetz depuis l'Oskol jusqu'au Don eſt une plaine ſablonneuſe non-interrompue.

Outre les charbons de terre déjà découverts et les mines de fer ſur la riviere Lugan, où l'on ſe propoſe d'établir une fonderie de canon, les pays montagneux le long du Donetzk et de Slavensk ſemblent promettre encore beaucoup de découvertes minéralogiques. Mais les mines d'argent qu'on s'y étoit promis, ſeduit par de fauſses épreuves faites ſur du plomb, n'ont été que de la manganèſe, et on ne peut s'attendre dans ces contrées qu'à de pauvres mines à couche. Les couches les plus communes ſont de la craye, du marne calcaire et du ſchiſte argilleux, et rarement du grès.

Ces couches ſe coupent à la Samara qui ſe jette dans le Dnepr. Entre ces deux rivières le pays eſt plat et conſiſte en partie en terrain ſalé. Ici, comme dans tout le cercle de Donetzk on trouve abondamment ces monceaux de terre garnis de ſtatues qui couvrent les tombes d'une

nation encore indéterminée. A en juger d'après le coſtume des deux ſexes et la phyſigonomie ſouvent très reconoiſſable de ces ſtatues on pourroit les attribuer à une nation Mongale. peutêtre aux Huns; leurs façes ſont toutes tournées vers l'Orient. Depuis une douzaine d'années on a emmené celles de ces ſtatues, qui étoient les mieux travaillées et conſervées, pour les placer aux coins des rues. dans les jardins des Slobodes et même dans Ekathérinoslav.

Sur le Dnepr, aux environs de Ekathérinoſlav, fuit un terrain ſablonneux, et l'on voit clairement que ce ſable doit ſon origine au granite en couches, rougeâtre et gris qui traverſe le Dnepr en couches inclinées et perpendiculaires et qui cauſe les cataractes de ce fleuve, et tient la même direction avec les roches granitiques de la plaine élevée entre la Berda et Moloshnye-Wody, de même qu'avec celles qu'on trouve ſur l'Ingoul et le Boug, vers Eliſabeth, qui ſont voir les mêmes caractères, la même alternation des couche, et la même diſpoſition à ſe décompoſer en gravier et à la fin en ſable.

Sur les roches granitiques qui forment la rive du fleuve auprès des cataractes on trouve quelques jolies plantes alpeſtres et bien d'autres qui ſont propres à ces contrées. A la fertilité en bleds et en pâturage que j'avois trouvé cette année dans tout le gouvernement de Ekathérinoslav, je vis ſuccéder, dans les déſerts de Pérékop et dans toute la Tauride, un ſol brulé et une ſtérilité complette, occaſionnée par la ſècherefſe et les vents d'Eſt. Mais l'hyver pluvieux, doux et humide de cette année nous promet un riche dédommagement pour l'année prochaine.

N'ayant

N'ayant jusqu'apréſent rien reçu de mes effets et manuſcrits, partis de St. Pétersbourg au mois d'Août, pas même de leurs nouvelles: je ne puis, dans ce moment, rien envoyer pour les Actes; mais dès que je les aurai reçu, je ne différerai pas de m'acquitter de ma promeſse et d'être à l'avenir un collaborateur aſſidu.

Symphéropol le 22 Décembre 1795.

P. S. Pallas.

VIII.

Leçons publiques.

Les leçons publiques en langue Ruſse, que l'Académie s'eſt engagée à faire donner régulierement tous les ans pendant les quatre mois d'été, ſelon une inſtitution qui date des premieres années de la direction de M[e] la Princeſse Daſchkof, furent auſsi données dans les deux années dont nous venons de rapporter les principaux évènemens.

En 1795. Les mêmes Académiciens et Adjoints qui s'étoient chargés l'année paſsée de cette tâche, s'en acquittérent auſſi cette année-ci. Mr. le Conſeiller de Cour Kotelnikof donna un cours de Mathématique; Mr. le Conſeiller de Cour et Chevalier Ozeretskovski un cours d'Hiſtoire naturelle; Mrs. les Adjoints Kononof et Zacarof le premier un cour de Phyſique expérimentale et le ſecond un Cours de Chymie expérimentale d'après Lavoiſier.

En 1796. Mrs. les Conſeillers de Cour Kotelnikof et Chevalier Ozereiskovski donnérent leurs cours de Mathématique et d'Hiſtoire naturelle; Mr. l'Académicien Severguine

guine un cours de Minéralogie générale et Mr. l'Adjoint Courief un cours de Phyſique expérimentale.

IX.
Ouvrages publiés par l'Académie.

Sans faire ici une énumération de pluſieurs traductions de livres utiles, ni des ouvrages périodiques et de différens récueils dont l'Académie avoit à publier les continuations, comme par exemple celle de la Bibliothèque ancienne Ruſse (Продолженіе древней Россійской Вивліоѳики); des Ежемѣсячныя сочиненія; des Calendriers géographiques et hiſtoriques; etc. il a paru en ouvrages proprement académiques

1°) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Tomus IX. Petropoli 1795.

Ce volume contient, outre l'Hiſtoire de l'année 1791 et un ſupplément de quatre mémoires de ſavans étrangers, dix-ſept mémoires de Mathématique et de Phyſico-Mathématique, cinq mémoires de Phyſique et quatre mémoires d'Aſtronomie et de Météorologie.

2°) Tableau phyſique et topographique de la Tauride, tiré du Journal d'un voyage fait en 1794. Par P. S. *Pallas.* St. Pétersbourg 1795.

Ce mémoire, lu en Conférence le 29 Janvier 1795, avoit d'abord été deſtiné pour les actes; mais comme l'auteur avoit ſouhaité de le voir imprimé encore avant ſon départ, afin de pouvoir en ſoigner lui-même la correction: l'Académie le fit publier ſéparément, ſe reſervant de le faire inſérer auſſi dans le volume prochain des *Nova Acta*, pour ne

pas

pas ſouſtraire à cette collection une pièce ſi propre à en faire un ornement.

X.

Prix adjugés.

Nous avons rendu compte, dans l'Hiſtoire de l'année 1794, page 53, du jugement que l'Académie avoit porté ſur le ſeul mémoire qu'elle avoit reçu ſur la queſtion concernant l'état magnétique de la terre. L'auteur de ce mémoire après avoir été averti par le programme publié au commencement de l'année 1795, qu'on lui eut adjugé la moitié du prix, avoit demandé par une lettre anonyme du 28 Avril une prolongation du terme jusqu'au 31 Décembre, afin de pouvoir envoyer un ſupplément à ce mémoire, par lequel il comptoit de pouvoir ſatisfaire pleinement les déſirs de l'Académie et aſpirer au prix entier. Cette prolongation lui ayant été accordée, le Secrétaire reçut peu de tems après une lettre de Mr. Kratzenſtein, datée de Friedrichsberg près de Copenhague le 9 Juin, lequel, après s'être anoncé comme auteur du mémoire couronné, rapporte les détails du terrible incendie qui a conſumé, avec une grande partie de la ville, ſa maiſon, ſa bibliothèque, ſes manuſcrits et ſes inſtrumens. Dans cette triſte poſition il prie l'Académie 1°) de lui envoyer, ſoit la moitié du prix, ſoit le prix entier, comme elle le jugera apropos après les explications qu'il lui avoit données dans ſa lettre précédente anonyme; 2°) de différer l'impreſſion de ſon mémoire, jusqu'à ce qu'il ait eu le tems de lui faire parvenir les additions qu'il ſe propoſe d'y faire. La mort qui termina peu après la carrière de ce ſavant eſtimable,

mable, a privé l'Académie de ces additions qui devoient ſuppléer à ce qu'elle avoit trouvé d'imparfait dans le mémoire en queſtion.

Sur la queſtion indéterminée de Mécanique propoſée pour l'an 1795 et rapportée dans l'hiſtoire de l'année 1794, page 54, l'Académie a reçu, dans le courant de cette année, huit mémoires, dont aucun n'a répondu entierement à ſon attente, mais dont trois ont mérité préférablement ſon attention, ce qui a déterminé la Conférene à partager le prix entre deux de ces mémoires et à accorder au troiſième les honneurs de l'*acceſsit*.

Le premier de ces trois mémoires, côté No. 2, avec la déviſe: *Quam pulchra experientiae et rationis harmonia!* ſous le titre: *Abhandlung vom geraden und ſchiefen Stoſse oder Wiederſtand flüſsiger Körper, nach welcher die Verſuche mit den theoretiſchen Grundſätzen richtig übereinſtimmen*, contient des recherches neuves et eſtimables. L'auteur a trouvé pour le choc directe et oblique, ſoit que le plan repoſe ou qu'il ſe meuve, des formules dont l'accord avec les réſultats de pluſieurs expériences judicieuſement inſtituées prévient en faveur de ſa théorie. Il a ajouté à ces recherches la ſolution de pluſieurs problèmes relatifs à ce ſujet, et finit ſon mémoire par l'application de ſes principes à la théorie des moulins à l'eau et au mouvement des corps mus dans l'air.

Pour encourager l'auteur à continuer et à perfectionner ſes recherches l'Académie lui a adjugé, dans ſa ſéance du 24 Mars 1796, la moitié du prix ſtipulé. Le billet décache-

cacheté a nommé Mr. *Fréderic Guillaume Gerlach*, Profeſſeur de Philoſophie et de Mathématique à l'Académie Impériale et Royale des Ingénieurs à Vienne en Autriche.

Le ſecond mémoire, côté No. 8, a pour titre: *Abhandlung und Angebung, wie mit neu erſundenen Luftwechſel-Maſchinen die auf Bergwerken ſeyende böſe Wetter überall wegzuräumen ſind: aufgeſetzt von Karl Wilhelm Böbert, Oberſteiger auf dem Königl. Preuſsiſchen Bergwerk zu Rothenburg an der Saale.* Quoique l'auteur de ce mémoire ſe ſoit nommé, contre la regle que l'uſage préſcrit, afin d'éviter tout ſoupçon de partialité, et quoique Mr. Boebert ne ſoit pas le premier inventeur de cette machine; en conſidérant que le nom de l'auteur a été jusqu'ici parfaitement inconnu et qu'il a perfectionné la machine déjà connue dans pluſieurs de ſes parties: l'Académie lui a adjugé l'autre moitié du prix en guiſe d'encouragement.

Quant au troiſième mémoire, côté No. 4, avec la déviſe: *Semper plus ultra*, et le titre: *Beſchreibung einer neuen Maſchine, vermittelſt welcher man die gröſseſten Provinzen in ſehr kurzer Zeit und mit ſehr wenigen Koſten meſsen, und welche am ſchicklichſten mit dem Namen eines geometriſchen Wagens belegt werden kann*, l'Académie, en rendant justice aux connoiſances de l'inventeur de la machine ingénieuſe et théorétiquement juſte, dont la conſtruction et l'uſage ſont décrits d'une maniere claire et préciſe dans ce mémoire, a trouvé à ſon regret: que cette machine qui, pour remplir entierement le but de l'auteur, ne ſauroit être de beaucoup ſimplifiée, eſt tellement compliquée, et compoſée de parties ſi délicates, qu'elle coûteroit une ſomme conſidérable et ne

réſiſteroit que peu de tems aux ſecouſses violentes et inévitables de la voiture cahottée ſur des chemins rudes et difficiles; que l'exécution n'en ſauroit être recommandée; mais que l'auteur mérite qu'on faſe de ſon mémoire une mention honorable.

Les autres mémoires côtés No. 1, 3, 5, 6, 7 furent mis au rebut et les billets cachetés brulés ſelon l'uſage.

Sur la ſeconde queſtion, concernant les parties conſtituantes de la leſſive du ſang, l'Académie n'a reçu aucun mémoire.

EX-

EXTRAITS
DES MEMOIRES
CONTENUS
DANS CE VOLUME.

g 2

CLASSE MATHÉMATIQUE
ET
PHYSICO - MATHÉMATIQUE.

I

Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamſi nulla via pateat variabiles a ſe invicem ſeparandi.

Auctore *L. Eulero*, pag. 3.

On conçoit bien, et le nom de l'auteur en eſt garant, qu'il n'eſt point queſtion ici de ces équations difficiles à ſéparer, dont on peut, pour ainſi dire, déviner les intégrales, ni des intégrales particulieres de pareilles équations. Ce ſeroit à la verité un ſujet fecond, mais peu utile, que d'imaginer d'équations inſéparables dont on pût déviner l'intégrale algébrique complette, ou trouver quelque intégrale particuliere. On ſçait, par exemple que ſi M, N, P, Q, S et V déſignent des fonctions de x et y, et que $\partial V = M\partial x + N\partial y$, l'équation finie $V = 0$ ſatisfait à l'équation différentielle $\partial x(PV + MS) + \partial y(QV + NS) = 0$, mais que cette fonction V, qu'il ſeroit facile de trouver pour chaque équation propoſée, n'en ſeroit qu'une intégrale particuliere.

L'in-

L'intention de feu Mr. Euler a été de produire dans ce mémoire des équations différentielles qui ſe refuſent à toutes les méthodes d'intégration connues, et dont néanmoins on peut donner les intégrales complettes et même algébriques. Il déduit de pareilles équations, avec leurs intégrales algébriques, de l'équation différentielle connüe $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$ où $X = \alpha + 2\beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \varepsilon x^4$ et $Y = \alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4$, dont l'intégrale complette, qu'on peut encore repréſenter de différentes autres manieres, eſt

$$\frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{(2\lambda + \gamma + 2\delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2)},$$

λ étant la conſtante arbitraire introduite par l'intégration. Cette même équation eſt donc auſſi l'intégrale complette de l'équation différentielle

$$\partial x(\alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4) + \partial y(\alpha + \beta(x + y) + \gamma xy + \delta xy(x + y) + \varepsilon xxyy) = \lambda \partial y(x - y)^2$$

transformée de $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$, qui donne $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\sqrt{XY}}{Y}$, et d'où réſulte la précédente, en mettant à la place de X et Y leurs valeurs. C'eſt cette intégration qui ſert de fondement à ce mémoire et qui a fourni à feu Mr. Euler les exemples qui en ſont le ſujet.

II.

De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum ſint primi nec ne?

Auctore *L. Eulero* pag. 14.

Les diverſes méthodes que l'auteur donne dans ce mémoire, pour examiner de très grands nombres, s'ils ſont pre-

premiers ou non, ſont fondées ſur la propriété: que ſi un nombre N eſt de deux manières de la forme $\alpha xx + \beta yy$, il n'eſt pas premier. L'examen qui fait proprement le ſujet de ce mémoire eſt précédé de la démonſtration de différens théorèmes ſur la nature des nombres, qui, ſans être d'un uſage immédiat, ne laiſſent pas d'être dans une étroite liaiſon avec cette matière. Ces théorèmes ſont:

Si $N = \alpha a^2 + \beta b^2$ et $N = \alpha A^2 + \beta B^2$.

1°) Les nombres $aB + Ab$ et $aB - Ab$, après les avoir diviſé par les nombres qui ne peuvent pas être facteurs de N, donneront les deux facteurs de ce nombre N.

2°) Les nombres $\alpha a A + \beta b B$ et $\alpha a A - \beta b B$ auront avec le nombre N un commun diviſeur.

3°) Le nombre $\alpha p^2 + \beta q^2$, après avoir été diviſé ou par α, ou par β, ou par $\alpha\beta$, ou par une puiſſance quelconque de 2, contiendra toujours un facteur du nombre N, où $p = a \pm A$ et $q = b \pm B$.

4°) Le produit de deux nombres de la même forme $\alpha xx + \beta yy$ eſt toujours de la forme $\alpha\beta xx + yy$.

5°) Le produit de deux nombres, dont l'un eſt de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$ et l'autre de la forme $\alpha\beta x^2 + y^2$, ſera toujours de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$.

6°) Si un nombre non-premier eſt d'une ſeule façon de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$, on pourra aſsigner d'autres nombres non-premiers plus petits, qui ſeront auſſi d'une ſeule façon de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$.

7°) Si un nombre non-premier, quelque grand qu'il ſoit, eſt d'une ſeule façon de la forme $\alpha\beta x^2 + y^2$, on pourra aſſigner

ſigner d'autres nombres compoſés plus petits qui feront auſſi d'une ſeule façon de cette forme $\alpha\beta x^2 + y^2$.

De la derniere propoſition réſulte: que ſi aucun nombre non-premier, moindre que $4\alpha\beta$, n'eſt contenu dans la forme $\alpha\beta x^2 + y^2$, aucun nombre non-premier plus grand que $4\alpha\beta$ ne ſera contenu non plus dans cette forme. Deſorte que tout nombre qui eſt d'une ſeule façon de la forme $\alpha\beta x^2 + y^2$ ſera premier. La même choſe n'eſt pas vraye de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$, à moins qu'on ne donne à α et β certaines valeurs que l'auteur appelle nombres convenables (*numeri idonei*) et c'eſt à la recherche de ces nombres qu'il s'occupe dans le reſte de ce mémoire. Il en trouve, par des raiſonnemens, qu'il ſeroit trop long de ſuivre, 65 pareils nombres convenables qui le mettent en état d'examiner tout nombre, quelque grand qu'il ſoit, s'il eſt premier ou non.

III.

Reſolutio formulae Diophanteae $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$ per numeros rationales.

Auctore *L. Eulero*. pag. 45.

Dans le Tome XVII des nouveaux Commentaires feu Mr. Euler s'étoit occupé du problème de trouver quatre nombres A, B, C, D tels que $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, ce qui ſe reduiſoit facilement à trouver quatre nombres a, b, c, d tels que $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$; mais quoiqu'il eut trouvé alors deux ſolutions de ce probleme, les nombres en étoient devenus ſi immenſes, qu'on ne ſera pas étonné de voir qu'il ait repris dans la ſuite ce même problème, et que, ſelon ſa

ſa coûtume, il en ait rendu la ſolution plus parfaite et qu'il ait généraliſé ſes recherches ſur cette matiere.

La réſolution de l'équation expoſée dans le titre de ce mémoire, où m et n ſont des nombres donnés, conſiſte: à prendre à volonté un nombre q, à en déduire deux valeurs $\alpha = \frac{nqq}{nqq - m}$ et $\beta = \frac{m}{nqq - m}$, enſuite une valeur $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4\alpha - 1)^2}$ et $s = \frac{4\alpha - 1}{2}$, d'où l'on tire $p = q(1 + z)$ et $\frac{a}{c} = 1 + sz$, deſorte que a et c ſeront trouvés en entiers. Enfin on aura $b = cp$ et $d = aq$, et les quatre nombres a, b, c, d, ainſi trouvés ſeront tels que $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$.

Moyennant cette ſolution, en prenant $m = 1$ et $n = 1$ et $q = 3$, on trouve quatre nombres $a = 25$, $b = 291$ $c = 193$ et $d = 75$, qui ſatisfont à l'équation $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$; et comme, en mettant $a = p + q$, $b = p - q$, $c = r + s$, $d = r - s$, l'équation devient $p^4 + q^4 = r^4 + s^4$ on obtient quatre nombres $p = 158$, $q = 133$, $r = 134$, $s = 59$ qui ſont incomparablement plus petits que ceux que feu Mr. Euler avoit trouvés dans le XVII Tome des nouveaux Commentaires.

Ajoutons une propriété remarquable de l'équation $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$, c'eſt qu'en faiſant $A = (a + b) + (c + d)$; $B = (a + b) - (c + d)$; $C = (a - b) + (c - d)$; $D = (a - b) - (c - d)$, il y aura $AB(AA + BB) = CD(CC + DD)$.

IV.

Solutio problematis mechanici.

Auctore *L. Eulero.* pag. 64.

Un fil de longueur indéterminée eſt paſsé pluſieurs fois et tout entier autour d'un diſque circulaire; ſon extrémité

eſt attâchée dans un point, et plus bas, à une diſtance égale au rayon du disque, ſe trouve un plan incliné, ſur lequel on poſe le disque, de manière que lors qu'il deſcend en vertu de ſa péſanteur, il déroule par le bas le fil dont il eſt enveloppé. On demande ſon mouvement. Voici le problème dont ce mémoire contient la ſolution.

V.

De motu baculi ſuper plano inclinato, cui inſiſtit, deſcendentis.

Auctore *Nicolao Fuſs*, pag. 70.

Le bout d'un bâton inſiſte à un plan incliné, ſous un angle quelconque, mais dans un plan vertical paſſant par l'angle d'inclinaiſon du plan incliné et du plan horiſontal, et gliſse, toujours dans le même plan vertical le long du plan incliné. On demande ſon mouvement. C'eſt le problême dont Mr. Fuſs donne ici la ſolution, en déterminant, pour une poſition quelconque du bâton, le tems écoulé, l'eſpace parcouru et la preſſion. Ce problème fait ſuite de celui qu'il a traité autrefois dans le VIme Vol. des *Nova Acta*, où les deux extrémités d'un bâton gliſsent l'une le long d'un plan horiſontal, l'autre le long d'un plan vertical, dans un plan perpendiculaire aux deux plans mentionnés.

VI.

Examen théorétique des revêtemens à dos incliné et des revêtemens à aſsiſes inclinées, propoſées par quelques auteurs de fortification

par Mr. *N. Fuſs.* pag. 80.

La dépense énorme qu'exige la conſtruction des places fortes dont les ouvrages ſont revêtus de maçonnerie, a donné naiſ-

naiſsance à différens projets d'épargne. Quelques Ingénieurs, ſoutenant que les revêtemens de Vauban étoient beaucoup plus forts que ne l'exige la pouſſée des terres qu'ils doivent contenir, ont propoſé de faire les revêtemens moins épais que cet auteur claſsique prétend qu'ils duſsent l'être; d'autres ont propoſé d'incliner ou les aſsiſes, ou le dos du revêtement, moyennant quoi on ſeroit en état d'en diminuer l'épaiſseur encore d'avantage. Dans ce mémoire Mr. Fuſs examine ces trois idées ſelon les regles de la Statique. Il ſoumet premièrement les profils de Vauban à la déciſion de la Théorie et trouve que pour les hauteurs au deſsous de $47\frac{2}{5}$ pieds les revêtemens de ce grand Ingénieur ſont trop forts, et trop foibles pour les hauteurs au deſsus de $47\frac{2}{5}$ pieds. Il détermine l'épaiſseur au cordon et le talud que les loix de l'équilibre preſcrivent. Paſsant enſuite aux deux autres projets de conſtruction, il établit le point au delà duquel l'inclinaiſon ou des aſsiſes ou du dos du revêtement ne ſauroit aller; il en détermine l'épaiſseur et l'épargne qui en réſulteroit dans la quantité des matériaux et dans la main d'oeuvre. Ces déterminations ſont fondées ſur la ſuppoſition que les pierres ſoyent poſées ſimplement l'une ſur l'autre ſans mortier, et qu'elles réſiſtent par le ſeul frottement, deſorte qu'une maçonnerie à mortier médiocrement bonne, faite ſelon les dimenſions de l'auteur, aura une force de beaucoup ſupérieure à celle que demande ſtrictement la condition de l'équilibre, et ſuffiſante pour réſiſter à la pouſsée des terres qu'elle doit contenir.

VII.

Recherches ſur les équations linéaires aux différences partielles du troiſième degré.

Par Mr. *Jean Trembley*. pag. 101.

Le deſsein du celèbre auteur de ce mémoire eſt de faire voir jusqu'à quel point il eſt poſsible d'appliquer aux équations du troiſième degré la méthode qu'il a expoſée dans le mémoire inſéré dans l'Hiſtoire de l'Académie pour l'an 1791, et de rechercher les différences qu'entraine la nature particuliere des équations du troiſième degré.

Il conſidére l'équation $\Pi F:\Phi$, Π et Φ étant des fonctions quelconques de x et y et F le ſigne d'une fonction arbitraire. Il cherche par la différentiation $(\frac{\partial z}{\partial x})$, $(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})$, $(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y})$, $(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2})$, $(\frac{\partial^3 z}{\partial y^4})$ et multipliant réſpectivement les dix équations qui en réſultent par T, S, R, Q, P, N, M, L, ′K, F, et égalant ſéparément à zéro les coëfficiens de $F:\Phi$, $F':\Phi$, $F':\Phi$, $F''':\Phi$, il obtient une équation du troiſieme dégré et quatre équations de condition, trois en Φ et la IVe en Π, qui, en y ſubſtituant Φ', Φ'', Φ''', à la place de Φ dans les trois premieres, donneront dix équations, au moyen desquelles on détermine les quantités $\frac{T}{F}$, $\frac{S}{F}$, $\frac{R}{F}$, $\frac{Q}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{N}{F}$, $\frac{M}{F}$, $\frac{L}{F}$, $\frac{K}{F}$, et il reſtera une équation de condition à remplir, après quoi l'intégrale de l'équation du troiſième degré ſera $z = \pi\,(F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:\Phi''')$. Cette équation de condition détermine la relation entre Φ', Φ'', Φ''', pour que l'équation différentielle ſoit du troiſième degré, ayant pour l'intégrale

$$z = \Pi\,(F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:(\sigma:\Phi' + \varrho:\Phi'').$$

Le

Le même réſultat eſt confirmé par un autre procédé fondé ſur la voye un peu longue des éliminations.

L'auteur éclaircit ſa méthode, en l'appliquant à une équation traitée autrefois par Mr. le Marquis de Condorçet dans les Mémoires de l'Académie de Paris, et il parvient au même réſultat. Après quoi Mr. Trembley fait voir *a priori* et *a poſteriori* que l'équation $z = y \, F:(bx - y) + yy \, \Sigma:(x + y)$, que Mr. Monge propoſe dans les Mémoires de Turin, comme l'intégrale d'une équation différentielle du ſecond degré, ne l'eſt pas réellement, mais qu'elle eſt une intégrale incomplette d'une équation différentielle du troiſieme degré, et que pour la rendre complette il faut y ajouter le terme $y . f:(x + y)$.

Mr. Trembley fait enſuite l'application de ſes recherches à une équation traitée autrefois par feu Mr. Euler, dans le 3[e] Vol. de ſon calcul intégral, et à quelques autres cas particuliers.

VIII.

Eſsai de démontrer rigoureuſement un théorème fondamental des équations de condition de la différentielle des fonctions à pluſieurs variables et du calcul de variations.

Par Mr. *S. Gourieſ.* page 154.

L'auteur de ce mémoire ayant entrepris de démontrer le calcul différentiel dans toute la rigueur mathématique, ſans le ſecours des quantités infiniment-grandes et infiniment-petites, en ne faiſant uſage que d'accroiſsemens et décroiſsemens indéfinis, tels que les admettoient les anciens Géomètres, il a porté ſon attention auſſi ſur les équations de condi-

condition de la différentielle exacte des fonctions à deux et pluſieurs variables et au calcul de variation. Et ayant remarqué, dans les livres nouvellement mis au jour, que les Géomètres du premier rang commencent à éluder les infinis, il a cru que par le préſent mémoire il pourroit contribuer à ſon tour quelque choſe à dégager les mathématiques de plus en plus de l'employ de l'infini.

IX.

De polygonis ſymmetrice irregularibus circulo ſimul inſcriptis et circumſcriptis.

Auctore *N. Fuſs.* pag. 166.

Dans un mémoire antérieur à celui-ci, qui ſe trouve dans le Tome X des *Nova Acta*, l'auteur avoit réſolu le problème d'inſcrire à un cercle donné un quadrilatère, auquel on pût inſcrire un cercle, de même que le problème de trouver la diſtance des centres du cercle circonſcrit et inſcrit Ici il revient à cette matière et donne la ſolution des mêmes problèmes pour le Pentagone, l'Hexagone, l'Heptagone et l'Octogone. Mais n'ayant pu réuſsir avec les polygones irréguliers quelconques, il s'eſt borné à ceux qu'il appelle *ſymmétriquement* irréguliers, et qui ſont doués d'un diamètre paſsant par les deux centres et diviſant le polygone en deux figures ſemblables et égales.

X.

De evolutione ſectionum Cylindri.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 190.

Une ſection quelconque du cylindre eſt une *ellipſe*, à l'exception des cas, où le plan de la ſection eſt parallèle ou perpendiculaire à la baſe. Mais le cylindre étant roulé

lé, ou bien ſa ſurface étant développée ſur un plan parallèle à ſon axe, le développement d'une ſection elliptique du cylindre, produit une courbe remarquable à pluſieurs égards. Les propriétés de cette courbe, ſa quadrature qui convient avec celle d'un morceau du cylindre, et ſa rectification qui eſt égale à celle de l'ellipſe, ſont démontrées dans ce mémoire.

XI.

Solution de quelques problèmes remarquables de l'Analyſe indéterminée.

Par *C. F. Kauſler.* pag. 205.

Les problèmes d'Analyſe indéterminée dont Mr. Kauſler donne ici la ſolution ſont au nombre de deux

1°) K étant un nombre entier quelconque trouver les valeurs x et y qui rendent carré l'expreſſion $x^4 + Kx^2y^2 + y^4$.

2°) Trouver tous les nombres entiers contenus dans la formule $(N^2 - 4) Z^2 + n$, n et Z étant des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires.

Les amateurs de l'Analyſe de Diophante qui ſeront curieux de ſavoir de quelle manière ces problèmes ſont réſolus, ne manqueront pas de lire le mémoire même, auquel nous ſommes obligés de renvoyer.

XII.

Nova demonſtratio theorematis, nec ſummam, nec differentiam duorum biquadratorum biquadratum eſſe poſſe.

Auctore *C. F. Kauſler.* pag. 287.

Avant de démontrer le théorème qui fait le ſujet de ce mémoire, l'auteur prouve l'impoſſibilité de trouver deux nombres

nombres entiers x et y tels que x^2+y^2 et x^2-y^2 ſoyent à la fois des nombres carrés, après quoi il fait voir par un raiſonnement, auquel on pourroit peutêtre déſirer plus de développement, que jamais $x^4+y^4=z^4$. Voici ſon raiſonnement: Si $x^4+y^4=z^4$, il y a $x^4=(z^2+y^2)(z^2-y^2)$. Ainſi ce bicarré de x eſt un produit de deux facteurs et partant néceſsairement un produit de deux facteurs, bicarrés m^4n^4. Il y a en tout 19 ſuppoſitions qui rendroient $(z^2+y^2)(z^2-y^2)=m^4n^4$, mais qui toutes ſont ou abſurdes par elles mêmes ou impoſsibles en vertu du théorème précédent.

XIII.

Nova demonſtratio theorematis, nec ſummam, nec differentiam duorum cuborum cubum eſſe poſſe.

Auctore *C. F. Kausler.* pag. 245.

L'auteur commence par démontrer que $x-y$ et x^2+xy+y^2 ne ſauroient être des cubes à la fois. Enſuite il démontre que ſi T et W ſont des nombres entiers poſitifs, $9W^3+9W^2+3W$ ne ſauroit jamais être de la forme $T(T+1)$. Enſuite, comme dans le cas $x^3-y^3=z^3$, il y auroit $z^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, l'auteur fait voir que toutes les ſuppoſitions qu'on pourroit faire pour rendre le produit de ces deux facteurs un cube ou mènent à une abſurdité, ou ſont impoſſibles en vertu des deux théorèmes préliminaires.

CLAS-

CLASSE DE PHYSIQUE.

I.

Methodus nova potaſsinum carbonicum plene ſaturatum obtinendi, adjectis novis obſervationibus potaſsini acido carbonico imperfecte ſaturati naturam ſpectantibus.

Auctore T. Lowitz. pag. 257.

On connoît pluſieurs moyens d'obtenir le carbonate de potaſse parfaitement ſaturé d'acide carbonique: toutes ſe reduiſent à mettre en état de ſaturation parfaite la partie libre du carbonate de potaſse imparfaitement ſaturé d'acide carbonique, par l'addition d'une plus grande portion de cet acide; par exemple par l'expoſition d'une ſolution de carbonate de potaſse à l'air libre, ou dans un endroit où ſe trouvent des matières en fermentation; ou bien par la ſaturation immédiate avec le gaz acide carbonique tiré de la craye au moyen de l'acide ſulfurique; ou bien enfin par la deſtillation du carbonate d'ammoniaque ſur de la potaſse dépurée etc.

La nouvelle méthode que Mr. Lowitz décrit ici conſiſte au contraire à ſéparer du carbonate de potaſſe dépuré et incomplettement ſaturé, ſon excédent libre, ce qui peut ſe faire de deux manières.

1°) En verſant petit-à-petit dans une ſolution de potaſse purifiée, pendant qu'on la remüe fortement moyennant une ſpatule, du vinaigre deſtillé jusqu'à ce que le melange commence à montrer par l'eſſerveſcence que l'excédent du carbonate de potaſse eſt ſaturé; on obtient de cette manière, après l'évaporation et le refroidiſsement du fluide, un carbonate

nale de potaſse parfaitement ſaturé d'acide carbonique, qu'on peut délivrer de l'acétite de potaſse qu'il contient encore, par la répétition de la ſolution et de la criſtalliſation.

2°) La ſeconde méthode conſiſte à diſsoudre une quantité ſuffiſante de ſoufre dans une ſolution de potaſse dépurée doucement bouillante; à cryſtalliſer enſuite le fluide paſsé au filtre: et à délivrer enfin, par une criſtalliſation réitérée, les criſtaux obtenus, du ſulfure de potaſse qui leur adhère encore.

Les ſolutions de ce ſel employés pour la dépuration doivent être inſtituées toujours avec de l'eau froide, et l'évaporation effectuée au moyen d'une chaleur auſsi douce que poſſible, parcequ'une trop grande chaleur volatiliſeroit une portion de l'acide carbonique.

II.

Déſcription de la celèbre mine d'argent de Zméof aux monts d'Altaï en Sibérie.

Par Mr. *B. F. I. Hermann.* page 275.

L'auteur de ce mémoire obſerve d'abord que la nature même a diviſé les mines de Sibérie en trois grands départemens placés à de grandes diſtances l'un de l'autre. Le plus voiſin de l'Europe eſt celui de Cathérinebourg qui s'étend ſur toute la grande chaine des monts d'Oural; le ſecond, plus éloigné vers l'eſt, eſt celui de Kolyvan, auquel appartiennent toutes les mines des montagnes altaïques, ſéparées des monts d'Oural par des plaines immenſes; le troiſième enfin et le plus oriental eſt celui de Nertchinsk, dans la Daourie.

C'eſt

C'eſt dans le ſecond de ces départemens, celui de Kolyvan, que ſe trouve la celèbre mine de Zméof, connüe aux allemands ſous le nom de Schlangenberg. Elle eſt ſituée dans les montagnes qui forment les prémiers grandins occidentaux de cette grande grouppe connüe ſous le nom de monts d'Altaï, ſous la latitude de 51°, 9′ et la longitude de 79°, 49′, à compter du méridien de Paris.

Pour faire connoître cette riche mine de Zméof mieux qu'elle ne l'étoit jusqu'à préſent, Mr. l'Académicien Hermann donne ici cinq planches: ſavoir le profil perpendiculaire et les profils horiſontaux, tant à la ſurface qu'à la profondeur de 29, 37, 76 et 86 toiſes, et enfin la vüe de la mine, accompagnées d'une déſcription détaillée des roches, gangues et mines que cette celèbre montagne métallifére contient.

III.

Mirabil. Jalaparum hybridarum ulterius continuata deſcriptio.

Auctore *J. T. Koelreuter.* pag. 305.

Le celèbre auteur de ce mémoire continue à décrire ici les réſultats des expériences qu'il a faites en différens tems ſur la production de plantes mulets, par le mélange de diverſes eſpèces d'une même plante. C'eſt la troiſième ſuite et la continuation des expériences faites ſur l'accouplement de pluſieurs eſpèces du Jalap, depuis la 25me jusqu'à la 44e, comprenant la déſcription exacte et détaillée de toutes les variétés qu'ont produit ces accouplemens diverſifiés.

IV.

Cheirantus Tauricus deſcriptus ab *Joanne Lepechin.* pag. 336.

Mr. Lepechin donne ici la déſcription d'une plante tirée de l'herbier de feu Mr. l'Académicien Zoujef, trouvée en Crimée et appartenant au genre du Cheiranthus.

V.

Déſcription d'une nouvelle mine de cuivre nommée Achirite.

Par Mr. *B. F. J. Hermann.* page 339.

Il y a quize ans qu'on a vu en Sibérie pour la premiere fois une pierre verte que feu Mr. l'Académicien Ferber qui en avoit vu des échantillons, avoit pris d'abord pour une émeraude orientale et un autrefois pour un fluor. Mr. Hermann ayant tâché, pendant ſon ſéjour aux mines altaïques, de ſe procurer de cette prétendue émeraude, il apprit qu'un marchand Boukharien, nommé *Achir Mekhmed*, demeurant à Semipalatnaya, avoit apporté un jour des Kirgiſes un ſac rempli de ces pierres vertes qui, à la ſuite de eſsais faits dans un des laboratoires des minieres d'Altaï, ſe trouvèrent contenir une aſsez grande quantité de cuivre. La rareté extrême de ces pierres ne permettant pas de continuer les recherches, on ſe contenta d'avoir trouvé qu'au lieu d'être une véritable émeraude cette pierre n'étoit qu'une eſpèce de mine de cuivre, à laquelle en attendant on avoit donné le nom d'*Achirite*.

Ici Mr Hermann donne la déſcription détaillée de cette mine de cuivre en la faiſant connoître par rapport à ſa couleur, transparence, peſanteur, criſtalliſation, forme, lueur, caſsure, dureté, parties conſtituantes, propriétés au feu, uſage et lieu natal.

VI.

Déſcription d'une nouvelle eſpèce de canard et d'une variété de l'huitrier.

Par Mr. l'Adjoint *Sevaſtianof*. page 346.

La nouvelle eſpèce de canard dont Mr. Sevaſtianof donne ici la déſcription et le deſsin, a été faite d'après un exemplaire de la collection d'oiſeaux apportée par le Capitaine de la Flotte Billings de ſon voyage fait dans l'archipel ſitué entre le Kamtchatka et les côtes occidentales de l'Amérique. Comme ce Canard porte, dans le catalogue qui a été remis à l'Académie avec cette collection, le nom de *Anas Canagica*, l'auteur préſume que cette nouvelle eſpèce a été trouvée ſur l'île Canaga ou Kyktak, l'une des Aléoutes.

L'huitrier dont il eſt queſtion dans ce mémoire reſsemble parfaitement à l'huitrier commun, connû dans le ſyſtème ſous le nom de *Haematopus Oſtralega*, mais il en diffère par la couleur du bec, des pieds et de tout le corps. Il diffère de même de la variété que Bougainville a rencontrée en très grande quantité aux isles Malouines.

VII.

VII.

Rémarques ſur les différentes méthodes de rendre le fer malléable.

Par Mr. *B. F. J. Hermann.* page 352.

Le but de ce petit mémoire, qui doit ſon origine à quelques obſervations qui ont été communiquées à l'auteur, lors de ſon dernier voyage à Olonetz, eſt de faire voir que le fer devient malléable par des agens d'une nature toute différente, c'eſt-à-dire non ſeulement par l'action du feu, dont l'application à cet effet ſouffre pourtant une quantité de modifications, mais auſsi par l'air, et même par l'eau de mer.

VIII.

Déſcription de l'Acarauna longiroſtris, nouveau genre de poiſson, appartenant à l'ordre des torachiques.

Par Mr. l'Adjoint *Sevaſtianof.* pag. 357.

Dans une collection d'animaux du Bréſil, envoyés en 1791 du Portugal à feue l'Impératrice CATHERINE II. de glorieuſe mémoire, et remiſe par ordre de cette Souveraine à l'Académie, pour être conſervée dans ſon muſée, Mr. Sevaſtianof a trouvé le poiſson, remarquable par la forme ſinguliere de ſon corps dont il donne ici la déſcription et le deſsin. Ni Artedi, ni Linné, ni Bloch le plus moderne de tous les Ichtyologues, n'en ayant fait aucune mention, Mr. Sevaſtianof croit ne s'être point trompé, en faiſant de ce poiſson non ſeulement une nouvelle eſpèce mais même un nouveau genre, dont il établit ici les ſignes diſtinctifs.

IX.

IX.
De Oſsibus ligno incluſis.

Auctore *N. Ozeretskovski.* pag. 367.

L'hiſtoire du bois, comment et où il a été trouvé. Déſcription des os qui y ſont enfermés et repiéſentés ſur la planche XII. Conjecture et raiſonnemens ſur ce rare phénomène.

X.
De ſpeciebus ſyſtematicum genus Trichechi conſtituentibus.

Auctore *N. Ozeretskovski.* pag. 371.

Déſcription des eſpèces rapportées à ce genre par les auteurs des ſyſtèmes. La diſſérence des eſpèces les fait ſéparer en deux genres. La belle figure du Lamantin eſt ajoutée à ce mémoire, pour faire voir la différence entre celui-ci et la vache marine ou Morge.

XI.
Diſtribution méthodique des pierres de roche agrégées.

Par Mr. *Baſile Severguine.* page 376.

L'auteur de ce mémoire avoit déjà promis, dans un memoire antérieur qui ſe trouve dans le VIIe tome des *Nova Acta*, une diſtribution méthodique des pierres de roche aggrégées, en expoſant en même tems les raiſons qui l'ont engagé à prendre une route un peu différente de celle qui a été adoptée jusqu'ici. S'étant occupé depuis de l'examen ultérieur de ces pierres aggrégées, en les contemplant ſous tous les différens points de vue qui ont pu ſe préſenter, il a étudié en même tems avec attention les travaux des plus célèbres Minéralogiſtes qui ſe ſont occupés du même ſujet, et il a taché d'accorder les diſſérences qu'il a trouvé chez plu-

pluſieurs ſavans diſtingués, par la manière de diſtribuer les roches aggrégées qu'il propoſe dans ce mémoire.

Mr Severguine diviſe les pierres de roche aggrégées tout comme on diviſe les minéraux ſimples, en roches pierreuſes, ſalines, bitumineuſes et métalliques, ce qui forme ſes claſses, auxquelles il ajoute encore les terres aggrégées.

Les roches aggrégées pierreuſes ſe ſubdiviſent en roches ſilicieuſes, argilleuſes, talcqueuſes et calcaires, ce qui forme les genres de l'auteur. Chacun de ces genres ſe ſubdiviſe en criſtallines, ſchiſteuſes, empatées, amygdaliques, brèches, ſablonneuſes. C'eſt d'après cette diviſion qu'il donne la claſsification entiere.

XII. et XIII.

1) Notice ſur une nouvelle variété de Spath de plomb blanc.

2) Notice ſur l'oxide de fer en forme d'aiguilles qui ſe trouve ſur les améthyſtes de l'isle de Kija en Onega.

Par Mr. *Baſile Severguine.* page 39?.

Mr. l'Académicien Severguine décrit dans ces deux notices l'apparence extérieure et intérieure, la transparence, l'attouchement, la dureté, la peſanteur, les qualités chimiques, la gangue et le lieu natal d'une nouvelle variété de Spath de plomb blanc des minières de Salairskoy, de même que celle de l'oxide de fer, ou des aiguilles ferrugineuſes, dont ſe trouvent recouvertes les améthyſtes trouvées dernierement ſur une isle du lac d'Onega, améthyſtes dont Mr. l'Académicien Hermann a préſenté, il n'y a pas long tems, des echantillons à l'Académie.

CLAS-

CLASSE D'ASTRONOMIE
ET
DE MÉTÉOROLOGIE.

I.

Obſervations de Venus, faites à l'obſervatoire de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, vers le tems de la plus grande digreſsion occidentale de cette planète, qui a eu lieu en Mai 1798.

Par Mr. l'Abbé *Henry*. page 399.

C'eſt une ſuite d'obſervations faites depuis le 22 jusqu'au 27 Mai de l'année mentionnée, que Mr. l'Abbé Henry préſente ici. Elles ſont faites ſur la planète de Venus, dans la vüe de les comparer aux tables, vu que ces ſortes de comparaiſons ſont toujours utiles au progrés de l'Aſtronomie en fourniſsant les moyens de rectifier les élémens des orbites planétaires.

Les paſsages au méridien de Venus et des étoiles auxquelles elle a été comparée, ont été obſervées en même tems à la lunette méridienne et au quart-de-cercle mural; et comme ces paſsages ne diffèrent pas ſenſiblement, Mr. Henry auroit pu ſe ſervir indifféremment des uns et des autres, pour en conclure l'aſcenſion droite de la planète; cependant il a préféré pour cet effet les obſervations faites à la lunette méridienne, parcequ'il la croit plus exactement dans le plan du méridien que le quart-de-cercle.

De toutes les obſervations rapportées dans ce mémoire il réſulte une erreur moyenne des tables en longitude de $-16'', 6$ et en latitude de $-9', 9$.

II.

Meditatio de figura telluris exactius cognoſcenda.

Auctore *Steph. Rumovsky*, pag. 407.

En examinant les recherches des auteurs ſur la grandeur et la figure de la terre on s'apperçoit bientôt qu'ils diffèrent tant ſoit peu dans le rapport entre l'axe de la terre et le diamètre de l'équateur quoique déduit des mêmes données. La ſource de cette petite différence vient de ce qu'ils déduiſent ce rapport de formules qui ſont ſeulement approchamment vrayes. Ceci a engagé le célèbre auteur du préſent mémoire à comparer tous les dégrés meſurés jusqu'ici avec le degré du Pérou et avec celui de Laponie, et de déduire de la formule rigoureuſement vraye la différence entre l'axe de la terre et le diamètre de l'équateur. Pour cet effet Mr. Roumovski debute par la ſolution du problème ſuivant:

„Conſidérant la terre comme Ellipsoïde, déterminer le „rapport entre le diamètre de l'équateur et l'axe de la „terre, en connoiſsant la grandeur d'un degré du meri„dien ſous une latitude donnée."

et il en fait l'application à tous les degrés meſurés jusqu'à préſent, ce qui lui donne des réſultats qui varient depuis $\frac{1}{102}$ jusqu'à $\frac{1}{666}$.

Cette différence, que quelques auteurs mettent ſur le compte de la conformation différente des méridiens, tandisque

diſque d'autres l'attribuent à des erreurs commiſes dans l'obſervation de la hauteur des aſtres, l'auteur panche auſſi à l'attribuer aux erreurs inévitables des diſtances au zénith qui peuvent monter à 2 et 3 ſecondes, et produire dans la longueur du degré meſuré une faute de 100 toiſes. Ceci remarqué l'auteur obſerve qu'en faiſant certaines corrections qui ne ſurpaſsent pas ce terme de 100 toiſes, aux différens degrés meſurés, il réſulte de toutes les meſures à très peu près le même rapport que donne la loix de la gravitation. Cela non obſtant l'auteur eſt du ſentiment de feu l'Abbé Boſcovich: que la queſtion ſur la grandeur et la figure de la terre, loin d'être décidée, eſt à peine entamée. Pour la réſoudre d'une maniere plus ſatisfaiſante l'auteur propoſe de meſurer, moyennant de bons chronomètres, 6 à 8 degrés de deux parallèles pas trop proches l'un de l'autre et il fait voir de quelle maniere la comparaiſon de ces arcs de parallèles peut conduire à un rapport plus juſte entre le diamètre de l'équateur et l'axe de la terre.

III.

Supplementum ad Theoriam Lunae Eulerianam.

Auctore *F. T. Schubert.* pag. 418.

La méthode employée par le célèbre Euler, dans ſa nouvelle *théorie de la lune*, en déterminant le lieu de la lune par trois coordonnées, quoiqu'à la verité elle ne ſoit pas trop convenable au calcul, a toujours été regardée comme la théorie la plus complète des perturbations du mouvement de ce ſatellite, qui repréſente les moindres corrections avec la plus grande exactitude, quoique ſous une forme

un peu compliquée. Il étoit donc bien étonnant, que ce grand Géméire n'ait pu expliquer par ſa méthode la fameuſe équation ſéculaire de la lune, ſi bien conſtatée par les obſervations anciennes et modernes. Depuis que Mr. de la Place eut démontré que cette équation dépend du quarré de l'excentricité du ſoleil, quantité négligée par feu Mr. Euler dans ſes calculs, il étoit à préſumer, que s'il eût tenu compte du quarré de cette excentricité, l'équation ſéculaire ſe trouveroit confondue avec les autres équations. Mr. l'Académicien Schubert voulant bien s'occuper de ces recherches, dut les commencer par étendre l'analyſe dont s'étoit ſervi Mr. Euler, jusqu'au quarré de l'excentricité du ſoleil. Quoiqu'il se fut bientôt aſsûré que, même en tenant compte de ce quarré, il ne réſulteroit, par la méthode d'Euler, que des équations périodiques, il crut devoir mener ce calcul jusqu'à la fin, ce qui a fourni pluſieurs nouvelles équations périodiques de la longitude de la lune, qui peuvent monter à 20″, ſavoir:

$$x = -0,0000029 + 0,0000063 \cos 2p + 0,0000047 \cos 2t - 0,0000246 \cos 2(p-t),$$

$$y = -0,0000097 \sin 2p - 0,0000322 \sin 2t + 0,0000371 \sin 2(p-t);$$

x étant l'abſciſse du lieu de la lune, y l'ordonnée priſe dans le plan de l'Ecliptique, p l'élongation moyenne de la lune au ſoleil, t l'anomalie moyenne du ſoleil. Mr. Schubert développe les raiſons par lesquelles la méthode d'Euler, bien qu'elle repréſente toutes les équations périodiques d'une maniere si exacte, ne peut pas conduire à une équation ſéculaire de la longitude moyenne: la principale cauſe en

en eſt, que Mr. Euler a pris pour axe des abſciſses une ligne qui n'eſt pas fixe, mais qui ſuit le moyen mouvement de la lune ſuppoſé connu, en ſe dirigeant toujours au lieu moyen de la lune. Pour trouver l'équation ſéculaire, il faut donc recourir aux formules primitives contenues dans l'ouvrage de Mr. Euler. Par ce moyen, Mr. l'Académicien Schubert, en transformant ces formules ſuivant la méthode du celèbre de la Place, trouve l'équation ſéculaire de la longitude de la lune =

$$+ \tau^2 . 11'', 908 + \tau^3 . 0'', 05757;$$

τ étant le nombre des ſiècles écoulés depuis 1750; valeur fort peu différente de celle qui a été trouvée par Mr. de la Place. En traitant de la même maniere le quarré de l'excentricité de la lune, ſujette à des variations périodiques dans l'eſpace de six mois, Mr. Schubert trouve une nouvelle équation périodique de la lune =

$$+ 23'', 3 \sin 2 (p - q) + 0'', 6 \sin 4 (p - q),$$

q étant l'anomalie moyenne de la lune.

IV.

Paſsage de Mercure ſur le ſoleil du 7 Mai 1799.

Par Mr. l'Abbé *Henry*. pag. 463.

Quoique le ciel, qui avoit été entièrement couvert pluſieurs jours, s'éclaircit heureuſement le jour même du phénomène, environ une demi-heure avant l'entrée de Mercure: l'atmoſphère étoit neanmoins remplie de vapeurs qui faiſoient paroître les bords du ſoleil dans un mouvement d'ondulation, ſurtout vers le tems de la ſortie. Cette circonſtance rendant les limites du disque ſolaire incertaines et y produiſant des échancrures aſsez ſenſibles, empêchoit de ſaiſir

avec

avec préciſion les inſtans des contacts, deſorte que l'obſervation n'a pas toute l'exactitude qu'elle auroit pu avoir dans de circonſtances plus favorables. Généralement cette ſorte d'obſervations n'eſt pas ſuſceptible, ſelon Mr. Henry, d'une grande préciſion, parcequ'en jettant les yeux ſur celles des précédens paſsages de Mercure, on voit que des obſervateurs habiles ont différé entr'eux, dans la même obſervation, de près d'une minute ſur le tems de la même phaſe. Quoiqu'il en ſoit, il a calculé ſon obſervation, ainſi que celle de Mr. Bode, par la méthode de Mr. Du Séjour et il préſente ici les équations de condition entre les élémens du paſsage, ſans en tirer, quant à préſent, aucun réſultat.

L'entrée de Mercure ayant précédé midi, Mr. Henry a auſſi obſervé les paſſages au méridien du ſoleil et de la planète, ainſi que leurs diſtances au zénith, et il en a conclu les aſcenſions droites et les déclinaiſons des deux aſtres et enſuite leurs longitudes et latitudes qui, comparées avec les tables lui ont fait connoître l'erreur des tables du ſoleil en longitude $= + 9'', 1$, l'erreur des tables de Mercure nulle en latitude et de $+ 27', 8$ en longitude.

V.

Eſsai ſur la méthode de trouver la latitude ſur mer par les hauteurs ſimultanées de deux aſtres.

Par Mr. *Krafft*. pag. 477.

La théorie des mouvemens des aſtres offre, pour déterminer ſur mer la latitude du vaiſseau, une quantité de méthodes; la marine, qui en a un beſoin continuel, n'en a long-tems pu mettre en pratique qu'une ſeule. La raiſon

ſon de l'abandon de toutes les autres ſe trouve dans le peu de perfection des inſtrumens aſtronomiques, dont la marine devoit ſe ſervir pour cet effet. La méthode des hauteurs méridiennes a ſeule l'avantage, de donner, par le calcul, la latitude avec une préciſion exactement égale à celle des obſervations; dans toutes les autres l'erreur du réſultat du calcul peut conſidérablement ſurpaſser celle qui a été commiſe dans les obſervations; d'où il s'enſuit qu'on ne ſauroit les mettre en pratique qu'à l'aide des inſtrumens, avec lesquels on eſt en droit de s'attendre à une préciſion ſuffiſante dans les obſervations. Dès que le marin, pour prendre hauteur, ſe vit en poſseſsion des ſecteurs à reflexion, à la place des anciens quartiers anglois, il ne tarda pas de joindre à la méthode des hauteurs méridiennes auſſi celle des hauteurs ſucceſsives d'un même aſtre priſes hors du méridien. Ce même inſtrument étant porté aujourd'hui à un degré éminent de perfection, il pourroit bien y avoir parmi les méthodes que la théorie offre, encore d'autres qui fuſsent dignes d'être tirées de l'oubli, où elles n'ont été condamnées qu'à cauſe de l'imperfection des inſtrumens. C'eſt ſous ce point de vüe, que l'auteur de ce mémoire a fait une eſpèce deréviſion de pluſieurs pareilles méthodes; et dans ce nombre celle des hauteurs ſimultanées de deux aſtres lui a paru ſe diſtinguer avantageuſement des autres à cet égard. Le calcul que la ſolution de ce problème demande d'après les principes ordinaires de la Trigonométrie ſphérique, eſt ſans doute trop embarraſsant pour la pratique de la marine; l'auteur en donne une autre, qui eſt beaucoup plus ſimple et également rigoureuſe, et encore ſuſceptible d'être réduite facilement en tables bien compendieu-

ſes

ſes, et dont l'application paroît très-propre à la pratique de tout Pilote hauturier. Pour en donner un échantillon, l'auteur a conſtruit une pareille table pour le couple des étoiles brillantes Aldebaran et Rigel, et en éclaircit l'uſage par des exemples. A la fin du mémoire il fait un expoſé ſuccinct des avantages de cette méthode, qui conſiſtent en ce qu'elle eſt indépendante de toute meſure du tems; qu'elle ne demande aucune correction en raiſon du sillage, ni du rhumb de vent que le vaiſseau a courru dans l'intervalle du tems qui ſépare les hauteurs ſucceſsives d'un même aſtre; et qu'elle eſt practicable même dans le tems le moins favorable, où le ciel n'accorderoit au navigateur que l'apparition courte et paſsagère de deux étoiles connues.

VI.

Sur l'occultation de ε des gémaux du 8 Août 1798.

Par Mr. l'Abbé *Henry*. page 494.

L'auteur de ce mémoire commence par expoſer l'obſervation de cette occultation, avec le détail des circonſtances qui l'ont accompagnées. Il y ajoute enſuite les obſervations du même phénomène faites à Leipzik, Dantzik, Ofen et Celle, et après avoir calculé chacune ſéparément, il en compare les réſultats et en déduit les différences des méridiens de ces villes avec celui de St. Pétersbourg, qu'il trouve

Ofen . .	0^h, 45′, 14″, 5
Dantzik .	0, 46, 49, 5
Leipzik .	1, 11, 50, 1
Celle . .	1, 21, 20, 3

Toutes les obſervations s'accordent au reſte à donner envi-

ro

ron 30 ſecondes pour erreur des tables de la lune en longitude et 7, 8 ſecondes en latitude.

VII.

Réſultats de l'obſervation de la lune au méridien et de l'occultation de Φ du ſagittaire, du 21 Août 1798.

Par Mr. l'Abbé *Henry*. page 508.

Après avoir expoſé le détail de ſon obſervation et les réſultats qu'il en a tiré, l'auteur y joint le calcul de la même occultation, d'après les obſervations qui ont été faites à Mirepoix et à Paris, et il en compare les réſultats avec les ſiens, à l'effet d'en déduire la différence des méridiens de ces deux villes avec celui de St. Pétersbourg qu'il trouve de 1', 53", 3 entre Paris et Mirepoix et de 1h, 51', 58", 7 entre Paris et St. Pétersbourg, avec une erreur des tables de 13" 7.

VIII.

Supplément au mémoire ſur la reduction des diſtances lunaires.

Par Mr. *Krafft*. page 517.

Le mémoire de l'auteur, auquel ce ſupplement ſe rapporte, ſe trouve dans le Tome VII. des nouveaux Actes de l'Académie, ſous le titre: Méthode à la portée des navigateurs, pour reduire en diſtance vraie la diſtance apparente de la lune au ſoleil ou à une étoile fixe. Le célèbre Capitaine de vaiſseau de la marine Royale d'Eſpagne, Mr. de Mendoza y Rios, ayant donné enſuite, pour le même problême de l'Aſtronomie nautique, une ſolution qui, quoique

ſemblable à celle-ci, en diffère cependant en quelques points intéreſsans: Mr. Krafft a trouvé utile, de préſenter dans ce ſupplement l'une et l'autre méthode dans leur rapprochement, et de faire voir les avantages que la méthode de Mr. de Mendoza offre ſur la ſienne. L'une et l'autre eſt exemte de tout calcul logarithmique. Mais comme il y a des Pilotes hauturiers bien verſés dans ce genre de calcul: Mr. Krafft ajoute pour leur uſage, à la fin de ce ſupplement, encore une autre méthode de réſoudre le même problême, bien facile et expéditive ſurtout depuis que la marine eſt en poſseſsion des tables complettes des ſinus-verſes et des ſus-ſinus-verſes des angles, dont elle eſt redevable au zèle de Mr. de Mendoza.

IX.

Sur les paſsages de Mercure ſur le ſoleil, dans le dix-neuvieme ſiècle.

Par Mr. *F. T. Schubert.* page 529.

Avant de donner le calcul des treize paſsages de Mercure, qui auront lieu dans ce ſiècle, Mr. Schubert a cru devoir rendre compte des méthodes et des formules qu'il a employées dans ce calcul: ce qu'il a fait dans ce premier mémoire qui contient une théorie complète des paſsages en général, et qui eſt diviſé en trois ſections, ſavoir, le calcul pour le centre de la terre, pour les différens points de ſa ſurface, et pour un lieu déterminé. En donnant aux différentes quantités qui entrent dans les formules générales, les limites des valeurs qu'elles peuvent prendre, tant au

au mois de Mai qu'à celui de Novembre, l'auteur trouve: 1) que la plus grande valeur de la *durée totale* d'un paſſage du centre de Mercure eſt, au mois de Mai = 8 heures, au mois de Novembre = 5½ heures; 2) que la *durée de l'immerſion* ou de *l'émerſion*, c'eſt-à-dire, l'intervalle entre le contact extérieur et intérieur, peut varier depuis 1 min. 43 ſec. jusqu'à 38 min. 33 ſec. 3) que la *durée de l'entrée* ou de la ſortie apparente du centre de Mercure, pour les différens lieux de la terre, peut varier depuis 1 min. 22 ſec. jusqu'à 28 min. 36 ſec.

Dans la troiſieme ſection, après avoir trouvé une formule rigoureuſe et fort ſimple pour convertir la diſtance géocentrique de deux aſtres, quelque grande qu'elle ſoit, en leur diſtance apparente ou parallactique, l'auteur donne des formules générales, pour trouver la conjonction vraie, la longitude et la latitude géocentrique de Mercure, par les obſervations, c'eſt-à-dire, pour corriger les élémens de Mercure, et les longitudes des lieux où l'immerſion et l'émerſion ont été obſervées, enfin, pour déterminer la poſition des points apparens de l'immerſion, de l'émerſion, et de la plus grande phaſe, par rapport au vertical, dans chaque lieu de la terre.

X.

De relativa nonnullorum locorum elevatione, in quibus obſervationes barometricae ac thermometricae ſunt inſtitutae.

Auctore *Petro Inochodzof.* pag. 555.

Après avoir expoſé brièvement les principales cauſes qui font varier le poids ou la preſſion de l'atmosphère dans

le Baromètre, et les précautions qu'il faut obſerver en déterminant l'élévation des lieux au moyen de cet inſtrument, eû égard aux différens degrés de chaleur, d'humidité, d'élaſticité de l'air, d'électricité et aux directions du vent, l'auteur de ce mémoire exprime par une formule la regle donnée par Mr. De Luc et la transforme en une autre, dans laquelle, au lieu du thermomètre de Réaumur il introduit le thermomètre de Délisle plus uſité chez nous, et la toiſe Ruſse compoſée de ſept pieds anglois. Il déduit les hauteurs moyennes du baromètre d'abord des extrèmes de chaque mois et enſuite du *maximum* et *minimum* de toute l'année. Il en réſulte que Moſcou eſt plus élevé que Pétersbourg de 128 ſagènes; Riga de 1·½ ſagènes; Nertchinsk de 368 ſagènes et Kola de 35½ ſagènes, à peu près.

XI.

Extrait des obſervations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en l'année 1795, suiv. le nouv. st.

Par Mr. *I. A. Euler*. pag. 565.

La plus grande hauteur du Baromètre 28, 92 pouces de Paris, le 17 Février à 6 heures du soir; la plus petite 27, 17, le 5 Janvier à 7 heures du ſoir. Ainſi la variation totale 1, 85; le milieu arithmétique 27, 995 et la hauteur moyenne 28, 125.

Le plus grand froid — 23½ degré de Réaumur a été obſervé le 14 Mars au matin; la plus grande chaleur + 23 le 8 Juin après midi; ainſi la différence 46½ degrés.

La derniere gelée a été le 16 Mai, et la premiere le 11 Octobre, après un intervalle de 148 jours.

Les

Les mois de Novembre et de Mai ont été les plus venteux, et ceux d'Octobre et de Décembre les plus calmes; l'été a été plus venteux que l'hyver précédent.

Le nombre des jours entièrement ſereins a été 83, et celui des jours entièrement couverts 111; il y a eu 33 brouillards. Il a pleu en 122 jours et il a neigé en 72 jours. La derniere neige eſt tombée le 14 Mai, et la premiere le 16 Octobre, après un intervalle de 155 jours.

Il eſt tombé de la grèle en 5 jours.

Le nombre des orages ne monte qu'à ſix, et il tonnoit de loin en 3 jours. L'aurore boréale a été obſervée en deux jours.

La Néva debâcla le 20 Avril, et fut entièrement priſe le 11 Décembre, après avoir été ouverte pendant 235 jours.

XII.

Extrait des obſervations météorologiques, faites à Moſcou en 1795, d'après le nouv. st.

Par Mr. *Stritter*. page 583.

La plus grande hauteur du Barométre 27, 75 pouces de France le 8 Décembre après midi; la plus petite 26, 42 le 6 Janvier toute la journée; ainſi la variation totale 1,33, le milieu arithmétique 27, 085 et la hauteur moyenne 27, 20. *)

Le

*) Mr. Euler a calculé l'élévation de Moſcou au deſſus de St Pétersbourg et l'a trouvée 127 Sagènes ou toiſes de Ruſſie, ce qui eſt très-bien d'accord avec les calculs de Mr. Inochodzof.

Le plus grand froid — 24 degrés de Réaumur le 21 Janvier à 6 heures du matin; la plus grande chaleur + 25, le 9 et 22 Juin à 2 heures de l'après midi; ainſi la différence 49.

La derniere gelée eut lieu le 17 Avril, et il recommença à geler le 17 Septembre, après un intervalle de 153 jours d'été.

Les mois de Mai et de Juin ont été les plus venteux, et ceux de Mars et de Janvier les plus calmes. Le vent dominant a été celui du Nord pour toute l'année.

Le nombre des jours entièrement ſéreins étoit 27, des jours couverts 246, les brouillards au nombre de 19. Il a plû en 106 jours, et il a neigé en 87 jours. Il neiga pour la derniere fois le 12 Mai et il recommença à neiger le 17 Septembre, après un intervalle de 128 jours.

Il eſt tombé de la grèle en 128 jours.

Trois parhélies, 3 paraſelènes, et 11 orages ont été obſervés.

XIII.

Extrait des obſervations météorologiques, faites à St. Pétersbourg en 1796, d'après le nouv. stile.

Par Mr. *I. A. Euler.* page 593.

La plus grande hauteur du Baromètre 28, 99 pouces de Paris, le 11 Mars à midi; la plus petite 27, 15, le 28 Novembre à 2 heures après midi. Le variation totale 1, 84, et la hauteur moyenne 28, 107.

Le

Le plus grand froid 184° Dél. ou — 18, 1 Réaum. le 13 Février à 7 heures du matin.

La plus grande chaleur 108 Dél. ou + 2, 24 Réaum. le 4 Juin à 2 heures après midi.

La différence 76 Dél. où 40, 5 Réaumur.

La derniere gelée a été le 3 Mai et il a recommencé à geler le 25 Septembre; ce qui donne pour l'intervalle de l'été 145 jours.

Calme 94 jours, vent doux 169, fort 84, très fort 19. Le mois de Mai ſe trouve avoir été le plus venteux, après lui ſuivent les mois de Juin et de Janvier; ceux d'Avril et d'Août ont été les plus calmes.

Nombre des jours ſéreins 84; des jours couverts 109; des brouillards 47; des pluies 120; des neiges 76. La derniere neige tomba le 18 Avril, et il a recommencé à neiger le 23 Sept. après un intervalle de 159 jours.

Il a grelé en 5 jours; le nombre des orages monte à 12; le premier a été le 1 Juin et le dernier le 9 Octobre.

Une foible lumiere boréale a été obſervée le 6 Février et un paraſélène le 20 du même mois.

La Néva debâcla le 23 Avril et fut priſe le 25 Nov. après un intervalle de 216 jours.

XIV.

Extrait des obſervations météorologiques, faites à Moſcou en 1796, d'après le nouv. stile.

Par Mr. *Stritter.* page 609.

La plus grande hauteur du Baromètre 28, 08 pouces de Paris, le 22 Novembre depuis 2 h. après midi jusqu'à 10 heur.

10 heures du ſoir. La plus petite 26, 25 du 21 à 10 heures du ſoir jusqu'au 22 matin du mois de Mars.

La variation totale 1, 83 et la hauteur moyenne 27, 18.

Le plus grand froid 183° Dél. ou — 17°, 6 Réaum. le 16 Févr. à 6 heures du matin.

La plus grande chaleur 105 Dél. ou + 24 Réaum. le 4 Juin à 2 heur. apr. midi.

La différence 78 Dél. ou 41, 6 Réaumur.

La derniere gelée fut le 21 Avril et la premiere le 13 Septembre, après un intervalle de 145 jours.

Calme 10 jours, vent médiocre 61, fort 227, très fort 68 jours. Le vent le plus fréquent a été celui du Nord, il a ſurtout dominé au mois de Juin.

Nombre des jours ſéreins 16; des jours couverts 259; des brouillards 22; des pluies 132; des neiges 98. La derniere neige tomba le 11 Mai et la premiere le 1 Octobre, après un intervalle de 143 jours. Il a grelé en 2 jours.

Le nombre des orages monte à 14, et il a fait des éclairs en 5 jours.

Il y eut 5 parhélies et 2 paraſélènes.

L'élévation de Moſcou au deſsus de St. Pétersbourg ſe reduit à 121 ſagènes de Ruſſie.

MATHE-

MATHEMATICA

ET

PHYSICO - MATHEMATICA.

Digitized by Google

EXEMPLA
QUARUNDAM
MEMORABILIUM AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM,
quas adeo algebraice integrare licet, etiamſi nulla via pateat variabiles a ſe invicem ſeparandi.

Auctore *L. EVLERO.*

Conventui exhibita die 19 Ian. 1778.

§. 1.

Facile quidem eſt hujusmodi aequationes, quotquot lubuerit, exhibere, quarum integralia aſſignari queant. Si enim pro V accipiatur quaecunque functio binarum variabilium x et y, ita vt ſit $\partial V = M\partial x + N\partial y$, evidens eſt huic aequationi differentiali $\partial x(PV + MS) + \partial y(QV + NS) = 0$ ſemper ſatisfacere aequationem finitam $V = 0$. Verum hoc integrale tantum eſt particulare. Praeterea vero ſi ejusmodi aequatio proponatur, plerumque haud difficulter iſta functio V vel divinando inveniri poteſt, ita vt hujusmodi aequationes parum in receſſu habere ſunt cenſendae. Hic autem tales aequationes in medium ſum allaturus, quarum integratio omnes methodos adhuc cognitas reſpuere videatur, cum tamen nihilominus earum integralia completa, atque adeo algebraica, exhiberi queant.

§. 2. Hujusmodi ſcilicet aequationes differentiales deducere licet ex hac aequatione differentiali hactenus pluvimum tractata: $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$, in qua eſt $X = \alpha + 2\beta x + \gamma xx + \delta x^3 + \epsilon x^4$ et $Y = \alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \epsilon y^4$, cujus integrale completum hac aequatione finita exprimitur:

I. $\frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{x - y} = \sqrt{2\lambda + \gamma + 2\delta(x+y) + \epsilon(x+y)^2}$, vbi λ denotat conſtantem arbitrariam integratione ingreſſam, quod ergo integrale etiam hoc modo exhiberi poteſt:

II. $\sqrt{XY} = \lambda(x-y)^2 - \alpha - \beta(x+y) - \gamma xy - \delta xy(x+y) - \epsilon xxyy$. Quin etiam irrationalitatem penitus tollendo hoc integrale ſequentem induet formam:

III. $0 = \lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda(\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy + \delta xy(x+y) + \epsilon xxyy) + (\beta\beta - \alpha\gamma) - 2\alpha\delta(x+y) - \alpha\epsilon(x+y)^2 - 2\beta\delta xy - 2\beta\epsilon xy(x+y) + (\delta\delta - \gamma\epsilon)xxyy$.

Hinc jam ſequentia exempla evolvamus.

Exemplum I.

§. 3. Cum ex aequatione $\frac{\partial x}{\sqrt{X}} = \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$ ſit $\frac{\partial x}{\partial y} = \sqrt{\frac{X}{Y}}$, habebimus $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\sqrt{XY}}{Y}$, vbi, ſi valores pro Y et $\sqrt{XY}$ ex forma integralis ſecunda ſubſtituamus, prodibit

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\lambda(x-y)^2 - \alpha - \beta(x+y) - \gamma xy - \delta xy(x+y) - \epsilon xxyy}{\alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \epsilon y^4}$$

quae more ſolito in ordinem redacta hanc induet formam:

$$\partial x(\alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \epsilon y^4) + \partial y(\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy + \delta xy(x+y) + \epsilon xxyy) = \lambda \partial y(x-y)^2.$$

cujus aequationis ergo integrale eſt aequatio finita, quam ſub triplici forma exhibuimus, Quoniam autem in hoc integrali nulla nova conſtans occurrit, quae in differentiali non inſit, hoc integrale tantum pro particulari eſt habendum.

§. 4.

§. 4. Interim tamen haec aequatio differentialis jam ita eſt comparata, vt nemo certe ejus integrale divinando elicere potuerit, cum ſex quantitates diverſae ibi occurrant. Quin etiam ſi quatuor adeo litterae evaneſcant, tamen integrale adhuc ſatis abſconditum deprehenditur. Veluti ſi ſumamus $\beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$, oritur haec aequatio differentialis $\alpha \partial x + \alpha \partial y = \lambda \partial y (x - y)^2$, cujus ergo integrale ex prima forma erit $\frac{2\sqrt{\alpha}}{x-y} = \sqrt{2\lambda}$, ſive $x - y = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda}$, ſive $x = y + \frac{\sqrt{2\alpha}}{\lambda}$, qui valor vtique ſatisfacit, ſed tantum particulariter. Pro integrali autem completo inveniendo ſtatuatur $x - y = v$, ſive $x = y + v$, vnde aequatio differentialis evadet $\partial y = \frac{\alpha \partial v}{\lambda v v - 2\alpha}$, cujus ergo integrale completum ſive a logarithmis, ſive ab arcubus circularibus pendet.

§. 5. Ponamus nunc eſſe $\alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$, et aequatio noſtra differentialis erit

$$2\beta y \partial x + \beta (x + y) \partial y = \lambda \partial y (x - y)^2,$$

cui ergo ſatisfacit hoc integrale ex I. forma

$$\frac{\sqrt{2\beta x} + \sqrt{2\beta y}}{x - y} = \sqrt{2\lambda}, \text{ vel ex II. forma}$$

$$2\beta \sqrt{xy} = \lambda (x - y)^2 - \beta (x + y).$$

Illa autem forma praebet $\sqrt{x} + \sqrt{y} = (x - y) \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}$, quae diviſa per $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ dat $1 = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}$, ſive $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}$, hincque $x = y + 2\sqrt{\frac{\beta}{\lambda} y} + \frac{\beta}{\lambda}$, ideoque $\partial x = \partial y + \frac{\partial y \sqrt{\beta}}{\sqrt{\lambda y}}$, qui valores ſubſtituti aequationem identicam producunt.

§. 6. Cum igitur iſti caſus ſimpliciſſimi jam profundiorem indagationem requirant, hinc evidentiſſime elucet, ſi omnes ſex litterae in calculo relinquantur, tum neminem

certe

certe vnquam ejus integrale ſaltem particulare eſſe eruturum; unde haec ipſa aequatio generalis:

$$\left.\begin{matrix}\partial x(\alpha + 2\beta y + \gamma yy + 2\delta y^3 + \varepsilon y^4) + \\ + \partial x(\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy + \partial xy(x+y) + \varepsilon xxyy\end{matrix}\right\} = \lambda \partial y (x-y)^2$$

omni attentione maxime digna videtur, cum ejus integrale, licet particulare, ſit ipſa aequatio ſupra §. 2. aſſignata ſub triplici forma. In ſequentibus autem exemplis hujusmodi aequationes differentiales proferemus, quarum adeo integralia completa algebraice exhiberi queant.

Exemplum II.

§. 7. Cum ſit $\partial x : \partial y = \sqrt{X} : \sqrt{Y}$, erit $\frac{\partial x + \partial y}{\partial x + \partial y} = \frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}$. Jam haec fractio ſupra et infra multiplicetur per $\sqrt{X} + \sqrt{Y}$ fietque $\frac{\partial x + \partial y}{\partial x - \partial y} = \frac{(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2}{X - Y}$, cujus numerator ex prima forma integralis eſt

$$(x - y)^2 (2\lambda + \gamma + 2\delta(x + yy) + \varepsilon(x + y)^2$$

denominator vero erit

$$2\beta(x-y) + \gamma(xx - yy) + 2\delta(x^3 - y^3) + \varepsilon(x^4 - y^4)$$

ſicque haec fractio per $x - y$ deprimi poteſt, ita vt habeamus

$$\frac{\partial x + \partial y}{\partial y - \partial y} = \frac{(x - y)(2\lambda + \gamma + 2\delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2)}{2\beta + \gamma(x + y) + 2\delta(xx + xy + yy) + \varepsilon(x + y)(xx + yy)}$$

cujus ergo integrale pariter erit ipſa aequatio finita ſupra aſſignata, quae cum praeter quantitates conſtantes, in ipſam aequationem differentialem ingredientes, quae ſunt β, γ, δ, ε et λ, inſuper litteram α contineat, vtique pro integrali completo eſt habenda.

§. 8. Quo hanc aequationem in ordinem redigamus, primo eam in hanc formam convertamus:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\beta + \lambda(x - y) + \gamma x + \delta x(2x + y) + \varepsilon xx(x + y)}{\lambda(x - y) - \beta - \gamma y - \delta y(2y + x) - \varepsilon yy(x + y)}.$$

Nunc

Nunc igitur fractionibus ſublatis prodibit haec aequatio:

$$\left.\begin{matrix}\lambda\partial x(x-y)-\beta\partial x-\gamma y\partial x-\delta y\partial x(2y+x)-\varepsilon yy\partial x(x+y)\\ -\lambda\partial y(x-y)-\beta\partial y-\gamma x\partial y-\delta x\partial y(2x+y)-\varepsilon xx\partial y(x+y)\end{matrix}\right\}=0.$$

Hujus ergo aequationis integrale completum eſt ipſa illa aequatio finita, quam ſupra ſub triplici forma repraeſentavimus, in qua littera α eſt conſtans arbitraria per integrationem ingreſſa, vnde ex tertia forma integrale ita referri poterit

$$\alpha(2\lambda+\gamma+2\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2)=\lambda\lambda(x-y)^2-2\lambda\beta(x+y)$$
$$-2\lambda\gamma xy-2\lambda\delta xy(x+y)-2\lambda\varepsilon xxyy+\beta\beta-2\beta\delta xy$$
$$-2\beta\varepsilon xy(x+y)+(\delta\delta-\gamma\varepsilon)xxyy.$$

ſive

$$\alpha=\frac{\lambda\lambda(x-y)^2-2\lambda\beta(x+y)-2\lambda\gamma xy-2\lambda\delta xy(x+y)-2\lambda\varepsilon xxyy+\beta\beta-2\beta\delta xy-2\beta\varepsilon xy(x+y)+(\delta\delta-\gamma\varepsilon)xxyy}{2\lambda+\gamma+2\delta(x+y)+\varepsilon(x+y)^2}$$

§. 9. Quia in hac aequatione plures occurrunt litterae, ſcilicet λ, β, γ, δ, ε, contemplemur primo caſus ſpeciales, quibus duae tantum litterae occurrunt, reliquis ad nihilum redactis.

Caſus I.

quo $\gamma=\delta=\varepsilon=0$.

§. 10. Aequatio ergo differentialis erit

$$\lambda\partial x(x-y)-\lambda\partial y(x-y)-\beta\partial x-\beta\partial y=0$$

ſive $\lambda(x-y)(\partial x-\partial y)-\beta(\partial x+\partial y)=0$

cujus integrale ſponte ſe prodit

$$\lambda(x-y)^2-2\beta(x+y)=\text{conſt.}$$

Generalis vero integralis forma hoc caſu praebet

$$\alpha=\frac{\lambda\lambda(x-y)^2-2\lambda\beta(x+y)+\beta\beta}{2\lambda}$$

Caſus

Caſus II.

quo $\beta = \delta = \varepsilon = 0.$

Hoc caſu aequatio differentialis erit

$$\lambda\partial x(x - y) - \lambda\partial y(x - y) - \gamma(y\partial x + x\partial y) = 0,$$

cujus integrale pariter ſponte ſe offert; quandoquidem erit

$$\lambda(x - y)^2 - 2\gamma xy = \text{conſt.}$$

Ex forma generali integrale fit $\alpha = \frac{\lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda\gamma xy}{2\lambda + \gamma}$.
Quin etiam ſi fuerit tantum $\delta = \varepsilon = 0$, qui fit

Caſus III.

Aequatio differentialis erit

$$\lambda(x - y)(\partial x - \partial y) - \beta(\partial x + \partial y) - \gamma(y\partial x + x\partial y) = 0;$$

cujus integrale eſt manifeſto

$$\lambda(x - y)^2 - 2\beta(x + y) - 2\gamma xy = \text{conſt.}$$

Forma generalis autem praebet

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda\beta(x+y) - 2\lambda\gamma xy + \beta\beta}{2\lambda + \gamma},$$

vbi conſenſus eſt manifeſtus, ſicque quoties ambae litterae δ et ε evaneſcunt, res nihil plane habet in receſſu; verum ſi litterarum δ et ε, vel altera tantum, vel ambae affuerint, ejusmodi oriuntur aequationes differentiales, quarum integratio per methodos uſitatas non parum difficultatis involvit; hujusmodi igitur caſus hic data opera evolvamus.

Caſus IV.

quo $\beta = \gamma = \varepsilon = 0.$

§. 11. Hoc ergo caſu aequatio differentialis erit

$$\lambda(x-y)(\partial x - \partial y) - \delta y\partial x(2y + x) - \delta x\partial y(2x + y) = 0,$$

cujus integrale ex forma generali reſultat

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda\delta xy(x+y) + \delta\delta xxyy}{2\lambda + 2\delta(x+y)},$$

cujus

cujus veritas neutiquam tam clare perſpicitur, quam caſibus praecedentibus; namque poſito brevitatis gratia $\lambda = n^5$, vt habeatur haec aequatio:

$n(x-y)(\partial x - \partial y) = y\partial x(2y+x) + x\partial y(2x+y)$,

ejus prius membrum ſponte eſt integrabile, hincque etiam ſi multiplicetur per functionem quamcunque $x-y$. Verum nulla hujusmodi functio datur, qua etiam poſterius membrum integrabile reddatur. Vt autem more ſolito in ejus integrale inquiramus, ponamus $x+y = p$ et $x-y = q$, vt fit $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{p-q}{2}$, atque aequatio noſtra induet hanc formam: $nq\partial q = \frac{1}{4}\partial p(3pp+qq) - pq\partial q$. Ponamus hic $qq = v$, vt fit $2q\partial q = \partial v$, et aequatio noſtra erit: $2n\partial v + 2p\partial v - v\partial p = 3pp\partial p$. In qua aequatione quia v vnicam tantum habet dimenſionem, ea methodo conſueta reſolvi poterit: diviſa enim per $2n + 2p$, praebet $\partial v - \frac{v\partial p}{2n+2p} = \frac{3pp\partial p}{2n+2p}$.

§. 12. Conſtat autem hanc aequationem generalem: $\partial v + Pv\partial p = Q\partial p$, vbi P et Q ſint functiones quaecunque ipſius p, integrabilem reddi, ſi ducatur in $e^{\int P\partial p}$; tum enim integrale fit $e^{\int P\partial p}v = \int e^{\int P\partial p}Q\partial p$. Hinc autem pro noſtro caſu habebimus $P = \frac{-1}{2n+2p}$ et $Q = \frac{3pp}{2n+2p}$; quamobrem fiet $\int P\partial p = -\frac{1}{2}l(2n+2p) + \frac{1}{2}l\,2 = -\frac{1}{2}l(n+p)$, ideoque $e^{\int P\partial p} = \frac{1}{\sqrt{(n+p)}}$, ergo aequatio integralis erit $\frac{v}{\sqrt{(n+p)}} = \frac{3}{2}\int\frac{pp\partial p}{(n+p)^{\frac{3}{2}}}$. Pro poſtremo membro ponatur $n + p = zz$, ſive $p = zz - n$ eritque $(n+p)^{\frac{3}{2}} = z^3$, tum vero fiet $\frac{pp\partial p}{(n+p)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\partial z(z^4 - 2nzz + nn)}{zz} = 2zz\partial z - 4n\partial z + \frac{2nn\partial z}{zz}$, cujus integrale eſt $\frac{2}{3}z^3 - 4nz - \frac{2nn}{z}$, conſequenter noſtra aequatio integralis erit $\frac{v}{\sqrt{(n+p)}} = z^3 - 6nz - \frac{3nn}{z} + \text{conſt.}$

ſive $\frac{v}{\sqrt{(n+p)}} = (n+p)^{\frac{3}{2}} - 6n\sqrt{(n+p)} - \frac{3nn}{\sqrt{(n+p)}} + C$, quae aequatio reducitur ad hanc formam:

$$v = (n+p)^2 - 6n(n+p) - 3nn + C\sqrt{(n+p)},$$

ſive $v = pp - 4np - 8nn + C\sqrt{(n+p)}$.

§. 13. Erat autem $v = qq$, ſicque integrale noſtrum erit $qq = pp - 4np - 8nn + C\sqrt{(n+p)}$. At vero integrale ſupra datum, ſi pariter ad quantitates p et q reducatur, in hanc formam transmutatur:

$$\frac{2\alpha}{\delta} = \frac{nnqq - \frac{np(pp-qq)}{2} + \frac{(pp-qq)^2}{16}}{n+p}$$

$$= \frac{16nnqq - 8np(pp-qq) + (pp-qq)^2}{16(n+p)}.$$

Ex forma autem inventa conſtans arbitraria C hoc modo definitur: $-C = \frac{pp - qq - 4np - 8nn}{\sqrt{(n+p)}}$,

cujus quadratum praebet

$$CC = \frac{(pp-qq)^2 - 8np(pp-qq) - 16nn(pp-qq) + 16nnpp + 64n^3p + 64n^4}{n+p},$$

hincque jam elicitur $\frac{32\alpha}{\delta} - CC = 64n^3$. Unde patet ambo haec integralia perfecte inter ſe convenire, ſiquidem tantum quantitate conſtante a ſe invicem diſcrepant.

§. 14. Ob tantas ergo ambages, quibus vſi ſumus ad integrale eliciendum, iſte caſus tanto majore attentione dignus eſt cenſendus. Interim tamen, quoniam integrale denominatorem habet $n+p$, atque ipſa fractio differentiata noſtram aequationem differentialem reproducere debet, neceſſe eſt vt ipſa noſtra aequatio differentialis

$$4nq\partial q + 4pq\partial q - 3pp\partial p - qq\partial p = 0$$

integrabilis reddatur, ſi per certam fractionem, quae reperitur $\frac{pp - qq + 4np + 8nn}{(n+p)^2}$, multiplicetur, id quod calculum inſti-

tuenti

tuenti per plures demum ambages patebit, ſi formulam pro $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ ſupra exhibitam differentiare voluerit, quem laborem autem hic ſuſcipere non vacat, praeſertim poſtquam conſenſum amborum integralium jam oſtenderimus; quam ob cauſam iſte caſus maximam attentionem meretur.

Caſus V.

quo $\beta = \gamma = \delta = 0$.

§. 15. Hoc ergo caſu aequatio differentialis erit $\lambda(x-y)(\partial x - \partial y) - \varepsilon(x+y)(yy\,\partial x + xx\,\partial y) = 0$, cujus ergo integrale completum erit

$$\alpha = \frac{\lambda\lambda(x-y)^2 - 2\lambda\varepsilon xxyy}{2\lambda + \varepsilon(x+y)^2}.$$

Fiat nunc iterum $x + y = p$ et $x - y = q$, ponaturque $\lambda = n\varepsilon$, et aequatio differentialis prodibit

$$nq\partial q - \tfrac{1}{4}p\partial p(pp+qq) + \tfrac{1}{2}ppq\partial q = 0.$$

Integrale vero erit $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{nnqq - \frac{1}{8}n(pp-qq)^2}{2n+pp}.$

Iſta autem aequatio pariter nulla laborat difficultate; poſito enim $qq = v$, vt ſit $2q\partial q = \partial v$, prodibit haec forma:

$$2n\partial v - pv\partial p + pp\partial v = p^3\partial p,$$

hacque diviſa per $2n+pp$, erit $\partial v - \frac{vp\partial p}{2n+pp} = \frac{p^3\partial p}{2n+pp}$, quae cum aequatione generali §. 12. comparata dat $P = \frac{-p}{2n+pp}$ et $Q = \frac{p^3}{2n+pp}$. Fiet ergo $\int P\partial p = -\frac{1}{2}l(2n+pp)$, ideoque $e^{\int P\partial p} = \frac{1}{\sqrt{(2n+pp)}}$, ergo aequatio integralis erit

$$\frac{v}{\sqrt{(2n+pp)}} = \int\frac{p^3\partial p}{(2n+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4n+pp}{\sqrt{(2n+pp)}} + \text{Conſt.}$$ Sicque integrale completum erit $qq = 4n + pp + C\sqrt{(2n+pp)}$, ſive habebimus $C = \frac{qq-pp-4n}{\sqrt{(2n+pp)}}$, quae forma, vt cum ſupra aſſignata comparari poſſit, quadretur, fietque

 CC =

$CC = \frac{q^4 - 2ppqq - 8nqq + p^4 + 8npp + 16nn}{2n + pp}$. Erat autem $= -\frac{8\alpha}{n\varepsilon}$ $= + \frac{(pp - qq)^2 - 8nqq}{2n + pp}$, quarum expreſſionum differentia eſt $CC + \frac{8\alpha}{n\varepsilon} = 8n$; unde patet conſtantem C ita definiri, vt ſit $CC = 8n - \frac{8\alpha}{n\varepsilon}$.

Caſus generalis,

vbi omnes litterae admittuntur.

§. 16. Poſito nunc in genere $x + y =$ et $x - y = q$, aequatio noſtra differentialis erit

$$\lambda q \partial q - \beta \partial p - \tfrac{1}{2}\gamma(p \partial p - q \partial q) - \tfrac{1}{4}\delta \partial p(3pp + qq) + \delta pq \partial q - \tfrac{1}{4}\varepsilon p \partial p (pp + qq) + \tfrac{1}{2}\varepsilon ppq \partial q = 0,$$

cujus ergo integrale completum erit

$$\alpha = \frac{\left\{ \begin{array}{l} + \lambda\lambda qq - 2\lambda\beta p - \tfrac{1}{2}\lambda\gamma(pp - qq) - \tfrac{1}{2}\lambda\partial p(pp - qq) \\ - \tfrac{1}{8}\lambda\varepsilon(pp - qq)^2 + \beta\beta - \tfrac{1}{2}\beta\varepsilon p(pp - qq) + \tfrac{1}{16}(\delta\delta - \gamma\varepsilon)(pp - qq)^2 \end{array} \right\}}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp)}.$$

§. 17. Poſtquam autem noſtra aequatio ad hanc formam eſt reducta; ejus reſolutio nulla amplius difficultate laborat; poſito enim $qq = v$, et terminis ſive v, ſive ∂v continentibus in vnam partem translatis, iſta forma proveniet:

$$(2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp)\partial v - v(\delta + \varepsilon p)\partial p = (4\beta + 2\gamma p + 3\delta pp + \varepsilon p^3)\partial p.$$

$$\partial v - \frac{v \partial p(\delta + \varepsilon p)}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp} = \frac{\partial p(4\beta + 2\gamma p + 3\delta pp + \varepsilon p^3)}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp};$$

haec forma cum generali §. 12. comparata dat

$$P = \frac{-\delta - \varepsilon p}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp} \text{ et } Q = \frac{4\beta + 2\gamma p + 3\delta pp + \varepsilon p^3}{2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp},$$

fiet ergo $\int P \partial p = -\tfrac{1}{2} l(2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp)$, ideoque $e^{\int P \partial p} = \frac{1}{\sqrt{(2\lambda + \gamma + 2\delta p + \varepsilon pp)}}$.

quocirca

quocirca integratio dabit

$$\frac{v}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}} = \int \frac{\partial p\,(4\beta+2\gamma p+3\delta pp+\varepsilon p^3)}{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)^{\frac{3}{2}}}$$

§. 18. Vt nunc poſtremam formulam integralem facillime evolvamus, ponamus ejus integrale eſſe $\frac{A+Bp+Cpp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}}$, cujus formae differentiale debitum habebit denominatorem, at vero numerator ad hanc formam reducitur:

$$\partial p\,((2\lambda+\gamma)B-A\delta)+p\partial p\,(B\delta+2C(2\lambda+\gamma)-A\varepsilon)$$
$$+pp\partial p\,.\,3\delta C+p^3\partial p\,.\,\varepsilon C,$$

hinc ergo obtinemus quatuor ſequentes aequationes:

1. $4\beta=(2\lambda+\gamma)B-A\delta$,
2. $2\gamma=B\delta+2C(2\lambda+\gamma)-A\varepsilon$,
3. $3\delta=3\delta C$,
4. $\varepsilon=\varepsilon C$,

vbi binae poſtremae manifeſto praebent $C=1$, tum vero ſecunda fit $B\delta+4\lambda-A\varepsilon=0$, ex qua cum prima conjuncta elicitur $B=\frac{4\beta\varepsilon+4\lambda\delta}{(2\lambda+\gamma)\varepsilon-\delta\delta}$,

ac denique $A=\frac{4\beta\delta+4\lambda(2\lambda+\gamma)}{(2\lambda+\gamma)\varepsilon-\delta\delta}$, quibus valoribus inventis aequatio noſtra integralis erit

$$\frac{qq}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}} = \frac{A+Bp-Cpp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}}+\Delta,$$

ſive $\Delta=\frac{qq-A-Bp-Cpp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}}$, ſive $-\Delta=\frac{Cpp-qq+A+Bp}{\sqrt{(2\lambda+\gamma+2\delta p+\varepsilon pp)}}$, cujus quadratum a valore ipſius $\frac{16\alpha}{\delta\delta-\gamma\varepsilon-2\lambda\varepsilon}$ ſubtractum relinquit quantitatem conſtantem.

DE

DE VARIIS MODIS NUMEROS PRAEGRANDES EXAMINANDI, UTRUM SINT PRIMI NEC NE?

Auctore *L. EVLERO.*

Conventui exhibuit die 16 Mart. 1778.

§. 1.

Cum nimis moleſtum et operoſum eſſet, hoc examen per principia vulgaria inſtituere, dum ſcilicet diviſio tentetur per omnes numeros primos radice quadrata numeri propoſiti minoribus: plurimum intererit ejusmodi methodos tradere, quarum ope hoc negotium multo facilius et brevius expediri queat. Tales autem methodi innituntur potiſſimum ſequenti propoſitioni: *Si numerus* N *duplici modo contineatur in tali formula*: $\alpha xx + \beta yy$, *vbi* α *et* β *ſunt numeri dati quicunque, tum certum eſt, illum numerum* N *non eſſe primum, atque adeo eius diviſores facile inveſtigari poterunt.*

§. 2. Ponamus igitur numerum quemcunque propoſitum N duplici modo in hac formula $\alpha xx + \beta yy$ contineri, ac primo quidem eſſe $N = \alpha aa + \beta bb$, tum vero etiam $N = \alpha AA + \beta BB$. Jam a priori aequatione per BB multiplicata auferatur altera per bb multiplicata, vt obtineatur haec aequatio: $N(B^2 - bb) = \alpha(aaB^2 - A^2bb)$, quae per factores ita referri poteſt:

$$N(B + b)(B - b) = \alpha(aB + Ab)(aB - Ab),$$

vnde

vnde ſatis patet, numerum N primum eſſe non poſſe, ſed certe communem factorem habere, tam cum formula $aB + Ab$ quam cum formula $aB - Ab$, quandoquidem iſtae formulae diverſae ſunt a prioribus $B + b$ et $B - b$.

§. 3. Quo haec concluſio clarius perſpiciatur, eam aliquot exemplis illuſtremus. Sit ſcilicet $N = 77$, qui numerus duplici modo in forma $5xx + 2yy$ continetur; primo enim eſt $N = 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 6^2$, tum vero etiam $N = 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2$, ſicque habebimus $a = 1$, $b = 6$, $A = 3$ et $B = 4$, hincque $aB + Ab = 22$; cum quo numero numerus propoſitus N factorem habet communem 11. Altera formula fit $aB - Ab = 14$, cum quo numero numerus N factorem communem habet 7. Sicque jam nacti ſumus factores numeri propoſiti N, qui ſunt 7 et 11.

§. 4. Sit numerus propoſitus 703, qui duplici modo in forma $7xx + 3yy$ continetur; primo enim eſt

$N = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 15^2$, tum vero eſt etiam

$N = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1^2$.

Prior formula dat 152, cujus numeri cum 703 maximus communis diviſor eſt 19; at vero numerus 703 cum altera formula 148 diviſorem habet communem 37. Eſt vero vtique $703 = 19 \cdot 37$. Hoc etiam inde facilius patet, quod fit $152 = 8 \cdot 19$, vnde, quia 8 nullum factorem ipſius 703 continet, neceſſe eſt vt 19 ejus ſit factor. Simili modo cum $148 = 4 \cdot 37$; ob eandem rationem neceſſe eſt vt 37 ſit factor numeri 703.

§. 5. Conſideremus numerum majorem 12091 duplici modo in forma $7xx + 11yy$ contentum. Hic cum ſit

1°) $12091 = 7 \cdot 40^2 + 11 \cdot 9^2$,

tum vero etiam 2°) $12091 = 7 \cdot 4^2 + 11 \cdot 33^2$,

hinc

hinc forma examinanda $40 . 30 \pm 4 . 9$, quae per 12 diviſa dat 110 ± 3. Nunc autem eſt 113 primus, ideoque factor numeri propoſiti; deinde etiam 107 pariter eſt primus, propterea etiam factor; revera autem eſt $12091 = 113 . 107$.

Theorema I.

Si fuerit tam $N = \alpha a^2 + \beta b^2$ *quam* $N = \alpha A^2 + \beta B^2$, *tum formulae* $aB + Ab$, *et* $aB - Ab$ *praebent factores numeri* N, *poſtquam ſcilicet per numeros, qui factores eſſe nequeunt ipſius* N, *fuerint diviſae.*

§. 6. Poſſunt vero etiam ex binis reſolutionibus ſupra exhibitis numeri N aliis modis factores inveſtigari, ſcilicet a priori ducta in αA^2 ſubtrahatur, poſterior ducta in βbb, vt prodeat

$$N(\alpha A^2 - \beta B^2) = (\alpha \alpha a^2 A^2 - \beta \beta b^2 B^2)$$
$$= (\alpha a A + \beta b B)(\alpha a A - \beta b B)$$

vnde patet, ambas has formulas factores continere numeri N, id quod per ſuperiora exempla etiam illuſtremus.

§. 7. In exemplo §. 3 erat

$$77 = 5 . 1^2 + 2 . 6^2,$$

et $77 = 5 . 3^2 + 2 . 4^2$,

vnde colligitur forma $5 . 1 . 3 \pm 2 . 6 . 4$, quae per 3 depreſſa fit $5 . 1 \pm 4 . 4$. Hinc oriuntur iſti duo numeri 21 et 11, quorum prior per 3 diviſus dat 7.

Exemplum §. 4. allatum erat $703 = 7 . 2^2 + 3 . 15^2$, et $703 = 7 . 10^2 + 3 . 1^2$, vnde forma oritur $7 . 2 . 10 \pm 3 . 1 . 15$, quae per 5 depreſſa dat 28 ± 9, ideoque tam 37 quam 19 ſunt factores numeri propoſiti 703 ſupra inventi.

Tertium

Tertium exemplum §. 5. erat $12091 = 7 \cdot 40^2 + 11 \cdot 9^2$, et $12091 = 7 \cdot 4^2 + 11 \cdot 33^2$, unde oritur haec formula: $7 \cdot 40 \cdot 4 \pm 11 \cdot 9 \cdot 33$, ex qua pro ſigno ſuperiori oritur 4387, qui numerus cum numero propoſito diviſorem habet communem 107. Deinde pro ſigno inferiori fit 2147, qui cum numero propoſito diviſorem habet communem 113, ut ante.

Theorema II.

Si fuerit tam $N = \alpha aa + \beta bb$ *quam* $N = \alpha A^2 + \beta B^2$, *tum etiam tam iſta formula* $\alpha a A + \beta b B$, *quam* $\alpha a A - \beta b B$, *cum numero propoſito* N *communem habebit diviſorem, unde ejus factores innoteſcent.*

§. 8. Hinc autem deducuntur aliae formulae imprimis memorabiles, quae cum ipſo numero N communes habebunt factores. Additis enim binis illis formulis, vt habeatur $2N = \alpha(aa + A^2) + \beta(bb + B^2)$, huc addatur formula ante inventa bis ſumpta $2\alpha a A \pm 2\beta b B$, vel etiam ſubtrahatur; quoniam enim cum ipſo numero N communem habet factorem, idem factor communis in membro dextro contineri debebit. Hoc modo obtinebitur

$$2N \pm 2\alpha a A \pm 2\beta b B = \alpha(a \pm A)^2 + \beta(b \pm B)^2,$$

quae forma ideo eſt notabilis, quia ipſi formae propoſitae eſt ſimilis, et quia quatuor variationes in illa locum habent, totidemque modis etiam factores numeri propoſiti aſſignari poterunt.

§. 9. Quodſi ambae formulae $a \pm A$ et $b \pm B$ habeant factorem communem, quoniam is in N contineri nequit, eum ſtatim e medio tolli conveniet. Veluti ſi haec fractio $\frac{a \pm A}{b \pm B}$ reducatur ad hanc formam ſimpliciſſimam $\frac{p}{q}$, tum iſta for-

formula $\alpha pp + \beta qq$ factorem numeri propoſiti praebebit, quippe qui erit communis diviſor hujus ipſius formulae cum numero propoſito N.

§. 10. Illuſtremus etiam hanc methodum per exempla ſupra allata, in quorum primo erat

$77 = 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 6^2$ et

$77 = 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2$, unde formetur fractio

$\frac{p}{q} = \frac{3 \pm 1}{6 \pm 4}$, atque formula $5pp + 2qq$ dabit diviſorem ipſius 77. Hinc autem erit 1°) $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$, tum vero formula $5 \cdot 4 + 2 \cdot 25$, per 10 depreſſa, dat $2 + 5 = 7$.

2°) fit $\frac{p}{q} = 2$, hincque $20 + 2 = 2 \cdot 11$.

3°) fit $\frac{p}{q} = \frac{1}{5}$, hincque formula $5 \cdot 1 + 2 \cdot 25$, per 5 depreſſa, dat $1 + 2 \cdot 5 = 11$. Tandem erit 4°). $\frac{p}{q} = 1$ et formula $5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7$.

§. 11. Simili modo pro ſecundo exemplo, quo erat

$703 = 7 \cdot 2^2 + 3 \cdot 15^2$ et

$703 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1^2$, habebimus

$\frac{p}{q} = \frac{10 \pm 2}{15 \pm 1}$. et formula $7pp + 3qq$ dabit factorem numeri 703. Hinc fit 1°). $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$ et factor $7 \cdot 9 + 3 \cdot 16$, per ternarium depreſſus, erit $7 \cdot 3 + 16 = 37$. Porro 2°) fit $\frac{p}{q} = \frac{6}{7}$ et formula $7 \cdot 36 + 3 \cdot 49$, per $7 \cdot 3$ depreſſa, dat factorem 19. Jam 3°) fit $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, unde formula $7 \cdot 1 + 3 \cdot 4$ dat factorem 19. Tandem 4°) fiet $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$, unde formula $7 \cdot 16 + 3 \cdot 49$, per 7 depreſſa, praebet factorem 37.

§. 12. Tertium denique exemplum erat

$12091 = 7 \cdot 40^2 + 11 \cdot 9^2$ et

$12091 = 7 \cdot 4^2 + 11 \cdot 33^2$, ex quo fit

$\frac{p}{q} = \frac{40 \pm 4}{33 \pm 9}$ et formula $7pp + 11qq$ dabit: 1°) $\frac{p}{q} = \frac{22}{21}$; hinc formula $7 \cdot 22^2 + 11 \cdot 21^2$, per $7 \cdot 11$ depreſſa, dabit factorem 107. Erit 2°) $\frac{p}{q} = \frac{11}{6}$, hinc forma $7 \cdot 11^2 + 11 \cdot 6^2$, per 11 depreſſa, dat factorem 113. Porro ſit 3°) $\frac{p}{q} = \frac{6}{7}$, hinc formula $7 \cdot 6^2 + 11 \cdot 7^2$, per 7 depreſſa praebet factorem 113. Tandem erit 4°) $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, unde formula $7 \cdot 3^2 + 11 \cdot 2^2$ ſtatim dat factorem 107.

Theorema III.

Si fuerit tam $N = \alpha aa + \beta bb$ *quam* $N = \alpha A^2 + \beta B^2$, *hincque formetur fractio* $\frac{p}{q} = \frac{a \pm A}{b \pm B}$; *tum iſta formula* $\alpha pp + \beta qq$ *ſemper continebit factorem numeri propoſiti* N, *qui ſcilicet vel ipſe ſe prodit, vel facta diviſione ſive per* α, *ſive per* β, *ſive per* $\alpha\beta$, *quandoque etiam per alium numerum ſimpliciſſimum* 2, *ejusve poteſtatem.*

Demonstratio.

§. 13. Cum ſit $\alpha aa + \beta bb = \alpha A^2 + \beta B^2$, erit $\alpha(aa - A^2) = \beta(BB - bb)$, hincque $\frac{a + A}{B + b} = \frac{\beta(B - b)}{\alpha(a - A)}$. Sit nunc $\frac{p}{q}$ fractio ſimpliciſſima huic vtrique formulae aequalis, ac pro priore ponatur $a + A = mp$ et $B + b = mq$, pro poſteriore vero ſit $\beta(B - b) = \alpha\beta np$ et $\alpha(a - A) = \alpha\beta nq$, unde ergo fiet $B - b = \alpha np$ et $a - A = \beta nq$. Ex his quatuor aequalitatibus definiantur numeri a, A et b, B, qui erunt $a = \frac{mp + \beta nq}{2}$; $A = \frac{mp - \beta nq}{2}$; $B = \frac{mq + \alpha np}{2}$ et $b = \frac{mq - \alpha np}{2}$. Cum nunc ſit $N = \alpha aa + \beta bb$, reperietur facta ſubſtitutione

$$N = \tfrac{1}{4}\alpha(mp + \beta nq)^2 + \tfrac{1}{4}\beta(mq - \alpha np)^2$$

ſive per factores

$$N = \tfrac{1}{4}\,\alpha\,(mmpp + \beta\beta nnqq) + \tfrac{1}{4}\,\beta\,(mmqq + \alpha\alpha nnpp),$$

quae forma reducitur ad hoc productum:

$$\tfrac{1}{4}\,(mm + \alpha\beta nn)\;(\alpha pp + \beta qq).$$

Unde patet formulam $\alpha pp + \beta qq$ continere diviſorem numeri N, ſimul vero etiam patet quotum hinc ortum eſſe formae $mm + \alpha\beta nn$.

§. 14. Evidens autem eſt in hac demonſtratione litteras α et β ſupponi poſitivas; ſi enim altera eſſet negativa, evenire poſſet, vt factor inventus $\alpha pp + \beta qq$ abiret in unitatem, id quod unico exemplo oſtendiſſe ſufficiet, quo eſt $7 = 2 \cdot 8^2 - 1 \cdot 11^2$ et $7 = 2 \cdot 22^2 - 1 \cdot 31^2$. Hic ergo eſt $N = 7$, ideoque numerus primus; tum vero $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $a = 8$; $b = 11$; $A = 22$ et $B = 31$, unde fit $\frac{p}{q} = \frac{22 \pm 8}{31 \pm 11}$, ita ut quatuor fractiones hinc ortae ſint 1°) $\frac{p}{q} = \frac{5}{7}$; 2°) $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$; 3°) $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$; et 4°). $\frac{p}{q} = \frac{7}{10}$, ergo formulae $2pp - qq$ valores erunt 1°). 1, 2°). 14, qui poſtremus, per 2 depreſſus, dat 7; 3°). 7. et 4°). 2, qui poſtremus redigitur ad 1. Evidens autem eſt litteras a et A; b et B pro lubitu tam poſitive quam negative accipi poſſe.

Theorema. IV.

Si duo numeri M *et* N *ejusdem formae* $\alpha xx + \beta yy$ *in ſe invicem multiplicentur, productum* MN *ſemper erit formae* $\alpha\beta xx + yy$, *idque duplici modo.*

Demonſtratio.

§. 15. Si enim ponamus $M = \alpha pp + \beta qq$ et $N = \alpha rr + \beta ss$, tum facta multiplicatione reperitur $MN = \alpha\alpha pprr + \beta\beta qqss + \alpha\beta ppss + \alpha\beta qqrr$, quod productum manifeſto reducitur ad hanc formam: MN =

$MN = \alpha\beta(ps \pm qr)^2 + (\alpha pr \mp \beta qs)^2$, hoc eſt ad formam $\alpha\beta xx + yy$, exiſtente $x = ps \pm qr$ et $y = \alpha pr \mp \beta qs$; unde ſimul patet, hanc reſolutionem ſemper duplici modo fieri poſſe.

Theorema V.

Si duo numeri M *et* N, *quorum alter* M *ſit formae* $\alpha xx + \beta yy$, *alter vero* N *formae* $\alpha\beta xx + yy$, *in ſe invicem ducantur*, *productum* M N *ſemper erit formae* $\alpha xx + \beta yy$, *idque duplici modo.*

Demonſtratio.

§. 16. Si enim ponamus $M = \alpha pp + \beta qq$ et $N = \alpha\beta rr + ss$, facta multiplicatione reperitur $MN = \alpha\alpha\beta pprr + \beta qqss + \alpha\beta\beta qqrr + \alpha ppss$, quod productum manifeſto reducitur ad hanc formam: $MN = \alpha(\beta qr \pm ps)^2 + \beta(\alpha pr \mp qs)^2$, ideoque eſt formae $\alpha xx + \beta yy$, exiſtente $x = \beta qr \pm ps$ et $y = \alpha pr \mp qs$, quae ergo reſolutio, ob ſigna ambigua, ſemper duplici modo inſtitui poteſt.

§. 17. Hic animadvertiſſe juvabit, binas formulas $\alpha xx + \beta yy$ et $\alpha\beta xx + yy$ arctiſſimo vinculo inter ſe eſſe conjunctas; quod etiam inde patet, quod alteram in alteram facillime convertere liceat. Si enim in priore formula ponatur $x = \beta z$ ea abit in $\beta(\alpha\beta zz + yy)$; ac in altera ſi ponatur $y = \alpha v$, tum ea accipiet hanc formam: $\alpha(\beta xx + \alpha vv)$. Infra autem multo clarius patebit, ambas iſtas formulas paribus proprietatibus eſſe praeditas, ita vt, quod de una demonſtrabitur, id etiam de altera locum habere queat.

§. 18. Cum igitur demonſtratum ſit, omnes numeros, qui duplici modo in tali forma $\alpha xx + \beta yy$ continentur, certe non

non eſſe primos, atque adeo eorum factores ſemper aſſignari poſſe: nunc quaeſtio maximi momenti ſe offert, num omnes numeri, qui unico tantum modo in tali formula continentur, etiam ſemper pro primis haberi queant? Hoc autem pendet a natura formulae $\alpha xx + \beta yy$, ſive a numeris α et β, quorum duo genera conſtitui debent. Dantur enim ejusmodi valores pro his litteris, vt omnes numeri, qui unico modo in tali formula continentur, certe futuri ſint primi; praeterea vero etiam dantur ejusmodi valores pro α et β, vbi talis concluſio falleret, cujusmodi eſt haec formula $7xx + 2yy$, quae ſumpto $x = 1$ et $y = 2$ dat numerum compoſitum 15, qui tamen unico tantum modo in hac formula continetur.

§. 19. Cum igitur nobis ſit propoſitum hinc methodum certam deducere, numeros praemagnos examinandi, utrum ſint primi, nec ne: manifeſtum eſt ad hunc ſcopum formulas tantum prioris generis $\alpha xx + \beta yy$ adhiberi poſſe, de quibus ſcilicet certi ſumus, omnes numeros, qui in iis unico tantum modo contineantur, etiam revera eſſe primos. Hanc ob rem nobis ante omnia in certa criteria inquirere juvabit, quibus tales formulae dignoſci queant a formulis poſterioris generis, in quibus etiam numeri compoſiti unico tantum modo contineri poſſunt, quas ergo formulas ab hoc inſtituto penitus excludi oportet; quam ob rem accuratius diſcrimen inter has duplicis generis formulas perſcrutari conveniet.

Theorema VI.

Si in formula $\alpha xx + \beta yy$ unico modo contineatur numerus compoſitus mp, *exiſtente* $m > 2$, *tunc etiam innumerabiles*

les alii ejusmodi numeri compoſiti exhiberi poſſunt, qui etiam unico tantum modo in hac formula contineantur.

Demonſtratio.

§. 20. Hic ante omnia probe tenendum eſt, non ſolum numeros α et β inter ſe primos eſſe debere, ſed etiam numeros x et y inter ſe primos eſſe accipiendos, atque adeo ita, vt inſuper numerus x primus ſit ad β, et y ad α; quibus notatis patet etiam factores m et p ad quatuor numeros α, β, x et y primos eſſe futuros.

§. 27. Ponamus igitur eſſe $mp = \alpha aa + \beta bb$, ac primum obſervo pluribus modis aliud productum mq exhiberi poſſe, quod unico modo in formula affini $\alpha\beta xx + yy$ contineatur. Sit enim $mq = \alpha\beta\partial\partial + cc$, ut hinc fiat

$$\beta\partial\partial mp - aamq = \beta\beta bb\partial\partial - aacc, \quad \text{ideoque}$$

$$m(\beta\partial\partial p - aaq) = (\beta b\partial + ac)(\beta b\partial - ac),$$

unde ſi numeri ∂ et c ita accipiantur, vt vel $\beta b\partial + ac$ vel $\beta b\partial - ac$ per m fiat diviſibilis, tum hinc etiam valores idonei pro q reperientur. Sit enim $\beta b\partial + ac = \delta m$, erit $\beta\partial\partial p - aaq = \delta(\beta b\partial - ac)$, ideoque $q = \frac{\beta ddp - \delta(\beta bd - ac)}{aa}$, unde ſufficiet minimum valorem ipſius q accipere, ita vt certi eſſe queamus numerum mq unico modo in formula $\alpha\beta xx + yy$ contineri; quod vel inde patet, ſi ſumpto $a = 1$ et $\partial = 1$ fuerit $mp = \alpha + \beta bb$, tum vero q ita ſumatur, vt ſit $mq < 4\alpha\beta$. Tum enim evidens eſt productum mq plus uno modo in formula $\alpha\beta xx + yy$ certe non contineri, quia ſumpto $x = 2$ haec formula jam habitura eſſet valorem majorem.

§. 21. Ducantur nunc in ſe invicem binae illae formulae, ac reperietur

$$mmpq = \alpha(aacc + \beta\beta bb\partial\partial) + \beta(bbcc + \alpha\alpha aa\partial\partial),$$

quae

quae forma transformari poteſt in hanc: $mm\,pq = \alpha(ac \pm \beta b\partial)^2 + \beta(bc \mp \alpha a\partial)^2$, unde per mm dividendo colligitur

$$pq = \alpha\left(\frac{ac \pm \beta bd}{m}\right)^2 + \beta\left(\frac{bc \mp \alpha ad}{m}\right)^2$$

vbi quidem ſigna ambigua duplicem reſolutionem innuere videntur; verum hic probe obſervandum eſt, alteram tantum in numeris fractis ſubſiſtere, ideoque a noſtro inſtituto eſſe removendam. Si enim ſigna ſuperiora praebeant numeros integros, inferiora dabunt fractiones: nam ſi ſumma duorum numerorum A + B per m fuerit diviſibilis, neque vero numeri A et B ſeorſim hanc diviſionem admittant, tum certe differentia A — B non erit diviſibilis, ſolo caſu excepto quo $m = 2$.

§. 22. Cum igitur productum pq unico modo in integris (de quibus ſolis hic agitur) in formula $\alpha xx + \beta yy$ contineatur, ſimili modo ex hoc producto pq alia nova producta derivari poterunt, quae pariter unico tantum modo in noſtra formula contineantur.

Theorema VII.

Quodſi productum quantumvis magnum pq *unico tantum modo in formula $\alpha xx + \beta yy$ contineatur, tunc etiam minora hujusmodi producta exhiberi poterunt, quae pariter unico tantum modo contineantur.*

Demonſtratio.

§. 23. Ponamus enim eſſe $pq = \alpha ff + \beta gg$, atque haec forma comparetur cum modo ante inventa $\alpha\left(\frac{ac \pm \beta b\partial}{m}\right)^2 + \beta\left(\frac{bc \mp \alpha a\partial}{m}\right)^2$, vbi quidem ſigna ſuperiora tantum valeant, hincque deducemus $f = \frac{ac + \beta bd}{m}$ et $g = \frac{c - \alpha a\partial}{m}$, ex quibus

quibus duabus aequationibus ſemper pluribus modis quatuor litterae a, b, c et ∂ definiri poterunt, unde igitur eum modum eligi conveniet, qui pro m minimum producat valorem, qui quidem ſemper major erit quam 2.

§. 24. Ex his duabus formis deducatur primo fractio $\frac{f}{g} = \frac{\alpha c + \beta b d}{b c - \alpha a d}$, unde derivetur fractio $\frac{c}{\partial} = \frac{\alpha a f + \beta b g}{f b - a g}$. Hic jam pro litteris a et b ejusmodi valores quaerantur, vt numerator et denominator hujus fractionis minimum acquirat diviſorem communem, hincque numeri c et ∂ ad minimos valores reducantur.

§. 25. Hoc autem ſequenti modo haud difficulter praeſtari poterit. Ponamus Δ eſſe minimum communem diviſorem harum duarum formularum: I. $\alpha a f + \beta b g$ et II. $b f - a g$, eritque etiam Δ hujus formulae inde formatae a $(\alpha f f + \beta g g)$ minimus diviſor; hincque patet pro Δ ſumi poſſe factorem quendam formae $\alpha f f + \beta g g$; unde cum hujus formulae factores ſint p et q, ſumatur $\Delta = p$, et fractio noſtra ſtatim per Δ deprimi poterit, unde porro etiam numeri c et ∂ innoteſcent, quibus inventis ſponte ſe prodit numerus $m = \frac{a c + \beta b d}{f}$.

§. 26. Plurimum juvabit hoc exemplo illuſtrare formulae $7xx + 2yy$, ita vt ſit $\alpha = 7$ et $\beta = 2$, in qua formula iſtud productum $59 . 131 = 7729$ unico modo continetur, ſcilicet ſi $x = 19$ et $y = 51$. Habemus igitur $p = 59$; $q = 131$; $f = 19$ et $g = 51$, unde deducetur fractio $\frac{c}{\partial} = \frac{7 . 19 a + 2 . 51 b}{19 b - 51 a}$

§. 27. Nunc a et b ita accipi poterunt, vt communis diviſor numeratoris ac denominatoris euadat $\Delta = 59$; atque adeo ſufficit ſoli denominatori hunc diviſorem dediſſe.

Ponamus igitur $19b - 51a = 59n$, eritque $19b = 59n + 51a$, conſequenter $b = 3a + 3n + \frac{2n - 6a}{19}$. Ponatur nunc $\frac{n - 3a}{19} = A$, vt ſit $b = 3a + 3n + 2A$, et cum inde fiat $n - 3a = 19A$, erit $3a = n - 19A$, ideoque $a = -6A + \frac{n - A}{3}$. Ponatur porro $\frac{n - A}{3} = B$, erit $A = n - 3B$, ideoque $a = -6n + 19B$ ac denique $b = -13n + 51B$.

§. 28. Vt iam litterae a et b quam minimae reddantur, ſumatur $B = 0$ et $n = -1$, et denominator evadet $= 59$; tum erit $a = 6$ et $b = 13$, unde fiet noſtra fractio $\frac{c}{\partial} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 19 + 2 \cdot 13 \cdot 51}{-59} = -\frac{2124}{59} = -36$, ideoque $c = 36$ et $\partial = -1$, unde reperitur $m = 10$.

§. 29. Nunc igitur nacti ſumus novum productum minus $mp = 10 \cdot 59$, quod etiam in noſtra forma $7xx + 2yy$ continetur, quae ſi fuerit $7ff + 2gg$. erit $f = 6$ et $g = 13$. Erit igitur $\frac{f}{g} = \frac{6}{13} = \frac{ac - 2b\partial}{bc - 7a\partial}$, unde reperitur $\frac{c}{\partial} = \frac{7 \cdot 6a + 2 \cdot 13b}{6b - 13a}$. Sumantur nunc a et b ita, ut denominator $6b - 13a$ diviſorem admittat 10, quod fit ſumto $a = 2$ et $b = 6$; fiet enim $\frac{c}{\partial} = 24$, ideoque $c = 24$ et $\partial = 1$, unde fit $m = 10$, vt ante, ideoque $7aa + 2bb = 10 \cdot 10$.

§. 30. En ergo novum productum $10 \cdot 10$, pro quo fit $f = 2$ et $g = 6$. Statuatur igitur $\frac{f}{g} = \frac{2}{6} = \frac{ac - 2b\partial}{bc - 7a\partial}$, unde reperitur $\frac{c}{\partial} = \frac{7 \cdot 2a + 2 \cdot 6b}{2b - 6a} = \frac{7a + 6b}{b - 3a}$. Sumatur ergo $a = -2$ et $b = 4$, qui numeri, per 2 depreſſi, dant $a = -1$, et $b = 2$, hincque $\frac{c}{\partial} = 1$ ideoque $c = 1$ et $\partial = 1$, ex quo reperitur $m = 3$, unde fit $7aa + 2bb = 3 \cdot 5$, quod ſine dubio eſt minimum productum.

Alia

Alia demonſtratio ejusdem theorematis.

§. 31. Cum productum pq unico modo in forma illa $\alpha xx + \beta yy$ contineatur, ſit $pq = \alpha ff + \beta gg$, atque evidens eſt factores p et q non in eadem forma contineri, quia alioquin productum duplicem reſolutionem admitteret. Conſideretur nunc factor minor, qui ſit q, atque formula generalis $\alpha xx + \beta yy$ infinitis modis per q diviſibilis fieri poteſt, ſumendo $x = nf \pm \mu q$ et $y = ng \pm \nu q$. Prodibit enim

$$\alpha(nnff \pm 2\mu nfq + \mu\mu qq) + \beta(nngg \pm 2\nu gq + \nu\nu qq)$$

quae formula, ob $nn\ (\alpha ff + \beta gg) = nnpq$, abit in

$$q(nnp \pm \alpha(2\mu nf + \mu\mu q) \pm \beta(2\nu ng + \nu\nu q);$$

vbi litterae μ, ν et n facile ita accipi poſſunt, vt poſterior factor, qui ſit r, multo minor evadat quam q, ita vt jam habeamus productum qr, exiſtente $r < q$. Tum vero ſimili modo ex hoc producto aliud denuo minus elici poterit, quod ſit $= rs$, exiſtente $s < r$; atque hac ratione mox perveniri poterit ad productum minimum, ſi modo in qualibet operatione valores ipſarum x et y minimi reddantur.

§. 32. Haec clariora evadent, ſi ad exemplum propoſitum applicentur, quo erat $pq = 7 \cdot 19^2 + 2 \cdot 51^2 = 7729$, vbi ergo $p = 131$ et $q = 59$. Cum igitur hic ſit $f = 19$ et $g = 51$, valores generales erunt: $x = 19n - 59\mu$ et $y = 51n - 59\nu$, qui pluribus modis multo minores reddi poſſunt quam f et g. Veluti ſumptis n, μ et $\nu = 1$, fiet $x = -40$ et $y = -8$, qui numeri, per 8 depreſſi, evadunt $x = -5$ et $y = -1$, unde prodit $7xx + 2yy = 59 \cdot 3$, ideoque $r = 3$. Nunc ergo cum ſit $f = 5$ et $g = 1$, novi valores erunt $x = 5n - 3\mu$ et $y = n - 3\nu$ unde valores minimi, per 2

 de-

depreſſi, erunt $x = 1$ et $y = 1$; quare productum minimum reſultat $7 + 2 = 3 . 3$; unde facile intelligitur, quomodo pro quovis caſu operationes ſint inſtituendae.

§. 33. Totum hoc ratiocinium ſimili modo inſtitui poteſt pro formula $\alpha\beta xx + yy$, ita vt, ſi numeri quantumvis magni compoſiti in ea ſemel tantum contineantur, ex iis continuo minores reperiri queant, quae pariter unico tantum modo in hac formula contineantur. Atque adeo has operationes eo vsque continuare licebit, donec ad numeros compoſitos perveniatur, qui ſint minores quam $4\alpha\beta$. Quod etiam praecedente exemplo illuſtrari poteſt; quandoquidem numerus $59 . 131$ etiam unico modo in formula $14 xx + yy$ continetur, exiſtente $x = f = 6$ et $y = g = 85$, unde novi valores erunt $x = 6n - 59\mu$ et $y = 85 n - 59 \nu$. Jam hic notetur litteras n et ν ſemper ita accipi poſſe, vt fiat $x = 1$: poſito enim $6n - 59\mu = 1$, erit $n = 10 \mu + \frac{\mu + 1}{6}$. Capiatur ergo $\mu = 1$, eritque $n = 10$ et $x = 1$, tum vero $y = 850 - 59 \nu$, cujus valor minimus prodit ex $\nu = 14$, unde fit $y = 24$. Adepti igitur ſumus hanc formam: $14 . 1^2 + 24^2 = 59 . 10$. Eadem autem forma factorem habebit 10, ſi ſumatur $y = 24 - 10 \nu = 4$, unde reſultat productum adhuc minus $14 . 1^2 + 4^2 = 30 . = 10 . 3$, quod vtique minus eſt quam $4\alpha\beta$. Quodſi enim fuerit numerus compoſitus $pq < 4\alpha\beta$, hic caſus locum habere nequit, niſi fuerit $x = 1$, unde y etiam datum ſortietur valorem. Hinc viciſſim manifeſto ſequitur, ſi nullus numerus compoſitus minor quam $4\alpha\beta$ in formula $\alpha\beta xx + yy$ contineatur, tales etiam in numeris maximis non dari; conſequenter quoties quispiam numerus in tali formula unico tantum modo continetur, tum certo concludere poterimus,

illum

illum numerum eſſe primum; unde ſequens problema maximi momenti reſolvere licebit.

PROBLEMA.

Propoſitae formulae cujuscunque $\alpha xx + \beta yy$ *naturam perſcrutari, utrum numeri unico modo in ea contenti tuto concludi queant eſſe primi, an vero iſta concluſio fallere queat, quippe quo poſteriori caſu tales formulas a propoſito noſtro excludi oportet.*

Solutio.

§. 34. Primo ex iis, quae ſunt allata, ſatis intelligitur, hanc formulam eadem proprietate praeditam eſſe atque ejus affinem $\alpha\beta xx + yy$. Sicque totum judicium eo redit, vtrum omnes numeri ſemel tantum in hac formula contenti tuto pro primis haberi queant, nec ne? Ad hanc quaeſtionem decidendam ſufficiet examinaſſe, vtrum dentur numeri compoſiti minores quam $4\alpha\beta$, qui in hac formula contineantur. Si enim tales numeri occurrant, non ſolum haec formula $\alpha\beta xx + yy$, ſed etiam illa $\alpha xx + \beta yy$ a propoſito noſtro est excludenda: contra autem, ſi nulli tales numeri compoſiti occurrant, vtraque formula ad numeros primos explorandos tuto vti licebit; quandoquidem omnes numeri vnico modo contenti certe futuri ſunt primi.

§. 35. Hinc igitur ſtatim, quia nulli alii numeri, niſi minores quam $4\alpha\beta$, in judicium ingrediuntur, ponatur $x = 1$, vt habeatur formula $\alpha\beta + yy$, vbi ipſi y nullos alios valores tribui opus eſt, niſi qui ſint ad $\alpha\beta$ primi. Reliquis igitur

igitur excluſis ipſi y ſucceſſive tribuantur tales valores, donec numeri reſultantes terminum $4\alpha\beta$ excedant.

§. 36. Jam nihil reliquum eſt, niſi vt numeri hoc modo prodeuntes examinentur, vtrum ſint primi, an vero compoſiti; ſi enim unicu compoſitus occurrat, eam formulam ſtatim excludi oportebit. Hic autem probe eſt tenendum, numeros quadratos in hoc judicio inter compoſitos numerari non debere, propterea quod ſi fuerit $\alpha\beta + yy = kk$, idem quadratum inſuper alio quoque modo in formula illa $\alpha\beta xx + yy$ continetur, ſcilicet quando $x = 0$ et $y = k$; quamobrem, quoties in his evolutionibus numeri quadrati occurrent, ii non compoſitis numeris, ſed primis accenſeri debebunt *).

§. 37. Hanc regulam illuſtremus exemplo formulae $7xx + 2yy$, vbi $\alpha = 7$ et $\beta = 2$, ita vt formula $14 + yy$ ſit examinanda. Hic ergo valores ipſi y tribuendi primo debent eſſe impares, neque per 7 diviſibiles idque tantum eo vsque, quamdiu numeri prodeuntes non ſuperabunt terminum $4 \cdot 14 = 56$. Hoc examen ſequenti modo commode repraeſentabitur;

$$14 + 1;\ 3^2,\ 5^2$$
$$15,\ 23,\ 39$$
$$c.\quad p.\quad c.$$

vbi

*) Praeterea vero ſi etiam numeri pares prodeant, quoniam ſupra §. 21 vidimus, ex valoribus litterae m vnitatem et binarium excludi: hinc ſi p ſit numerus primus, in hac inveſtigatione, praeter ipſum numerum p, etiam ejus quadratum pp, ſimulque ejus duplum $2p$, vt primi ſpectari debebunt; praeterea etiam omnes poteſtates binarii pro primis ſpectari debent.

vbi numeri compoſiti littera *c*, primi vero littera *p* deſignentur. Hinc igitur patet a noſtro inſtituto excludi debere non ſolum formulam $14xx + yy$, ſed etiam $7xx + 2yy$.

§. 38. Simili modo examinetur formula $11xx + yy$, atque in formula $11 + yy$ ipſi y tribuantur valores ad 11 primi, vsque ad terminum 44, quod ergo examen ita referetur:

$$\frac{11 + 1;\ 2^2.\ 3^2.\ 4^2.\ 5^2}{12.\ 15.\ 20.\ 27.\ 36}$$
$$c\quad c\quad c\quad c\quad c$$

Quoniam igitur hic omnes numeri reſultantes ſunt compoſiti, hunc numerum 11 maxime excludi oportet.

Examinetur nunc numerus 13, vtrum excludi debeat, nec ne, quod examen ita inſtituetur:

$$\frac{13 + 1;\ 2^2.\ 3^2.\ 4^2.\ 5^2.\ 6^2}{14.\ 17,\ 22,\ 29,\ 38,\ 49}$$
$$2p\quad p,\ 2p\quad p,\ 2p,\ pp$$

Hic ergo nulli numeri compoſiti occurrunt, unde numerus 13 ad claſſem numerorum idoneorum referri debebit.

Examinetur numerus 30, vtrum ſit idoneus, an vero excludi debeat, qui calculus ita ſe habebit:

$$\frac{30 + 1^2.\ 7^2}{31.\ 79}$$
$$p\quad p$$

Quia ergo hic etiam nullus numerus compoſitus prodit, numerus 30 in claſſe numerorum idoneorum locum habebit.

Exami-

Examinetur numerus 43, et calculus ita ſe habebit:

$$43 + 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2,\ 11^2,$$

$$44,\ 47,\ 52,\ 59,\ 68,\ 79,\ 92,\ 107,\ 124,\ 143,\ 164,$$

$$c,\ p,\ c,\ p,\ c,\ p,\ c,\ p,\ c,\ p,\ c$$

Hinc ergo patet, hunc numerum 43 ex claſſe numerorum idoneorum excludi debere.

Examinetur nunc ſimili modo numerus $210 = 2.3.5.7$, ita vt ipſi y valores ad 210 primos tribui oporteat usque ad terminum 840

$$210 + 1;\ 11^2;\ 13^2;\ 17^2;\ 19^2;\ 23^2$$

$$211,\ 331,\ 379,\ 499,\ 571,\ 739$$

$$p,\ p,\ p,\ p,\ p,\ p$$

Cum igitur omnes numeri prodeuntes ſint primi, numerus iſte 210 pro idoneo eſt habendus, ex quo plures formulae ſequentes formari poſſunt:

1. $210\, xx + yy$
2. $105\, xx + 2yy$
3. $70\, xx + 3yy$
4. $42\, xx + 5yy$
5. $30\, xx + 7yy$
6. $35\, xx + 6yy$
7. $21\, xx + 10yy$
8. $14\, xx + 15yy$

quae omnes formulae ita ſunt comparatae, vt omnes numeri, qui in quapiam earum ſemel tantum continentur, certe futuri ſint numeri primi.

§. 39. Poſtquam igitur hoc modo numeri ad inſtitutum noſtrum inepti fuerint excluſi, reliqui numeri, quos idoneos

idoneos appellemus, ordine in tabulam referantur, quam usque ad terminum 3000 continuare licuit; atque adeo adhuc dubium videtur, num majores numeri idonei reperiri queant.

TABULA
numerorum idoneorum.

1	13	37	85	177	357
2	15	40	88	190	385
3	16	42	93	210	408
4	18	45	102	232	462
5	21	48	105	240	520
6	22	57	112	253	760
7	24	58	120	273	840
8	25	60	130	280	1320
9	28	70	133	312	1365
10	30	72	165	330	1848
12	33	78	168	345	

Hic ſcilicet maximus numerus idoneus eſt 1848, ex his factoribus, compoſitus: 8 . 3 . 7 . 11; neque poſt hunc ullum alium majorem mihi quidem invenire licuit, poſtquam iſtum laborem vsque ad 3000, et ultra, ſum exſecutus. Operae autem pretium erit in confirmationem hujus tanti numeri probationem adiungere.

1848		1848	
+ 1	1849 = 43^2 = *pp*	+ 37^2	3217 — *p*
+ 5^2	1873 —— *p*	41^2	3529 — *p*
13^2	2017 —— *p*	43^2	3697 — *p*
17^2	2137 —— *p*	47^2	4057 — *p*
19^2	2209 = 47^2 = *pp*	53^2	4657 — *p*
23^2	2377 —— *p*	59^2	5329 = 73^2 = *pp*
25^2	2473 —— *p*	61^2	7417 — *p*
29^2	2689 —— *p*		
31^2	2809 = 53^2 = *pp*		

§. 40. Diſtinctio igitur talium formularum $\alpha xx + \beta yy$ in duas claſſes maxime eſt memorabilis, et in ipſa rei natura fundata, quarum claſſium prior omnes tales formulas complectitur, in quibus omnes numeri ſemel tantum contenti tuto pro primis haberi queant, quarum criterium in hoc conſiſtit, vt productum $\alpha\beta$ in ſuperiore tabula numerorum idoneorum reperiatur, cujus generis ſimpliciores formae ſunt $xx + yy$; $2xx + yy$; $3xx + yy$, quarumque proprietas iſta jam pridem a Geometris eſt agnita, et demonſtrata. Ad alteram vero claſſem referendae ſunt reliquae formae $\alpha xx + \beta yy$ in quibus etiam numeri compoſiti unico tantum modo contenti eſſe poſſunt, quarum criterium in hoc conſiſtit; quod productum $\alpha\beta$ non in ſuperiori tabula occurrit, cujusmodi formae ſimpliciores ſunt $5xx + 4yy$; $7xx + 2yy$; $7xx + 5yy$; $11xx + yy$ etc. Quantum autem hinc ſubſidium oriatur, ad numeros praegrandes examinandos, vtrum ſint primi, nec ne, in ſingulari diſſertatione fuſius oſtendi.

ADDI-

ADDITAMENTUM.

De numeris idoneis inveſtigandis.

§. 41. Tabula numerorum idoneorum huic diſſertationi inſerta eo magis eſt notatu digna, quod non ſolum omnes numeros hujus naturae usque ad 2 millia exhibeat, ſed etiam vltra hunc terminum nulli prorſus hujusmodi numeri occurrere videantur. Cum enim hanc inveſtigationem vsque ad 4 millia eſſem proſecutus, in toto hoc intervallo ne vnicus quidem numerus idoneus ſe mihi obtulerat; unde ſequitur, ab hoc termino vsque ad 16000 nullos certe dari numeros idoneos per 4 diviſibiles; eorum enim partes quartae in praecedente intervallo reperiri deberent. Neutiquam autem probabile eſt ibi numeros vel impares vel impariter pares exiſtere; ex ſola enim inſpectione ſuperioris tabulae manifeſto patet iſtos numeros continuo magis fieri compoſitos, ſiquidem vltimus hujus tabulae numerus primus eſt 37; numerus vero, qui tantum duobus conſtat factoribus, eſt 253. Hinc igitur maxime veriſimile eſt in tabula noſtra omnes plane numeros idoneos contineri.

§. 42. Cum iſti numeri ſumma attentione ſint digni, operae pretium erit eorum proprietates accuratius perpendiſſe. In hoc autem negotio imprimis attendiſſe juvabit, quaenam numerorum genera ex hac tabula excludantur. Quemadmodum enim numeri primi reperiuntur, dum ex ordine omnium numerorum omnes, qui ſunt compoſiti, delentur, ita etiam numeri idonei relinquuntur, poſtquam omnes ineptos deleverimus; numerorum igitur genera, quae excludi oportet, hic ante oculos conſtituamus.

I. Primum genus numerorum excludendorum in hac forma continetur: $4n+3$. Si enim primum quadratum 1 addatur, prodit $4(n+1)$, ideoque numerus compoſitus, ſolis caſibus exceptis, quibus $(n+1)$ eſt poteſtas binarii, vti evenit, ſi fuerit vel $n=0$; vel $n=1$; vel $n=3$; vel $n=7$. Hanc ob rem ex ordine omnium numerorum excludi debent numeri formae $4n+3$ praeter hos tres minimos, 3, 7 et 15.

II. Excludi etiam debent numeri in hac forma contenti: $3n+2$, quia addito quadrato 1 prodit $3(n+1)$, ideoque numerus compoſitus, niſi fuerit vel $n=0$, quo caſu numerus fit revera primus; vel $n=1$, quo caſu prodit numerus 2.3 pro primo habendus, ob formam $2p$; vel $n=2$, quo caſu prodit numerus 3.3 formae pp, pariter pro primo habendus. Hinc ergo ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $3n+2$, praeter hos tres: 2, 5 et 8.

III. Excludi debent omnes numeri in hac forma contenti: $5n+4$. Addita enim 1 prodit $5(n+1)$, numerus compoſitus, exceptis caſibus $n=0$; $n=1$ et $n=4$. Quamobrem ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $5n+4$, praeter hos tres: 4, 9, 24; reliqui ſcilicet omnes, qui ſunt 19, 29, 34, 39, etc. debent deleri;

IV. Excludi debent numeri formae $5n+1$, quia addito quadrato 4 prodit numerus $5(n+1)$, pro compoſito habendus, niſi fuerit vel $n=0$; vel $n=1$; vel $n=4$; quamobrem ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $5n+1$, praeter hos tres, 1, 6, 21, quibus adiungi oportet caſus $n=3$, quoniam ad nume-

numerum 16 quadratum 4 addi non convenit; ſicque numeri hinc expungendi erunt 11, 26, 31, 36, 41, 46, etc. NB. Si binae poſteriores conditiones conjungantur, excludi debent numeri deſinentes in 1, 4, 6 et 9, exceptis minoribus 1, 4, 6, 9, 21 et 24.

V. Ob numerum primum 7 excludi debent numeri formae $7n + 6$, quia addito quadrato 1 prodit numerus compoſitus $7(n + 1)$ exceptis caſibus, $n = 0$; $n = 1$ et $n = 6$. Unde ex ordine omnium numerorum excludi debent omnes numeri formae $7n + 6$, exceptis his tribus 6, 13, 48; ita vt deleri debeant numeri 20, 27, 34, 41, 55, 62 etc.

VI. Ob eundem numerum 7 etiam excludi debet forma $7n + 5$, quia addito quadrato 9 prodit forma $7(n + 2)$, qui eſt numerus compoſitus, niſi fuerit $n = 0$ et $n = 5$. Inſuper vero etiam excipiuntur caſus $n = 1$; $n = 4$; $n = 7$ et $n = 10$, quippe quibus forma $7n + 5$ diviſorem habet 3, ideoque quadratum 9 eo addi non conveniet; quam ob rem expungi debent omnes numeri $7n + 5$, praeter hos: 5, 12, 33, 40.

VII. Ob eundem numerum 7 excludi debent numeri formae $7n + 3$, quia addito quadrato 4 prodit forma $7(n + 1)$, ideoque numerus compoſitus, praeter caſus $n = 0$; $n = 1$ et $n = 6$. Praeterea vero etiam intelligitur, non niſi ad numeros impares quadratum 4 addi poſſe; hinc ergo excludi debent omnes numeri in forma $7n + 3$ contenti, praeter iſtos: 3, 10, 24, 45. NB. Ob numerum ergo 7 omnes numeri in quapiam harum trium formarum $7n + 2$, $7n + 5$, $7n + 6$, contenti excludi debent, praeter 3, 5, 6, 10, 12, 13, 24, 40, 45 et 48.

VIII. Deinde ob numerum primum 11 excludi debet forma $11n + 10$, quia addito 1 prodit $11(n + 1)$, ideoque numerus

merus compoſitus, praeter caſus $n = 0$; $n = 1$ et $n = 10$; unde omnes numeri hujus formae deleri debent, praeter 10, 21, 120.

IX. Ob eundem numerum 11 excludi debet forma $11n + 8$, quia addito quadrato 25 prodit forma $11(n + 3)$, quae ſemper eſt numerus compoſitus, praeter caſum $n = 8$, quo prodit 11^2. Deinde etiam conſiderari debet, caſibus, quibus haec forma $11n + 8$ factorem habet 5, additionem quadrati 25 locum non habere. Hinc ergo omnes numeri formae $11n + 8$ excludi debent, praeter hos: 8, 30, 85.

X. Ob eundem numerum 11 excludi debet forma $11n + 7$, quoniam addito quadrato 4 prodit $11(n + 1)$, numerus compoſitus, praeter caſus $n = 0$; $n = 1$ et $n = 10$; unde prodeunt numeri 7, 18 et 117, quorum poſtremus, ob alias rationes, ſcilicet ob formam $7n + 5$, jam eſt excluſus. Praeterea vero caſus, quibus $11n + 7$ eſt numerus par, additionem quadrati 4 non patiuntur; ergo omnes numeri formae $11n + 7$ deleri debent, praeter 7, 18, 40.

XI. Ob eundem numerum 11 excludi debet forma $11n + 6$, cui quadratum 16 additum producit $11(n + 2)$, ideoque numerus compoſitus, praeter $n = 0$ et $n = 9$, hoc eſt praeter numeros 6 et 105. Sicque deleri debent omnes numeri formae $11n + 6$, praeter 6 et 105, quibus adiungi oportet inſuper pares numeros 28 et 72, quippe qui additionem quadrati 16 non admittunt.

XII. Ob eundem numerum 11 reſtat forma $11n + 2$, cui quadratum 9 additum dat $11(n + 1)$, unde oritur excluſio $n = 0$, $n = 1$ et $n = 10$, praeterquam quod numeri hujus formae per 3 diviſibiles additionem hujus quadrati non patiuntur; conſequenter omnes numeri $11n + 2$ ſunt expun-

expungendi, praeter 2, 13, 112, quibus adiungi oportet numeros hujus formae per 3 diviſibiles, qui ſunt 24, 57. NB. Ob numerum igitur primum 11 habentur quinque numerorum formae, quos deleri oportet, ſcilicet $11n+2$, $11n+6$, $11n+7$, $11n+8$, $11n+10$, praeter ſcilicet paucos certos numeros, qui ob ſingulares rationes relinqui debent.

§. 43. Simili modo etiam ſequentes numeri primi evolvi poſſent, quod autem nimis foret prolixum. Contenti autem eſſe poſſumus pro ſingulis eas formas notaſſe, quas excludi oportet: hae autem formae excludendae ſunt ſequentes:

1° $4n+3$
2° $3n+2$
3° $5n+1, 4$
4° $7n+3, 5, 6$
5° $11n+2, 6, 7, 8, 10$
6° $13n+1, 3, 4, 9, 10, 12$
7° $17n+1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16$
8° $19n+2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18$
9° $23n+5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22$
10° $29n+1, 4, 5, 6, 7, 9, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 28.$

§. 44. Numeri autem in his formis contenti ideo excludi debent, quia ſemper quadratum addere licet, ita ut ſumma per ipſum illum numerum primum fit diviſibilis. Ita numerus $29n+13$ ideo excluditur, quia addito quadrato 16 prodit ſumma $29(n+1)$ per 29 diviſibilis. Quo igitur ſtatim hujusmodi quadrata addenda obtineantur, ſuperiores formae pro ſingulis numeris primis ſequenti modo commode repraeſentari poſſunt:

$4n+$

4n+	√□
+3	1, 3

3n+	√□
+2	1, 2

5n+	√□
+4	1, 4
+1	2, 3

7n+	√□
	1, 6
+3	2, 5
+5	3, 4

11n+	√□
	1, 10
+7	2, 9
2	3, 8
6	4, 7
8	5, 6

13n+	√□
+12	1, 12
9	2, 11
4	3, 10
10	4, 9
1	5, 8
3	6, 7

17n+	√□
16	1, 16
13	2, 15
8	3, 14
1	4, 13
9	5, 12
15	6, 11
2	7, 10
4	8, 9

19n+	√□
18	1, 18
15	2, 17
10	3, 16
3	4, 15
13	5, 14
2	6, 13
8	7, 12
12	8, 11
14	9, 10

23n+	√□
+22	1, 22
19	2, 21
14	3, 20
7	4, 19
21	5, 18
10	6, 17
20	7, 16
5	8, 15
11	9, 14
15	10, 13
17	11, 12

29n+	√□
28	1, 28
25	2, 27
20	3, 26
13	4, 25
4	5, 24
22	6, 23
9	7, 22
23	8, 21
6	9, 20
16	10, 19
24	11, 18
1	12, 17
5	13, 16
7	14, 15

Hujusmodi tabellae nobis novam methodum ſuppeditant numeros propoſitos quosvis examinandi, vtrum ſint idonei nec ne; quem in ſinem ſequens problema adjungamus.

PRO-

PROBLEMA.

Numerum quemvis propoſitum n *examinare, vtrum ſit idoneus nec ne?*

Solutio.

§. 45. Ex praecedentibus patet numerum n tum demum eſſe idoneum, quando additis quadratis minoribus, ad n primis, ſummae reſultant, quae ſunt vel numeri primi, vel eorum dupla, vel etiam quadrata, vel adeo poteſtates binarii, idque vsque ad terminum $4n$. Ex quo intelligitur, numerum propoſitum n non fore idoneum, quando datur quadratum $aa < 3n$ et primum ad n, vt ſumma $n + aa$ evadat numerus compoſitus, qui, denotante p numerum primum, neque ſit p, neque $2p$, neque pp, neque adeo 2^a.

§. 46. Quando autem formula $n + aa$ talem numerum compoſitum producit, quia aſſumimus $n + aa < 4n$, neceſſe eſt vt is factorem habeat primum et minorem quam $\sqrt{4n}$. Quamobrem res eo redit, ut inquiratur num detur numerus primus $< \sqrt{4n}$ per quem quispiam numerorum in forma $n + aa$ contentorum diviſionem admittat, ſiquidem quadratum aa fuerit ad n primum atque $aa < 3n$. Ad hoc igitur explorandum percurrantur ordine omnes numeri primi ſupra allati, ad examinandum, vtrum numerus noſter propoſitus n in quapiam excluſione contineatur, quod ſi eveniat non tamen inde ſtatim erit concludendum, iſtum numerum non eſſe idoneum, quoniam fieri poteſt, vt formula $n + aa$ vel ipſi numero p, vel ejus duplo, vel ejus quadrato fiat aequalis, quippe quibus caſibus, vt vidimus, excluſio locum non habet. Imprimis autem hic meminiſſe oportet, quadratum aa ad ipſum numerum propoſitum primum

primum eſſe debere, aliter excluſio quoque locum non habet. Quodſi ergo, percurſis hoc modo omnibus numeris primis minoribus quam $\sqrt{4n}$, nulla excluſio reperiatur, tum numerus propoſitus pro idoneo erit habendus; tota autem haec operatio multo clarius per exempla intelligetur.

Exemplum I.

§. 47. Propoſitus ſit numerus $n = 33$, et cum ſit $\sqrt{4n} < 12$, conſiderentur omnes numeri primi vsque ad 11, utrum iſte numerus 33 in quapiam forma excludente contineatur. Statim autem perſpicitur hunc numerum neque in prima forma excludente $4n + 3$, neque in ſecunda $3n + 2$, neque tertia $5n + 1$, 4 contineri; at vero in quarta forma pro numero primo 7 continetur, cum ſit $33 = 7m + 5$, quae excluſionem innuit; quadratum autem aa, quod ipſi 33 additum diviſionem per 7 producit, indicatur vel 3^2, vel 4^2, at vero prius 3^2 hic reiici debet, quia ad 33 non eſt primum, alterum vero 4^2, additum ad 33, producit 49, qui numerus cum ſit quadratus, pariter nullam excluſionem parit. Dantur quidem etiam quadrata majora, diviſibilitatem per 7 producentia, ſcilicet $7a \pm 3^2$, cujusmodi ſunt $10^2, 11^2, 17^2, 18^2$ etc. quorum primum 10^2, vtpote ad 33 primum, praebet vtique ſummam 133 per 7 diviſibilem, quae autem jam major eſt quam $4 . 33 = 132$, atque adeo duplici modo in forma $33xx + yy$ continetur, ſcilicet 1°) $x = 1$ et $y = 10$, 2°) $x = 2$ et $y = 1$.

§. 48. Numerus ergo primus 7 nullam excluſionem gignit, ſequentem autem 11 examinare non attinet, quia 11 eſt diviſor ipſius 33, unde recte concludimus numerum 33 eſſe idoneum.

Exem-

Exemplum II.

§. 49. Propoſitus ſit numerus $n = 58$, vbi $\sqrt{4n} < 16$, ita vt numeros primos minores quam 16 percurri oporteat. Manifeſtum autem eſt hunc numerum neque in prima forma excludente $4n + 3$, neque in ſecunda $3n + 2$, neque tertia $5n + 1, 4$, neque etiam quarta $7n + 3, 5, 6$, neque quinta $11n + 2, 6; 7\ 8, 10$, contineri; neque vero etiam hic numerus per ultimum 13, minorem quam 16, excluditur; unde ſequitur numerum 58 revera eſſe idoneum.

Exemplum III.

§. 50. Sit numerus propoſitus $n = 345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$, unde quia $\sqrt{4 \cdot 335} < 38$, omnes numeros primos vsque ad 37 percurri oportet. Hinc autem nulla excluſio occurrit, vsque ad numerum primum 19; propterea quod $345 = 19 \cdot 18 + 3$, unde quadrata addenda ſunt 4^2, 15^2, quorum poſterius rejicitur, quia non eſt primum ad 345; at prius 4^2 additum producit ſummam 361, quae eſt quadratum ipſius 19, ideoque excluſionem non gignit. Reliqua quadrata $(19n \pm 4)^2$, quae ſunt 23^2, 34^2, 42^2, 53^2, 61^2, quae pariter diviſibilitatem per 19 pariunt, at praeter 23^2 terminum $3n$ ſuperant: illud autem 23^2 adhibere non licet, vtpote factorem ipſius 345, quam ob rem iſte numerus 345 pro idoneo eſt habendus, niſi forte ſequentes numeri primi vsque ad 37 excluſionem generent. Jam poſt 19 ſequitur numerus 23, qui hic autem in computum non venit; pro ſequente 29 ſit $345 = 29 \cdot 11 + 26$, quod nullam excluſionem innuit; porro vero eſt $345 = 31 \cdot 11 + 4$, pariter nullam excluſionem continens. Denique eſt $345 = 37 \cdot 9 \cdot + 12$, qua forma excluſio innuitur, quemadmodum facile pateret, ſi tabulas vlterius continuare liceret. Quadrata enim addenda

 ſunt

ſunt 5^2 et 32^2, quorum priore vti non licet, quia non eſt primum ad 345; alterum vero 32^2 additum producit 1369, hoc eſt ipſum quadratum 37^2, ita vt hinc nulla excluſio locum habeat, quocirca hic numerus 345 in claſſem numerorum idoneorum eſt referendus.

Exemplum IV.

§. 51. Propoſitus ſit numerus $148 = 4 \cdot 37$, quem ergo ſecundum numeros primos $< \sqrt{592} < 25$ examinemus: at vero nulla excluſio innuitur usque ad 19, ſiquidem eſt $148 = 19 \cdot 7 + 15$. Quadrata igitur addenda ſunt 2^2, 17^2, quorum prius hic locum non habet, alterum vero additum producit $437 = 19 \cdot 23$, qui ergo eſt numerus compoſitus $< 4 \cdot 148$; unde ſequitur hunc numerum 148 non eſſe idoneum.

Exemplum V.

§. 52. Propoſitus ſit numerus $522 = 2 \cdot 9 \cdot 29$, unde numeros primos usque ad 46 percurri conveniet. Minores autem formulae nullam excluſionem gignunt, vsque ad numerum primum 31, per quem diviſio ſuccedit, addendo quadrata vel 6^2 vel 25^2, quorum poſterius producit $1147 = 31 \cdot 37$; qui numerus compoſitus, cum ſit minor quam 2088, manifeſto hunc numerum 522 ex claſſe idoneorum excludit.

§. 53. Hac methodo haud difficile eſt iſtud numerorum examen quousque lubuerit continuare. Poſtquam autem hunc calculum vsque ad 10000 eſſem proſecutus, nullus novus numerus idoneus ſe mihi obtulit, praeter eos, quos tabula ſuperior exhibet, ex quo iſta tabula omnes plane numeros idoneos in ſe complecti videtur.

RESO-

RESOLUTIO FORMULAE DIOPHANTEAE
$ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$
PER NUMEROS RATIONALES.

Auctore *L. EULERO*.

Conventui exhibuit die 1. Decembr. 1778.

§. 1.

Inter theoremata olim a Fermatio demonſtrata, et poſt ejus obitum deperdita, imprimis maximam attentionem meretur hoc theorema: quod non dentur duae poteſtates cujusque ordinis, quarum ſumma vel differentia ſit poteſtas ejusdem ordinis, ſiquidem ordo primus et ſecundus excipiatur. Ita negavit Fermatius exhiberi poſſe binos numeros a et b, vt haec formula $a^n \pm b^n$ aequetur ſimili poteſtati c^n, ſimul atque exponens n binarium ſuperaverit. Hoc ergo modo omnes iſtae poſitiones erunt impoſſibiles: I. $a^3 \pm b^3 = c^3$; II. $a^4 \pm b^4 = c^4$; III. $a^5 \pm b^5 = c^5$; IV. $a^6 \pm b^6 = c^6$; V. $a^7 \pm b^7 = c^7$; VI $a^8 \pm b^8 = c^8$ etc.

§. 2. De prima harum formularum $a^3 \pm b^3 = c^3$, veritas jam ſatis feliciter eſt oſtenſa, unde ſimul quoque veritas ſequitur pro omnibus formulis, pro quibus exponens n, eſt multiplum ternarii. Tum vero multo clarius adhuc demonſtrata eſt formula ſecunda $a^4 \pm b^4 = c^4$, cum evidentiſſime comprobatum ſit, neque ſummam neque differentiam duorum biquadratorum poſſe eſſe quadratum, multo minus ergo

ergo biquadratum, hincque etiam evicti ſunt omnes caſus, quibus exponens n eſt multiplum quaternarii. Interim tamen ejusmodi demonſtratio, quae ſe pariter ad omnes exponentes n extendat, maxime adhuc deſideratur, neque cuiquam Geometrarum in hoc numerorum myſterium penetrare contigit.

§. 3. Pluribus autem inſignibus Geometris viſum eſt haec theoremata latius extendi poſſe. Quemadmodum enim duo cubi exhiberi nequeunt, quorum ſumma vel differentia ſit cubus, ita etiam certum eſt, nequidem exhiberi poſſe tria biquadrata, quorum ſumma ſit pariter biquadratum, ſed ad minimum quatuor biquadrata requiri, vt eorum ſumma prodire queat biquadratum, quamquam nemo adhuc talia quatuor biquadrata aſſignare potuerit. Eodem modo etiam aſſirmari poſſe videtur, non exhiberi poſſe quatuor poteſtates quintas, quarum ſumma etiam eſſet poteſtas quinta; ſimilique modo res ſe habebit in altioribus poteſtatibus; unde ſequentes quoque poſitiones omnes pro impoſſibilibus erunt habendae:

I. $a^3 + b^3 = c^3$,
II. $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$,
III. $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$,
IV. $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 = f^6$
etc. etc.

Plurimum igitur ſcientia numerorum promoveri eſſet cenſenda, ſi demonſtrationem deſideratam etiam ad has formulas extendere liceret.

§. 4. Primo quidem intuitu videri poſſet has poſtremas formulas non ſolum ad ſummas, ſed etiam ad differentias, prouti in prima vſu venit, extendi poſſe, ita vt etiam haec aequa-

aequalitas $a^4 \pm b^4 \pm c^4 = d^4$ pro impoſſibili eſſet habenda; verum hoc longe ſecus ſe habere ante aliquot annos obſervavi, in tomo commentariorum XVII. pag. 64. vbi bina biquadrata aſſignavi, quorum ſumma in alia duo biquadrata reſolvi queat, ita vt ſit $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$, unde ergo haec aequalitas $a^4 + b^4 - c^4 = d^4$ veritati neutiquam adverſatur; verum numeri, quos pro his litteris a, b, c, d, per calculum valde taedioſum erui, valde immanes prodierunt.

§. 5. Cum autem nuper idem argumentum tractandum ſuſcepiſſem, praeter omnem expectationem incidi in numeros multo minores hac indole praeditos, atque adeo minimi numeri hoc praeſtantes ſtatui poſſunt iſti: $a = 134$; $b = 133$; $c = 158$; et $d = 59$, quandoquidem revera deprehendetur eſſe $134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4$, quem calculum exſequi haud adeo moleſtum eſt, dum contra comprobationem illorum immenſorum numerorum vix quisquam tentare audebit.

§. 6. Methodus autem, qua tum temporis ſum vſus, vt reſolverem hanc aequalitatem: $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$, ita procedebat: conſideravi ſcilicet hanc aequationem $A^4 - C^4 = D^4 - B^4$, ac poſito $A = a + b$; $C = a - b$; $D = c + d$ et $B = c - d$, prodiit iſta aequatio ſatis ſimplex: $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$; ſicque totum negotium ad reſolutionem hujus formulae reducitur. Hic autem non ſolum methodum ante vſitatam, multo tractabiliorem ſum redditurus, ſed etiam ad reſolutionem formulae multo generalioris in titulo exhibitae $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$ ſum accommodaturus, ita vt, quicunque numeri pro m et n accipiantur, ſemper infinitis modis numeri ſatisfacientes pro a, b, c, d inveniri queant.

§. 7.

§. 7. Ad aequalitatem autem hanc reſolvendam vtor ante omnia hac transformatione: $b = cp$ et $d = aq$, hocque modo aequatio reſolvenda hanc induet formam: $p(maa + nccpp) = q(mcc + naaqq)$, unde elicitur $\frac{aa}{cc} = \frac{np^3 - mq}{nq^3 - mp}$, ſicque totum negotium huc redit, vt iſta formula $\frac{np^3 - mq}{nq^3 - mq}$ ad quadratum reducatur, quod quidem ſponte evenire caſu $q = p$ mox in oculos incurrit, cum evadat $\frac{aa}{cc} = 1$, ideoque $c = a$; tum quoque fiet $b = d$, qui autem caſus maxime obvius pro ſolutione neutiquam haberi poteſt, quandoquidem ambo membra aequationis prodeunt identica. Interim tamen hic ipſe caſus ad alias ſolutiones manuducere poterit.

§. 8. Cum igitur noſtra formula revera quadratum evadat poſito $p = q$, ſtatuamus $p = q(1 + z)$, ita ut ſumpto $z = 0$ ipſe caſus obvius prodeat; nunc autem noſtra formula in ſequentem transmutabitur: $\frac{aa}{cc} = \frac{nq^3(1+z)^3 - m}{nqq - m(1+z)}$, ſive

$$\frac{aa}{cc} = \frac{nqq - m + 3nqqz + 3nqqzz + nqqz^3}{nqq - m - mz}$$

in qua fractione quantitas incognita z in numeratore ad tertiam poteſtatem, in denominatore autem non ultra primam aſſurgit, cujusmodi formulas per methodos cognitas tractari poſſe jam ſatis liquet.

§. 9. Quo hanc fractionem tractabiliorem reddamus, tam numeratorem quam denominatorem dividamus per $nqq - m$, ſtatuamusque brevitatis gratia $\frac{nqq}{nqq - m} = \alpha$ et $\frac{m}{nqq - m} = \beta$, ita vt ſit $\alpha - \beta = 1$, ideoque $\alpha = 1 + \beta$, quo facto formula ſequens prodibit $\frac{aa}{cc} = \frac{1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3}{1 - bz}$. Jam per ſecundam methodum, qua olim ſum uſus, denominator reddatur quadratum, multiplicando ſupra et infra per $1 - bz$, unde prodit $\frac{aa}{cc} = \frac{(1 - bz)(1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3)}{(1 - bz)^2}$. Sicque tantum opus eſt

vt

vt numerator, qui evolutus ſit

$$1+(3\alpha-\beta)\,z+3\,\alpha(1-\beta)\,zz+\alpha(1-3\beta)\,z^3-\alpha\beta z^4$$

ad quadratum reducatur, quod praeſtabitur ejus radicem ponendo $1+fz+gzz$, cujus quadratum eſt

$$1+2fz+(ff+2fg)\,zz+2fgz^3+ggz^4.$$

Nunc quia primi termini ſe mutuo ſponte deſtruunt, binae litterae f et g ita definiantur, vt etiam ſecundi ac tertii termini tollantur; prius fiet ſumendo $f=\frac{3\alpha-\beta}{2}$, poſterius vero ſtatuendo $ff+2g=3\alpha(1-\beta)$, unde fit $g=\frac{3\alpha(1-\beta)}{2}-\frac{1}{2}ff$. Quoniam igitur utrinque tantum bini termini poſtremi remanent, qui per z^3 diviſi praebent hanc aequationem: $\alpha(1-3\beta)-\alpha\beta z=2fg+ggz$, inde elicitur $z=\frac{\alpha(1-3\beta)-2fg}{\alpha\beta+gg}$.

§. 10. Haec eſt ea ipſa ſolutio, qua jam dudum loco citato ſum vſus, cujus ope pro quovis valore ipſius q ad arbitrium aſſumpto, ſimul innoteſcunt litterae α et β, unde valor idoneus pro z obtinetur, quo invento primo erit $p=q(1+z)$, ac denique erit $\frac{aa}{cc}=\frac{(1+fz+gzz)^2}{(1-\beta z)^2}$ ideoque $\frac{a}{c}=\frac{1+fz+gzz}{1-\beta z}$, unde ergo ſumi poterit $a=1+fz+gzz$ et $c=1-\beta z$; tandem vero habebitur $b=cp$ et $d=aq$; ſicque quaeſtioni propoſitae erit ſatisfactum.

§. 11. Hoc autem modo pro caſu quem olim tractavi, $m=n=1$ pro q vnitas accipi nequit, quia litterae α et β evaderent infinitae; iidem vero enormes numeri, quos tum exhibui, reperiuntur, dum pro q vel 2 vel 3 aſſumitur. Quodſi autem non fuerit $m=n$, nihil obſtat, quo minus ſtatuatur $q=1$, hincque ſolutiones ſatis commodae obtineri poterunt; ſemper autem tum erit $d=a$, quod fortaſſe diſplicere poteſt.

§. 12. Hac igitur methodo repudiata aliam viam ſum ingreſſurus, quae ad ſolutiones multo ſimpliciores perducet, quaeque ita eſt comparata, vt non perveniatur ad quartam poteſtatem ipſius z. Hunc in finem ſtatim pono $\frac{a}{c} = 1 + sz$, ita vt habeamus: $\frac{1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3}{1 - \beta z} = (1 + sz)^2$, qua aequatione evoluta et omnibus terminis ad eandem partem translatis pervenietur ad hanc aequationem:

$$\left.\begin{array}{l} +1 + 3\alpha z + 3\alpha zz + \alpha z^3 \\ -1 - 2sz - sszz + \beta ssz^3 \\ \quad\;\; + \beta z + 2\beta szz \end{array}\right\} = 0$$

quae redigitur ad hanc formam:

$$3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)z + (\alpha + \beta ss)zz = 0.$$

§. 13. Ut nunc ex hac aequatione incognita z commode deduci queat, hoc imprimis duobus modis fieri poterit, quorum primus adhiberi poterit, ſi ſtatuere licebit $\alpha + \beta ss = 0$, ſive $ss = -\frac{\alpha}{\beta}$, id quod locum habere nequit, niſi $-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{nqq}{m}$ fuerit quadratum, quamobrem iſte caſus tum tantum adhiberi poterit, quando numerorum m et n alter fuerit negativus, inſuperque eorum productum quadratum. Pro hoc igitur caſu ponamus $m = \mu\mu$ et $n = -\nu\nu$, vt aequalitas reſolvenda ſit $ab(\mu\mu aa - \nu\nu bb) = cd(\mu\mu cc - \nu\nu dd)$; tum igitur erit $\alpha = \frac{+\nu\nu qq}{\mu\mu + \nu\nu qq}$ et $\beta = \frac{-\mu\mu}{\mu\mu + \nu\nu qq}$ ſtatuique poterit $ss = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\nu\nu qq}{\mu\mu}$, ideoque $s = \frac{\nu q}{\mu}$. Hoc modo aequatio poſtrema erit $3\alpha - 2s + \beta + (3\alpha + 2\beta s - ss)z = 0$, unde colligitur $z = \frac{2s - 3\alpha - \beta}{3\alpha + 2\beta s - ss}$, factisque ſubſtitutionibus erit

$$z = \frac{\mu\mu(\mu\mu - 3\nu\nu qq) + 2\mu\nu q(\mu\mu + \nu\nu qq)}{\mu\mu(3\nu\nu qq - 2\mu\nu q) - \nu\nu qq(\mu\mu + \nu\nu qq)}.$$

§. 14.

§. 14. Hic autem praeter omnem neceſſitatem introduximus binas novas litteras μ et ν; nihil enim impedit, quo minus loco μa, νb, μc, νd, ſimpliciter ſcribantur litterae a, b, c, d, ita vt formula reſolvenda evadat $ab(aa-bb)=cd(cc-dd)$, perinde ac ſi ſumpſiſſemus $\mu=1$ et $\nu=1$, unde ſolutio multo brevior obtinebitur.

Reſolutio formulae particularis $ab(aa-bb)=cd(cc-dd)$.

Hic igitur ſumpto pro q numero quocumque erit $\alpha=\frac{qq}{1+qq}$ et $\beta=\frac{-1}{1+qq}$; tum vero ſumi oportet $s=q$, unde poſtrema aequatio erit

$$3qq-1-2q-2q^3+z(2qq-2q-q^4)=0,$$ ideoque

$$z=\frac{1+2q-3qq+2q^3}{q(-2+2q-q^3)}.$$ Hoc valore invento erit $p=q(1+z)$ et $\frac{a}{c}=1+qz$, unde porro reliquae litterae b et d facile aſſignabuntur.

§. 15. Statuamus nunc primo $q=1$, eritque $z=-2$ deinde $\frac{a}{c}=-1$, ideoque $c=-a$; porro ob $p=-1$ erit $b=a$ et $d=a$. Hoc ergo caſu omnes quatuor litterae eſſent aequales, et ambo formulae membra $=0$. Idem prodiret, ſi poneremus $q=-1$: perpetuo enim obſervaſſe juvabit, perinde eſſe ſive ipſi q tribuatur valor poſitivus, ſive negativus. Sumamus igitur, vt idoneum exemplum proferamus, $q=2$, eritque $z=-\frac{3}{4}$, ideoque $p=\frac{1}{2}$ et $\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$, ergo $c=-2a$, porro $b=-a$ et $d=2a$. Hoc autem modo in praecedens incommodum incidimus. Sit ergo $q=3$, eritque $z=-\frac{34}{69}$, hinc $p=\frac{35}{23}$ et $\frac{a}{c}=-\frac{11}{23}$, ita ſumi poterit

$a = 11$ et $c = -23$, eritque $b = -35$ et $d = 3a = 33$. Hoc modo pervenimus ad hanc aequalitatem: $11 . 35 (35^2 - 11^2) = 23 . 33 (33^2 - 23^2)$, cujus ratio eſt manifeſta, cum vtrumque membrum in factores evolutum praebeat $2^4 . 3 . 5 . 7 . 11 . 23$. Hinc duo triangula rectangula exhiberi poſſunt, quorum areae inter ſe ſunt aequales; prioris enim catheti erunt $2 . 11 . 35$ et $24 . 56$, alterius vero trianguli $2 . 23 . 33$ et $10 . 56$.

Reverſio ad formulam generalem
$ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd.)$

§. 16. Quando autem in aequatione quadrata §. 13, vltimum terminum zz ad nihilum redigere non licet, ſemper hoc fieri poteſt in primo termino abſoluto, unde fit $3\alpha - 2s + \beta = 0$, ex qua aequatione elicitur $2s = 3\alpha + \beta$ ſive $s = \frac{4\alpha - 1}{2}$. Hoc igitur primo termino ſublato duo reliqui per z diviſi dant hanc aequationem: $3\alpha + 2\beta s - ss + (\alpha + \beta ss) z = 0$, quae aequatio abit in hanc: $\frac{3}{4} + (\alpha + \beta ss) z = 0$, unde fit $z = \frac{-3}{4\alpha + 4\beta ss}$. Cum igitur ſit $2s = 4\alpha - 1$, erit $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4\alpha - 1)^2}$ unde deducitur ſequens ſolutio noſtri problematis, quo requiritur vt fiat $ab(maa + nbb) = cd(mcc + ndd)$.

§. 17. Primo poſito $b = cp$ et $d = aq$ fecimus $p = q(1 + z)$; tum vero, ſumpta littera q pro lubitu, poſuimus brevitatis gratia $\alpha = \frac{nqq}{nqq - m}$ et $\beta = \frac{m}{nqq - m}$, ita vt ſit $\alpha - \beta = 1$. Quo facto invenimus $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(4\alpha - 1)^2}$, unde definitur $p = q(1 + z)$ Deinde poſito $s = \frac{4\alpha - 1}{2} = \frac{3\alpha + \beta}{2}$ invenimus eſſe $\frac{a}{c} = 1 + sz$, unde cum $1 + sz$ ſit plerumque fractio, hinc ambae litterae a et c facile per numeros integros aſſignantur; quibus inven-

inventis erit $b = cp$ et $d = aq$, quam ſolutionem aliquot exemplis illuſtremus.

Exemplum I.

quo haec formula reſolvenda proponitur:

$$ab(aa + 2bb) = cd(cc + 2dd).$$

§. 18. Hic igitur eſt $m = 1$ et $n = 2$, unde ſumpto numero $q = 1$ erit $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, hincque $s = \frac{7}{2}$ et $z = -\frac{1}{19}$, ideoque $p = \frac{18}{19}$; tum vero $\frac{a}{c} = \frac{31}{38}$, quocirca ſumamus $a = 31$ et $c = 38$, unde denique fit $b = 36$ et $d = 31$, ita vt ſolutio futura ſit $31 . 36 (31^2 + 2 . 36^2) = 38 . 31 (38^2 + 2 . 31^2)$, id quod calculum inſtituenti mox patebit. Eſt enim $31^2 + 2 . 36^2 = 3553 = 11 . 17 . 19$ et $38^2 + 2 . 31^2 = 3366 = 2 . 3^2 . 11 . 17$, quibus factoribus ſubſtitutis vtrinque prodit idem productum $2^2 . 3^2 . 11 . 17 . 19 . 31$.

Alia ſolutio ejusdem exempli.

§. 19. Sumatur hic $q = \frac{1}{2}$, eritque $\alpha = -1$ et $\beta = -2$. Deinde vero erit $s = -\frac{5}{2}$ et $z = \frac{1}{18}$, hinc ergo colligimus $p = \frac{19}{36}$ et $\frac{a}{c} = \frac{31}{36}$. Capiatur ergo $a = 31$ et $c = 36$, ex quibus denique fit $b = 19$ et $d = \frac{31}{2}$; unde, hos numeros duplicando, habebimus $a = 62$; $b = 38$; $c = 72$ et $d = 31$, ita vt ſit $62 . 38 (62^2 + 2 . 38^2) = 72 . 31 (72^2 + 2 . 31^2)$, vbi per factores eſt $62^2 + 2 . 38^2 = 6732 = 2^2 . 3^2 . 11 . 17$ et $72^2 + 2 . 31^2 = 7106 = 2 . 11 . 17 . 19$. Sicque vtrinque prodit idem productum $2^4 . 3^2 . 11 . 17 . 19 . 31$.

Exemplum II.

quo haec formula reſolvenda proponitur:

$$ab(aa + 3bb) = cd(cc + 3dd).$$

§. 20. Hic ergo eſt $m = 1$ et $n = 3$ hincque $\alpha = \frac{3qq}{3qq - 1}$ et $\beta = \frac{1}{3qq - 1}$. Sumamus nunc primo $q = 1$, vt ſit $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, hinc

hinc autem fiet $s = \frac{5}{2}$ et $z = -\frac{6}{37}$, quamóbrem erit $p = \frac{31}{37}$ et $\frac{a}{c} = \frac{22}{37}$. Capiatur ergo $a = 22$ et $c = 37$, fietque $b = 31$ et $d = 22$, conſequenter habebimus

$22 \cdot 31 (22^2 + 3 \cdot 31^2) = 37 \cdot 22 (37^2 + 3 \cdot 22^2)$. Hic ſcilicet erit $22^2 + 3 \cdot 31^2 = 3367 = 7 \cdot 13 \cdot 37$. et $37^2 + 3 \cdot 22^2 = 2821 = 7 \cdot 13 \cdot 31$; ſicque vtrinque idem oritur productum, ſcilicet $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 37$.

Alia ſolutio ejusdem exempli.

§. 21. Sumatur $q = \frac{1}{2}$, eritque $\alpha = -3$ et $\beta = -4$, hincque porro $s = -\frac{13}{2}$ et $z = \frac{3}{683}$, quocirca habebimus $p = \frac{691}{1376}$ et $\frac{a}{c} = \frac{1337}{1376}$. Capiatur ergo $a = 1337$ et $c = 1376$, unde fit $b = 691$ et $d = \frac{1337}{2}$. Duplicatis ergo valoribus habebimus $a = 2674$; $b = 1382$; $c = 2752$ et $d = 1337$.

Adhuc alia ſolutio ejusdem exempli.

§. 22. Sumamns hic $q = 2$, eritque $\alpha = \frac{12}{11}$ et $\beta = \frac{1}{11}$, unde fit $s = \frac{37}{22}$ et $z = -\frac{3993}{6977}$; ex quo fit $p = \frac{5968}{6977}$, porro vero $sz = -\frac{13431}{13954}$, ideoque $\frac{a}{c} = \frac{523}{13954}$. Sicque ſumi poterit $a = 523$ et $c = 13954$, unde tandem fit $b = 11936$ et $d = 1046$.

§. 23. Caſum principalem, quo $m = 1$ et $n = 1$, quandóquidem hinc inventio binorum biquadratorum pendet, quorum ſummam in alia duo biquadrata reſolvere liceat, peculiari tractationi reſervamus, quae ergo continebit evolutionem hujus formulae $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$.

§. 24. Cum igitur hic ſit $m = 1$ et $n = 1$, pro quolibet numero ad lubitum aſſumpto q capiatur $\alpha = \frac{qq}{qq-1}$ et $\beta = \frac{1}{qq-1}$, unde porro accipiatur $s = \frac{3\alpha + \beta}{2}$ atque $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(3\alpha + \beta)^2}$, quibus

bus valoribus inventis erit $p = q(1+z)$ et $\frac{a}{c} = 1 + sz$. Denique vero erit $b = cp$ et $d = a = aq$, quibus praemiſſis ad exempla deſcendamus.

Exemplum I. quo $q = 3$.

§. 24. Evidens ſcilicet eſt hoc caſu ſumi non poſſe $q = 1$, quia litterae α et β fierent infinitae; deinde vero facile eſt praevidere, poſitionem $q = 3$ ſimpliciorem ſolutionem ſuppeditare quam $q = 2$. Sumpto igitur $q = 3$ erit $\alpha = \frac{9}{8}$ et $\beta = \frac{1}{8}$, unde fit $s = \frac{7}{4}$ atque $z = -\frac{96}{193}$. Hinc ergo colligitur $p = \frac{291}{193}$, tum vero $sz = -\frac{168}{193}$, ideoque $\frac{a}{c} = 1 + sz = \frac{25}{193}$; quocirca capiatur $a = 25$ et $c = 193$, eritque $b = 291$ et $d = 75$. Sicque pertingimus ad hanc ſolutionem

$$25 \cdot 291\,(25^2 + 291^2) = 193 \cdot 75\,(193^2 + 75^2)$$

ubi notetur eſſe

$$25^2 + 291^2 = 85306 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 193 \text{ et}$$
$$193^2 + 75^2 = 42879 = 2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97.$$

Nunc autem facile perſpicitur idem productum utrinque per factores eosdem prodire $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 97 \cdot 193$.

§. 25. Transferamus nunc hanc ſolutionem ad biquadrata, atque in genere ſi fuerit $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$, ſtatuatur $a = p+q$ et $b = p-q$, ſimilique modo $c = r+s$ et $d = r-s$, prodibitque iſta aequatio: $2(p^4-q^4) = 2(r^4-s^4)$. Hoc ergo modo erit $p^4 + s^4 = q^4 + r^4$, vbi notetur eſſe $p = \frac{a+b}{2}$; $q = \frac{a-b}{2}$; $r = \frac{c+d}{2}$ et $s = \frac{c-d}{2}$; ſive duplicando, ſumere licebit $p = a+b$; $q = a-b$; $r = c+d$ et $s = c-d$. Ex caſu igitur modo invento colligimus $p = 158$ $q = 133$; $r = 134$; et $s = 59$.

§. 26. Hi numeri prorſus conueniunt cum iis, quos initio commemoravimus, atque adeo ſine dubio ſimpliciſſi

mam

mam ſolutionem illius problematis, quod olim tractaveram, ſuppeditant, cum ſit $158^4 + 59^4 = 133^4 + 134^4$. Hic autem praeter expectationem ſe offert alia ſolutio noſtrae formulae $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$, hinc enim ſequitur fore $158^4 - 134^4 = 133^4 - 59^4$, unde in factores reſolvendo fit $24 . 292 (158^2 + 134^2) = 74 . 192 (133^2 + 59^2)$; vbi notetur ob $pp + qq = \frac{1}{2}(p + q)^2 + \frac{1}{2}(p - q)^2$, fore $158^2 + 134^2 = \frac{1}{2}(292)^2 + \frac{1}{2}(24)^2$, ſimilique modi $133^2 + 59^2 = \frac{1}{2}(192)^2 + \frac{1}{2}(74)^2$, quibus ſubſtitutis prodit forma noſtrae ſimilis

$$24 . 292 (292^2 + 24^2) = 74 . 192 (74^2 + 192^2)$$

ſingulisque factoribus per 2 diviſis erit

$$12 . 146 (146^2 + 12^2) = 37 . 96 (37^2 + 96^2).$$

§. 27 Ecce ergo deducti ſumus ad ſolutionem adhuc ſimpliciorem noſtrae formulae $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$, qua eſt $a = 12$; $b = 146$; $c = 37$ et $d = 96$. Siquidem hi numeri notabiliter ſunt minores, quam ſupra inventi; unde ſequitur methodus generalis ex qualibet ſolutione noſtrae formulae aliam ſolutionem derivandi. Cum enim poſito $a + b = p$; $a - b = q$; $c + d = r$ et $c - d = s$, prodeat haec aequalitas: $p^4 + s^4 = q^4 + r^4$, inde viciſſim erit $p^4 - r^4 = q^4 - s^4$, unde ſumptis factoribus erit

$$(p + r)(p - r)(pp + rr) = (q + s)(q - s)(qq + ss), \text{ ſive}$$
$$(p + r)(p - r)[(p + r)^2 + (p - r)^2] = (q + s)(q - s)[(q + s)^2 + (q - s)^2].$$

Quamobrem ſi ſtatuamus $p + r = a'$; $p - r = b'$; $q + s = c'$ et $q - s = d'$, habebimus $a'b'(a'a' + b'b') = c'd'(c'c' + d'd')$, quae ergo aequalitas locum habebit, ſi ſumatur $a' = (a + b) + (c + d)$; $b' = (a + b) - (c + d)$; $c' = (a - b) + (c - d)$ et $d' = (a - b) - (c - d)$.

§. 28. Cum igitur inveniſſemus $a = 291$; $b = 25$; $c = 193$ et $d = 75$, erit $a + b = 316$; $a - b = 266$; $c + d = 268$ et $c - d = 118$.

Hinc

Hinc colligitur ſore $a' = 584$; $b' = 48$; $c' = 384$ et $d' = 148$, qui numeri per 4 depreſſi praebent ſolutionem ſimpliciſſimam, ſcilicet: $a' = 146$; $b' = 12$; $c' = 96$ et $d' = 37$; ita vt ſit $146 \cdot 12\,(146^2 + 12^2) = 96 \cdot 37\,(96^2 + 37^2)$, ubi nempe eſt $146^2 + 12^2 = 21460 = 2^2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37$ et $96^2 + 37^2 = 10585 = 5 \cdot 29 \cdot 73$; et nunc vtrinque reſultat idem productum $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 73$. Ob inſignem igitur vſum hujus regulae eam ſequenti theoremate complectamur.

Theorema.

§. 29. *Si quatuor numeri* a, b, c, d *ita fuerint comparati, vt ſit* $ab\,(aa + bb) = cd\,(cc + dd)$, *tum ſi inde formentur iſti quaterni numeri*: $A = (a + b) + (c + d)$; $B = (a + b) - (c + d)$; $C = (a - b) + (c - d)$ et $D = (a - b) - (c - d)$, *erit quoque* $AB\,(A^2 + B^2) = CD\,(C^2 + D^2)$.

Hinc igitur patet pro qualibet ſolutione ſemper dari adhuc aliam ipſi conjugatam, ope hujus theorematis inveniendam, ita vt perpetuo binae ſolutiones conjugatae exhiberi queant, quae ita invicem ſunt connexae, vt ope theorematis altera ex altera definiatur.

§. 30. Quo nunc hinc alias ſolutiones facilius invenire liceat, formulas repertas ita adornemus, vt inde ſtatim valores integri pro numeris a, b, c, d exhiberi queant. Hunc in finem, quoniam etiam pro q fractiones accipere licet, ſtatim ponamus $q = \frac{f}{g}$, eritque $\alpha = \frac{ff}{ff - gg}$ et $\beta = \frac{gg}{ff - gg}$, unde fit $s = \frac{3ff + gg}{2(ff - gg)}$. Hinc cum porro fit $z = \frac{-3}{4\alpha + \beta(3\alpha + \beta)^2}$, erit $z = \frac{-3(ff - gg)^3}{4f^6 + f^4 gg + 10ffg^4 + g^6}$, unde fit $1 + z = \frac{f^6 + 10f^4 gg + ffg^4 + 4g^6}{4f^6 + f^4 gg + 10ffg^4 + g^6}$, tum vero erit $sz = -\frac{3(ff + gg)(ff - gg)^2}{2(4f^6 + f^4 gg + 10ffg^4 + g^6)}$, ergo

$$1 + sz = -\frac{-f^6 + 17f^4 gg + 17ffg^4 - g^6}{2(4f^6 + f^4 gg + 10ffg^4 + g^6)} = \frac{(ff + gg)(-f^4 + 18ffgg - g^4)}{2(4f^6 + f^4 gg + 10ffg^4 + g^6)}.$$

§. 31.

§. 31. Cum igitur poſuiſſemus $p = q(1+z) = \frac{f}{g}(1+z)$, erit $p = \frac{f(f^6 + 10 f^4 gg + ff g^4 + 4 g^6)}{g(4f^6 + f^4 gg + 10 ff g^4 + g^6)}$. Denique habebamus $\frac{a}{c} = 1 + sz$, unde ſi ſtatuamus

$a = (ff + gg)(-f^4 + 18 ffgg - g^4)$ et $c = 2(4f^6 + f^4 gg + 10 ffg^4 + g^6)$, cum fuerit $b = pc$ et $d = aq$, erit $b = \frac{2f(f^6 + 10 f^4 gg + ff g^4 + 4 g^6)}{g}$ et tandem $d = \frac{f(ff+gg)(-f^4 + 18 ff gg - g^4)}{g}$. Multiplicemus igitur omnes hos valores per g, eritque vt ſequitur:

$a = g(ff+gg)(-f^4 + 18 ff gg - g^4)$; $c = 2g(4f^6 + f^4 gg + 10 ffg^4 + g^6)$

$b = 2f(f^6 + 10 f^4 gg + ffg^4 + 4g^6)$; $d = f(ff+gg)(-f^4 + 18 ffgg - g^4)$.

§. 32. Hae quidem formulae numeros vehementer magnos producunt, qui autem plerumque per communem diviſorem ad numeros multo minores redigi poſſunt. Veluti ſi, vt ſupra fecimus, ſumamus $f = 3$ et $g = 1$, noſtrae formulae dabunt $a = 800$; $b = 9312$; $c = 6176$; et $d = 2400$; hi autem numeri omnes diviſionem admittunt per 32, quo pacto ad ipſos numeros ſupra inventos deprimuntur.

Exemplum II. quo $f = 2$ et $g = 1$.

§. 33. Subſtitutis his valoribus reperiemus $a = 5.55 = 275$; $b = 928$; $c = 626$ et $d = 550$, qui numeri vlterius ad minores deprimi non poſſunt. Hujus ſolutionis etiam exhibeamus ſuam coniugatam ſecundum theorema ſupra datum; erit ergo A = 2379; B = 27; C = 729; et D = 577. Sicque duas nacti ſumus novas ſolutiones.

Alia ſolutio

aequationis $ab(aa+bb) = cd(cc+dd)$.

§. 34. Poſito vt ante $b = cp$ et $d = aq$ adepti ſumus hanc aequationem: $\frac{aa}{cc} = \frac{p^3 - q}{q^3 - p}$, ita vt hanc fractionem

ad

ad quadratum redigi oporteat, ad quod praeſtandum hic alia via vtamur, quam in forma generali adhibere non licuiſſet. Statuamus ſcilicet $p = 1 + \alpha z$ et $q = 1 + \beta z$, reperieturque $\frac{aa}{cc} = \frac{3\alpha - \beta + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz}{3\beta - \alpha + 3\beta\beta z + \beta^3 zz}$, ſicque pervenimus ad fractionem, in qua quantitas incognita z tam in numeratore quam in denominatore non vltra quadratum aſſurgit, cujusmodi formulae ſatis commode tractari poſſunt, ſi fuerint vel primae partes abſolutae quadrata, vel ſi partes poſtremae fuerint quadrata.

Evolutio caſus prioris,

quo formulae $3\alpha - \beta$ et $3\beta - \alpha$ ſunt quadrata.

§. 35. Statuamus igitur $3\alpha - \beta = ff$ et $3\beta - \alpha = gg$, eritque $\alpha = \frac{3ff + gg}{8}$ et $\beta = \frac{ff + 3gg}{8}$ hocque modo habebimus $\frac{aa}{cc} = \frac{ff + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz}{gg + 3\beta\beta z + \beta^3 zz}$, quamobrem ſtatuamus $aa = ff + 3\alpha\alpha z + \alpha^3 zz$ et $cc = gg + 3\beta\beta z + \beta^3 zz$. Jam vt has formulas ad quadrata reducamus, formemus hanc aequalitatem: $aagg - ccff = 3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)z + (\alpha^3 gg - \beta^3 ff)zz$, et quia hic membrum ſiniſtrum duos habet factores $ag + cf$ et $ag - cf$, etiam membrum dextrum in duos factores reſolvi oportet, quorum alter ſtatuatur $ag + cf = \frac{z}{\lambda}$, eritque alter $ag - cf = 3\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff) + \lambda(\alpha^3 gg - \beta^3 ff)z$, vbi ad valorem λ inveniendum primo fiat $z = 0$ et addantur quadrata horum duorum factorum, quorum ſumma erit $2(aagg + ccff) = 9\lambda\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)^2$; at vero ex ipſis formulis propoſitis, poſito $z = 0$, ob $aa = ff$ et $cc = gg$, erit $2(aagg + ccff) = 4ffgg = 9\lambda\lambda(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)^2$, unde reperitur $\lambda = \frac{2fg}{3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)}$, quae forma, ob $ff = 3\alpha - \beta$ et $gg = 3\beta - \alpha$, abit in hanc $\lambda = \frac{2fg}{3(\beta - \alpha)^3}$.

§. 36. Invento jam hoc valore pro λ bini factores erunt $ag + cf = \frac{3(\beta-\alpha)^3 z}{2fg}$ et $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)z}{3(\alpha\alpha gg - \beta\beta ff)}$, ſive $ag - cf = 2fg + \frac{2fg(\beta+\alpha)(\beta\beta - 3\alpha\beta + \alpha\alpha)}{3(\beta-\alpha)^2}$. Statuamus autem brevitatis gratia $\frac{(\alpha+\beta)(\beta\beta - 3\alpha\beta + \alpha\alpha)}{3(\beta-\alpha)^2} = \Delta$, vt ſit $ag - cf = 2fg + 2fg\Delta z$. Addantur nunc iterum quadrata harum formarum, et prodibit:

$$2(aagg + ccff) = 4ffgg + 8ffgg\Delta z + 4ffgg\Delta^2 zz + \frac{9(\beta-\alpha)^6 zz}{4ffgg}.$$

Ex ipſis autem formulis propoſitis colligimus

$$2(aagg + ccff) = 4ffgg + 6(\alpha\alpha gg + \beta\beta ff)z + 2(\alpha^3 gg + \beta^3 ff)zz$$

ubi ergo prima membra ſe mutuo tollunt, reliqua per z diviſa dabunt hanc aequationem:

$$6(\alpha\alpha gg + \beta\beta ff) + 2(\alpha^3 gg + \beta^3 ff)z = 8ffgg\Delta + 4ffgg\Delta^2 z + \frac{9(\beta-\alpha)^6 z}{4ffgg}$$

ex qua aequatione facile deducitur valor ipſius z. Has autem formulas vlterius non evoluamus, quoniam evolutio quovis caſu ſpeciali facilius inſtituetur.

Evolutio caſus quo $f = 3$ et $g = 1$.

§. 37. Hic igitur erit $\alpha = \frac{7}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$, hinc ergo fiet $aa = 9 + \frac{147}{4}z + \frac{343}{8}zz$ et $cc = 1 + \frac{27}{4}z + \frac{27}{8}zz$; porro vero erit $\Delta = -\frac{25}{48}$. Hinc ergo pro quantitate z invenienda habebimus hanc aequationem:

$$195 + \frac{293}{2}z = -\frac{75}{2} + \frac{625}{64}z + 16z = -\frac{75}{2} + \frac{1619}{64}z,$$ ſive

$$\frac{465}{2} = -\frac{7727}{64}z,$$ unde fit $z = -\frac{14880}{7727}$. Hoc modo perveniremus ad nimis magnos numeros, quos vltra evolvere opere non eſt pretium.

§. 38. Interim tamen haud difficile erit hinc adeo in genere valores idoneos pro litteris a, b, c, d exhibere. Sumptis

Sumptis ſcilicet pro lubitu binis quadratis ff et gg, capiantur numeri α et β ita, vt ſit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3ff+gg}{3gg+ff}$; ſcilicet poſtquam fractio $\frac{3ff+gg}{3gg+ff}$ ad minimos terminos fuerit reducta, numerator pro α, denominator vero pro β accipiatur, quo facto erunt numeri quaeſiti

$$a = f(\alpha+\beta)(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta);$$
$$b = g(\beta^3 - 5\alpha\beta\beta + 4\alpha\alpha\beta - 2\alpha^3);$$
$$c = g(\alpha+\beta)(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta);$$
$$d = f(\alpha^3 - 5\alpha\alpha\beta + 4\alpha\beta\beta - 2\beta^3).$$

Vel ſi ponatur $(\alpha+\beta)(\alpha\alpha - 3\alpha\beta + \beta\beta) = \Delta$, erit $a = f\Delta$; $b = g(\Delta - 3\alpha(\alpha-\beta)^2)$; $c = g\Delta$ et $d = f(\Delta - 3\beta(\alpha-\beta)^2)$. Harum formularum ope exempla multo facilius evolui poterunt.

§. 39. Ita ſi ſumamus $f = 3$ et $g = 1$, erit $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$; erit ergo $\alpha = 7$ et $\beta = 3$, hinque $\Delta = -50$, quocirca ipſi numeri quaeſiti reperiuntur $a = 150$; $b = 386$; $c = 50$ et $d = 582$, qui porro per binarium depreſſi fiunt $a = 75$; $b = 193$; $c = 25$ et $d = 291$.

§. 40. Conſideremus nunc quoque caſum, quo $f = 2$ et $g = 1$, eritque $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{13}{7}$; quare capiatur $\alpha = 13$ et $\beta = 7$, unde fit $\Delta = -1100$, hincque ipſi numeri quaeſiti prodeunt $a = 2200$; $b = 2504$; $c = 1100$, $d = 3712$, qui per 4 depreſſi evadunt $a = 550$; $b = 626$, $c = 275$; $d = 928$; quae ſolutio convenit cum ſolutione ſupra §. 33. inventa.

§. 41. Fundamentum hujus Analyſeos ſequenti nititur problemati:

Proble-

Problema.

Propoſitis his duabus formulis: $xx + 2fxy + hyy$, *nec non* $xx + 2gxy + kyy$, *invenire rationem inter numeros* x *et* y, *vt ambae iſte formulae evadant quadrata.*

Solutio.

§. 42. Ponatur $xx + 2fxy + hyy = P^2$ et $xx + 2gxy + kyy = Q^2$ ac differentia dabit $PP - QQ = 2(f-g)xy + (h-k)yy$. Statuatur alter factor $P - Q = (f-g)y$, eritque alter $P + Q = 2x + \frac{(h-k)y}{f-g}$. Jam quadrata horum duorum factorum addantur, prodibitque

$$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + \frac{4(h-k)xy}{f-g} + \frac{(h-k)^2yy}{(f-g)^2} + (f-g)^2yy;$$

ex ipſis autem formulis propoſitis erit

$$2P^2 + 2Q^2 = 4xx + 4(f+g)xy + 2(h+k)yy,$$

unde quia primi termini $4xx$ ſe deſtruunt, reliqui per y diviſi dant hanc aequationem:

$$4(f+g)x + 2(h+k)y = \frac{4(h-k)x}{f-g} + \frac{(h-k)^2y}{(f-g)^2} + (f-g)^2y$$

ſive $4(f-g)[ff-gg-h+k]x = ([(h-k)^2+(f-g)^2][(f-g)^2-2(h+k)])y$ hinc igitur erit $\frac{x}{y} = \frac{(f-g)^4 - 2(h+k)[(f-g)^2+(h-k)^2]}{4(f-g)(ff-gg-h+k)}$.

§. 43. Supra adhuc mentionem fecimus alius caſus, quo ambae formulae pro aa et cc ad quadrata redigi queant (§. 34.) vbi, vt partes poſtremae ſiant quadrata, neceſſe eſt vt ambo numeri α et β ſint quadrata. Sit igitur $\alpha = mm$ et $\beta = nn$, eritque

$$aa = m^6zz + 3m^4z + 3mm - nn \quad \text{et}$$
$$cc = n^6zz + 3n^4z + 3nn - mm.$$

§. 44.

§. 44. Has aequalitates vt ad formam ſuperioris problematis revocemus, ita repraeſentemus:

$$aan^6 = m^6n^6zz + 3m^4n^6z + 3mmn^6 - n^8 \text{ et}$$
$$ccm^6 = m^6n^6zz + 3n^4m^6z + 3nnm^6 - m^8$$

et jam facta comparatione erit $x = m^3n^3z$, ſumptoque $y = 1$, erit pro hoc caſu $2fm^3n^3z = 3m^4n^6z$, unde fit $f = \frac{3}{2}mn^3$ et $g = \frac{3}{2}nm^3$, denique vero $h = 3nnm^6 - m^8$ et $k = 3mmn^6 - n^8$, unde colligitur $f - g = \frac{3}{2}mn(nn - mm)$ et $h - k = 3nnm^6 + n^8 - 3mmn^6 - m^8 = (n^4 - m^4)(n^4 + m^4 - 3mmnn)$. Jam problema nobis praebet valorem $\frac{x}{y} = m^3n^3z = \frac{((f-g)^4 - 2(h-k))((f-g)^2 + (h-k)^2)}{4(f-g)(ff - gg - h + k)}$.

§. 45. Coronidis loco ſubjungam hic adhuc aliam Analyſin pro reſolutione formulae $ab(aa + bb) = cd(cc + dd)$. Quoniam res perducta eſt ad hanc aequationem: $\frac{aa}{cc} = \frac{p^3 - q}{q^3 - p}$, ponatur $p = nn(q + 1) - 1$, fietque

$$\frac{aa}{cc} = \frac{n^6(q+1)^3 - 3n^4(q+1)^2 + 3nn(q+1) - 1 - q}{q^3 - nn(q+1) + 1}$$

quae fractio per factorem $q + 1$ depreſſa dabit

$$\frac{aa}{cc} = \frac{n^6(q+1)^2 - 3n^4(q+1) + 3nn - 1}{qq - q + 1 - nn}, \text{ ſive}$$
$$aa = n^6qq + n^4(2nn - 3)q + (nn - 1)^3$$

tum vero

$$cc = qq - q + 1 - nn, \text{ ſive } n^6cc = n^6qq - n^6q - n^6(nn - 1).$$

Pro problemate igitur capi oportebit $x = n^3q$ et $y = 1$; reliqua ſunt manifeſta.

SOLU-

SOLUTIO PROBLEMATIS MECHANICI

Auctore *L. EVLERO.*

Conventui exhibita die 25. April. 1782.

§. 1.

Tab. I. Fig. I.

Referat circulus XTGF, cujus centrum in C, globum ſive cylindrum, aliudve corpus rotundum, plano inclinato AH incumbens, cujus inclinatio ad horizontem ſit angulus AHD $= \zeta$; circuli autem radius ponatur CX $= a$. Corporis, hoc circulo repraeſentati, axis maneat perpetuo horizontalis, ejusque maſſa ſtatuatur $=$ M, qua ſimul ejus pondus exprimatur. Momentum vero inertiae reſpectu axis ſit $=$ Mkk.

§. 2. Huic circulo, ſeu corpori rotundo, circumvolutum intelligatur filum, cujus terminus extremus fixus ſit in puncto E, a plano inclinato diſtante intervallo AE $= a$, hoc eſt radio circuli aequali, cujus ſitus initio tangebat punctum E, filo ſcilicet penitus involuto. Hinc autem elapſo tempore t pervenerit in ſitum figurâ repraeſentatum, quem jam filum deſerat in puncto T, ejusque portio ulterior circulo ſit circumvoluta, indefinitae longitudinis, ut, quamdiu corpus deſcendat, evolvi queat.

§. 3.

§. 3. Nunc igitur circulus tangat planum inclinatum AH in puncto X, ac ponatur ſpatium $AX = x$, ita ut, ſumpto intervallo $AB = a$, ſit $BX = x - a$, eritque BX ſpatium motu corporis progreſſivo deſcriptum. Tum igitur, ducta recta EC, ea erit plano inclinato AH parallela, ideoque aequalis ipſi x; unde ducto radio CT erit anguli ECT coſinus $= \frac{a}{x}$, at anguli XCT ſive CET ſinus $= \frac{a}{x}$. Ponatur autem iſte angulus $XCT = CET = \vartheta$, ita ut ſit $\sin.\vartheta = \frac{a}{x}$.

§. 4. Hinc jam longitudo fili evoluti colligitur fore $ET = x \cos.\vartheta$, cui ſi aequalis ſtatuatur arcus TGF, erit F punctum circuli, quod initio applicatum erat puncto E, ubi ergo radius CF erat plano inclinato AH parallelus ſive cadebat in EG. Statuatur angulus motu rotatorio jam confectus $GCF = \Phi$, erit angulus $TCF = 90° - \vartheta + \Phi$, ex quo ipſe arcus $TGF = a(90° - \vartheta + \Phi)$, qui cum aequalis ſit rectae $TE = a \cot.\vartheta$, hinc concluditur angulus $\Phi = \cot.\vartheta - 90° + \vartheta$. Unde patet, tam ſpatium x quam angulum Φ per angulum ϑ definiri poſſe, cum ſit $X = \frac{a}{\sin.\vartheta}$ et $\Phi = \cot.\vartheta - 90° + \vartheta$.

§. 5. Ut jam in motum corporis noſtri ſuper plano inclinato deſcendentis inquiramus, obſervandum eſt, corpus primo ſollicitari a propria gravitate $= M$; unde oritur vis motum progreſſivum accelerans $= M \sin.\zeta$. Deinde vero corpus etiam urgetur a tenſione fili TE, quae autem tenſio etiamnunc penitus eſt incognita. Ponatur ea $= T$, et cum corpus urgeat ſecundum directionem TE, ea producit vim directioni motus progreſſivi contrariam ſecundum CE ſollicitantem $= T \cos.\vartheta$, ita ut motus progreſſivus centri C, ubi ſimul cen-

centrum gravitatis totius corporis exiſtere aſſumimus, vis fit $= M \sin.\zeta - T \cos.\vartheta$.

§. 6. Ex primis igitur motus principiis, ſumendo elementum temporis dt conſtans, ac denotante g altitudinem lapſus uno minuto ſecundo peracti, ſequitur fore $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \frac{M \sin.\zeta - T \cos.\vartheta}{M}$. Hac ſcilicet aequatione motus corporis progreſſivus determinatur, unde autem nihil adhuc concludere licet, propterea quod vis T eſt incognita. Hanc ergo aequationem combinari oportet cum ea, qua motus corporis gyratorius determinatur.

§. 7. Jam obſervavimus, corpus motu gyratorio jam abſolviſſe angulum $GCF = \Phi$, in ſenſum GF, qui ergo motus unice producitur a tenſione fili $ET = T$, cujus momentum, reſpectu axis gyrationis, eſt Ta, quod diviſum per momentum inertiae Mkk dabit accelerationem motus gyratorii, quae ex principiis motus eſt $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2}$. Habebimus ergo hanc aequationem: $\frac{\partial\partial\Phi}{2g\partial t^2} = \frac{Ta}{Mkk}$, ex qua colligitur ipſa vis incognita, ſeu tenſio $T = \frac{Mkk\partial\partial\Phi}{2ag\partial t^2}$.

§. 8. Subſtituatur igitur iſte valor in aequatione ante inventa et facta diviſione per maſſam M prodibit iſta aequatio: $\frac{\partial\partial x}{2g\partial t^2} = \sin.\zeta - \frac{kk\partial\partial\Phi \cos.\vartheta}{2ag\partial t^2}$, unde fit $\sin.\zeta = \frac{kk\partial\partial\Phi \cos.\vartheta + a\partial\partial x}{2ag\partial t^2}$, atque in hujus aequationis integratione erit elaborandum. Verum ſi ambas incognitas x et Φ per angulum ϑ exprimere velimus, ope formularum $x = \frac{a}{\sin.\vartheta}$ et $\Phi = \cot.\vartheta - 90^0 + \vartheta$, ob differentialia ſecundi gradus delaberemur in aequationem tantopere complicatam, ut nihil prorſus inde concludi poſſet.

§. 9.

§. 9. Singulari autem artificio haec inſignis difficultas ſuperari poteſt, cujus ope potius ipſe angulus ϑ ex calculo extrudi poterit, ita ut, etiamſi binae variabiles x et Φ in ea relinquantur, totum tamen negotium facile confici queat. Cum enim ſit $\partial x = -\frac{a \partial \vartheta \cos. \vartheta}{\sin. \vartheta^2}$ et $\partial \Phi = -\frac{\partial \vartheta}{\sin. \vartheta^2} + \partial \vartheta = -\frac{\partial \vartheta \cos \vartheta^2}{\sin. \vartheta^2}$, colligitur $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\cos. \vartheta}{a}$, ſive $\cos. \vartheta = \frac{a \partial \Phi}{\partial x}$.

§. 10. In aequatione ergo differentio-differentiali ante inventa loco $\cos. \vartheta$ iſte valor $\frac{a \partial \Phi}{\partial x}$ ſubſtitutus hanc producit aequationem integrationem admittens: $\partial x \sin. \zeta = \frac{kk \partial \Phi \partial \partial \Phi + \partial x \partial \partial x}{2 g \partial t^2}$, cujus integrale eſt $C + x \sin. \zeta = \frac{\partial x^2 + kk \partial \Phi^2}{4 g \partial t^2}$. Quoniam autem motus initium aſſumſimus ubi $x = a$, hoc integrale, habita conſtantis ratione, erit $(x - a) \sin. \zeta = \frac{\partial x^2 + kk \partial \Phi^2}{4 g \partial t^2}$.

§. 11. Ex hac jam aequatione ipſum tempus elapſum t determinari poterit. Cum enim ſit

$4 g (x - a) \partial t^2 \sin. \zeta = \partial x^2 + kk \partial \Phi^2$, ob $x = \frac{a}{\sin. \vartheta}$,

$\partial x = -\frac{a \partial \vartheta \cos. \vartheta}{\sin. \vartheta^2}$ et $\partial \Phi = -\frac{\partial \vartheta \cos. \vartheta^2}{\sin. \vartheta^2}$, his valoribus ſubſtitutis habebitur iſta aequatio:

$$\frac{4 a g \partial t^2 \sin. \zeta (1 - \sin. \vartheta)}{\sin. \vartheta} = \frac{\partial \vartheta^2 \cos. \vartheta^2}{\sin. \vartheta^2} (aa + kk \cos. \vartheta^2),$$ unde fit

$$\partial t = \frac{\partial \vartheta \cos. \vartheta}{2 \sin. \vartheta} \sqrt{\frac{aa + kk \cos. \vartheta^2}{ag \sin. \zeta \sin. \vartheta (1 - \sin. \vartheta)}},$$ unde colligitur

$$t = -\int \frac{\partial \vartheta \cos. \vartheta}{2 \sin. \vartheta} \sqrt{\frac{aa + kk \cos. \vartheta^2}{ag \sin. \zeta \sin. \vartheta (1 - \sin. \vartheta)}}.$$ Hic ſcilicet ſignum negativum praefigimus, quoniam angulus ϑ continuo decreſcit, qui angulus initio, ubi $t = 0$, erat $\vartheta = 90°$.

§. 12. Hinc igitur patet, tempus t pro quovis angulo ϑ definiri poſſe per formulam quidem integralem, quam autem

 neque

neque per logarithmos neque per arcus circulares evolvere licet. Quo haec expreſſio aliquanto ſimplicior evadat, ponatur $\mathit{ſin}.\,\vartheta = s$, eritque tempus

$$t = \frac{-1}{2\sqrt{ag\,sin.\,\zeta}} \int \frac{\partial s}{s} \sqrt{\frac{aa + kk\,(1 - ss)}{s\,(1 - s)}},$$

ac ſi ponatur $s = \frac{1}{z}$ erit

$$t = \frac{+1}{2\sqrt{ag\,\mathit{ſin}.\,\zeta}} \int \frac{\partial z}{z} \sqrt{\frac{(aa + kk)\,zz - kk}{z - 1}}.$$

Viciſſim ergo, conceſſis quadraturis, ad quodvis tempus t angulus ϑ reperiri poterit, quo invento etiam ſpatium x cum angulo Φ habebitur.

§. 13. Longe autem difficilius eſt tenſionem fili ET per expreſſionem finitam aſſignare, quippe quae hactenus fuerat incognita atque hanc ob cauſſam ex calculo expulſa. Erat autem ex motu gyratorio $\frac{Ta}{Mkk} = \frac{\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2}$, unde neceſſe eſt differentiale ſecundum $\partial\partial\Phi$ ad differentiale primi gradus revocare, quod praeſtari poterit ope poſtremae aequationis differentio-differentialis, unde integrale hauſimus, quaeque erat $\partial x\,\partial\partial x + kk\,\partial\Phi\,\partial\partial\Phi = 2g\,\partial t^2\,\partial x\,sin.\,\zeta$. Fuerat autem $\partial x\,cos\,\vartheta = a\,\partial\Phi$, hinc differentiando colligitur $a\,\partial\partial\Phi = \partial\partial x\,cos.\,\vartheta - \partial\vartheta\,\partial x\,sin.\,\vartheta$, ex qua aequatione oritur $\partial\partial x = \frac{a\,\partial\partial\Phi}{cos.\,\vartheta} + \partial x\,\partial\vartheta\,tag\,\vartheta$, qui valor in illa ſubſtitutus praebet hanc: $\partial\partial\Phi\left(\frac{a}{cos.\,\vartheta} + \frac{kk\,cos.\,\vartheta}{a}\right) = 2g\,\partial t^2\,\mathit{ſin}.\,\zeta - \partial x\,\partial\vartheta\,tag.\,\vartheta$. Sicque nunc differentio-differentiale $\partial\partial\Phi$ per differentialia primi gradus definitur. Atque ſi loco $2g\partial t^2$ et ∂x valores ſupra per $\partial\vartheta$ expreſſi ſubſtituantur, orietur

$$\frac{\partial\partial\Phi\,(aa + kk\,cos.\,\vartheta^2)}{a\,cos.\,\vartheta} = \partial\vartheta^2\left(\frac{aa\,(1 + sin.\,\vartheta^2 - 2\,sin.\,\vartheta^3) + kk\,cos.\,\vartheta^4}{2a\,\mathit{ſin}.\,\vartheta^3\,(1 - \mathit{ſin}.\,\vartheta)}\right)$$

§. 14.

§. 14. Quod ſi ergo hinc valor pro $\partial\partial\Phi$ in formula pro tenſione fili T inventa ſubſtituatur, prodibit

$$T = \frac{Mkk}{2ag\partial t^2} + \frac{\partial\vartheta^2 \cos.\vartheta\,(aa(1+\sin.\vartheta^2 - 2\sin.\vartheta^3) + kk\cos.\vartheta^4)}{2\sin.\vartheta^3\,(1-\sin.\vartheta)(aa+kk\cos.\vartheta^2)}$$

Est vero $2ag\partial t^2 = \frac{\partial\vartheta^2 \cos.\vartheta^2\,(aa+kk\cos.\vartheta^2)}{2\sin.\vartheta^2\,\sin.\zeta\,\sin.\vartheta\,(1-\sin.\vartheta)}$, unde fit tenſio

$$T = \frac{Mkk\sin.\zeta\,(aa(1+\sin.\vartheta^2 - 2\sin.\vartheta^3) + kk\cos.\vartheta^4}{\cos.\vartheta\,(aa+kk\cos.\vartheta^2)^2}$$

quae expreſſio quia ſolum angulum ϑ involvit, ad quodvis tempus elapſum t tenſio T abſolute aſſignari poterit et cum pondere M comparari.

§. 15. Denique etiam tam celeritas corporis progreſſiva, quae eſt $\frac{\partial x}{\partial t}$, quam gyratoria $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, ſatis eleganter definiri poteſt. Si enim ponamus $\frac{\partial x}{\partial t} = v$ et $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = u$, erit aequatio $vv + kkuu = 4g(x-a)\sin\zeta$. Unde ſimul patet principium virium vivarum hic egregie conſervari. Cum enim ſit Mvv vis viva motus progreſſivi et $Mkkuu$ vis viva motus gyratorii, erit ſumma utriusque $M(vv+kkuu) = 4gM(x-a)\sin\zeta$, cujus aequationis membrum poſtremum exprimit deſcenſum verticalem centri gravitatis corporis in maſſam M ductum, cui conſtat ſemper aequalem eſſe debere totam vim vivam hoc deſcenſu generatam.

§. 16. Quin etiam ex ſolo principio conſervationis virium vivarum iſta aequatio facile deduci potuiſſet. Neque vero patet quomodo hinc ipſa tenſio fili, qua inſigne momentum perfectae ſolutionis eſt conſtituendum, derivari potuiſſet. Quam ob cauſſam operam dedi, ut univerſam hujus Problematis ſolutionem ex primis motus principiis repeterem.

DE MOTU BACULI
SUPER PLANO INCLINATO, CUI INSISTIT, DESCENDENTIS.

AUCTORE

NICOLAO FUSS.

Conventui exhibuit die 23 Febr. 1797

§. 1.

Si diſcus circularis politiſſimus, vel etiam globus plano imponatur inclinato pariter politiſſimo, is, actioni gravitatis relictus, ſuper hoc plano rependo, ſeu radendo deſcendet. Quoniam enim, ſepoſita frictione, praeter gravitatem nulla alia vis adeſt, directio autem vis gravitatis per ipſum centrum gravitatis tranſit, inde nullus motus gyratorius oriri poteſt. Idem evenit quando pertica vel baculus B A perpendiculariter imponatur plano inclinato politiſſimo E C; remota enim frictione corpus planum radendo delabetur, ſervata poſitione plano normali. Nihil enim impedit quo minus extremitas A, planum radendo, ſequatur centrum gravitatis in directione plano parallela G R procedens. Namque ſola vis, quae in baculum agit, eſt gravitas, cujus directio per centrum gravitatis transit nullamque gyrationem circa hoc punctum gignere poteſt.

Tab. I. Fig. 2.

§. 2. Longe ſecus res ſe habet, quando poſitio initialis baculi non eſt perpendicularis, ſed vtcunque ad planum incli-

inclinata ſub angulo $B'AC$; tum enim extremitas A ſollicitabitur vi FA, preſſioni P aequali et oppoſita, cujus momentum, demiſſo ex centro gravitatis G in planum EC, perpendiculo GH, erit $P.AH$; haecque vis producit motum gyratorium circa centrum gravitatis G, quo ſcilicet angulus $B'AC$ vel augetur, vel minuitur, provti initio baculus vel verſus E, vel verſus C fuerit inclinatus. Hunc igitur motum in ſequentibus pagellis accuratius examinare conſtitui.

Tab. I. Fig. 3.

§. 3. Plano igitur EC, ad planum verticale ED inclinato ſub angulo $CED = \alpha$, imponatur in A baculus AB, ita vt ejus axis reperiatur in plano planis ED et EC normali, cum plano vero EC angulum faciat $BAC = \beta$. Iſte porro baculus, cujus maſſa ſit M, centrumque gravitatis in G ad diſtantiam $AG = a$, actioni gravitatis relictus, ima extremitate A planum EC radet, ſimulque obtinebit motum gyratorium circa centrum gravitatis, hicque motus absque frictione et perpetuo in eodem plano, planis ED et EC normali, fieri concipitur.

§. 4. Ponamus nunc tempore t minutorum ſecundorum ab initio motus elapſo baculum perveniſſe vsque in punctum Z plani inclinati, exiſtente ſpatio percurſo $AZ = z$, inclinatione vero baculi, ſive angulo $BZC = \Phi$. Quibus poſitis, ſi ex centro gravitatis G in planum EC demittatur perpendiculum GX, voceturque $XA = x$, $GX = y$, pro poſitione puncti G habebimus

$$x = z + a \cos \Phi;$$
$$y = a \sin \Phi.$$

§. 5.

§. 5. Quod vires attinet, quibus corpus ſollicitatur, gravitatem M nempe et preſſionem P, prior, qua centrum gravitatis G urgetur in directione GM, reſolvatur ſecundum directiones G R et GX plano parallelam et normalem, eritque

vis ſecundum $GR = M\, cos.\, \alpha$;
vis ſecundum $GX = M\, ſin.\, \alpha$.

Preſſio autem P, quam corpus exerit in planum in directione plano normali Z Π, per reactionem dat vim in baculum agentem in directione contraria Z P, vel G Q Denique haec ipſa vis P tendit ad producendum motum gyratorium circa centrum gravitatis, ejusque momentum eſt $P\, a\, cos.\, \Phi$.

§. 6. His circa actionem virium ad motum ſollicitantium, earumque directiones notatis, principia mechanica ſequentes ſuppeditabunt tres aequationes differentiales ſecundi gradus:

$$\text{I.}\quad \frac{M\,\partial\partial x}{2g\,\partial t^2} = M\, cos.\, \alpha;$$
$$\text{II.}\quad \frac{M\,\partial\partial y}{2g\,\partial t^2} = P - M\, sin.\, \alpha;$$
$$\text{III.}\quad \frac{M\,k\,k\,\partial\partial\Phi}{2g\,\partial t^2} = - P\, a\, cos.\, \Phi.$$

Vbi g indicat altitudinem, ex qua gravia libere primo minuto ſecundo delabuntur; Mkk vero momentum inertiae corporis reſpectu axis gyrationis, per centrum gravitatis transeuntis planoque verticali, in quo motus fieri concipitur, normalis.

§. 7. Prima harum aequationum ducta in $2g\,\partial t$ et integrata praebet celeritatem progreſſivam centri gravitatis ſecundum A X,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 2gt\, cos\, \alpha$$

vbi

vbi conſtantis additione non opus eſt, quoniam haec celeritas ſponte evaneſcit, caſu $t = o$, vti requiritur. Ex hac poſtrema aequatione in ∂t ducta et denuo integrata deducitur intervallum

$$AX = x = C + g\,tt \cos.\alpha$$

vbi conſtans C ita eſt determinanda, vt pro ſtatu initiali, vbi $t = o$, fiat $x = a \cos\beta$, ita vt habeamus

$$AX = x = a \cos\beta + g\,tt \cos\alpha$$

§. 8. Tertia aequatio § 6 ſtatim dat preſſionem baculi in planum

$$P = -\frac{M k k \partial\partial\Phi}{2 g a \partial t^2 \cos.\Phi}.$$

Ex valore vero $y = a \sin.\Phi$ ſequitur fore

$$\partial\partial y = \partial\partial.(a \sin.\Phi)$$

hisque valoribus in ſecunda aequatione ſubſtitutis oritur iſta:

$$\frac{\partial\partial.(a \sin.\Phi)}{2 g \partial t^2} + \sin.\alpha + \frac{k k \partial\partial\Phi}{2 g a \partial t^2 \cos.\Phi} = o.$$

Ducatur haec aequatio in $2.\partial.\sin.\Phi = 2\partial\Phi \cos.\Phi$, prodibitque aequatio integrabilis

$$\frac{2.\partial.\sin.\Phi.\partial\partial.(a \sin.\Phi)}{2 g \partial t^2} + 2 \sin.\alpha\partial\Phi \cos.\Phi + \frac{2 k k \partial\Phi\partial\partial\Phi}{2 g a \partial t^2} = o$$

cujus integrale eſt

$$\frac{a(\partial.\sin.\Phi)^2}{2 g \partial t^2} + 2 \sin.\alpha \sin.\Phi + \frac{k k \partial\Phi^2}{2 g a \partial t^2} = C$$

vnde colligitur celeritas angularis ſeu gyratoria

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2 g a (C - 2 \sin.\alpha \sin.\Phi)}{kk + aa \cos.\Phi^2}}.$$

At vero initio, vbi $t = o$ et $\Phi = \beta$, celeritas gyratoria debet eſſe nulla, ex quo concluditur fore conſtantem $C = 2 \sin.\alpha \sin.\beta$, hincque ſit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{g a \sin.\alpha(\sin.\beta - \sin.\Phi)}{kk + aa \cos.\Phi^2}}$$

vnde denique tempus ab initio motus elapſum ita expreſſum nanciſcimur,

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g a\, sin.\alpha}} \int \frac{\partial\Phi \sqrt{(kk + aa\, cos.\Phi^2)}}{\sqrt{(sin.\beta - sin.\Phi)}}$$

§. 9. Quodſi igitur tempus t ex hac formula pro quolibet angulo Φ finite aſſignari poſſet, omnia reliqua elementa x, z, y forent determinata, quoniam eſt

$$x = a\, cos.\beta + gtt\, cos.\alpha$$
$$y = a\, sin.\Phi$$
$$z = x - a\, cos\Phi$$

Quin etiam ipſa preſſio P, vti mox videbimus, pro quolibet angulo Φ facile aſſignari poteſt. Verum formula illa integralis $\int \frac{\partial\Phi \sqrt{(kk - aa\, cos.\Phi^2)}}{\sqrt{(sin.\beta - sin.\Phi)}}$, ita eſt comparata, vt ejus integrale non niſi approximando, aut per quadraturas exhiberi queat.

§. 10. Quod preſſionem attinet, ea commodiſſime ſequenti modo determinabitur. Cum ex tertia aequatione § 6 fit

$$P = -\frac{M kk\, \partial\partial\Phi}{2ga\, \partial t^2\, cos.\Phi}$$

in § 8 vero invenerimus

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 2\sqrt{\frac{g a\, sin.\alpha\, (sin.\beta - sin.\Phi)}{kk + aa\, cos.\Phi^2}}$$

ſumtis vtrinque quadratis erit

$$\frac{\partial\Phi^2}{4ga\, \partial t^2} = \frac{sin.\alpha\, (sin.\beta - sin.\Phi)}{kk + aa\, cos.\Phi^2}$$

hincque differentiando et per $\partial\Phi\, cos.\Phi$ dividendo adipiſcimur

$$\frac{\partial\partial\Phi}{2ga\, \partial t^2\, cos.\Phi} = \frac{2\, aa\, sin.\alpha\, sin.\Phi\, (sin.\beta - sin.\Phi)}{(kk + aa\, cos.\Phi^2)^2} - \frac{sin.\alpha}{kk + aa\, cos.\Phi^2}$$

ita vt ſit ratio preſſionis ad pondus

$$\frac{P}{M} = \frac{kk\, sin.\alpha}{kk + aa\, cos.\Phi^2} - \frac{2\, aakk\, sin.\alpha\, sin.\Phi\, (sin.\beta - sin.\Phi)}{(kk + aa\, cos.\Phi^2)^2}$$

quae igitur pro ſtatu initiali, vbi $\Phi = \beta$, eſt

$$\frac{P}{M} = \frac{kk\, sin.\alpha}{kk + aa\, cos.\beta^2}$$

pro

pro ſtatu finali vero, vbi $\Phi = o$,

$$\frac{P}{M} = \frac{kk\,sin.\alpha}{kk + aa}.$$

§. 11. Quoad methodum quemlibet caſum determinatum per approximationem tractandi, quoniam pro ſtatu initiali eſt $\Phi = \beta$, ab hoc valore inchoando angulo Φ ſucceſſive tribui poterunt valores $\Phi = \beta$, $\Phi = \beta - i$, $\Phi = \beta - 2i$, $\Phi = \beta - 3i$, $\Phi = \beta - 4i$, et ita porro, vsque ad $\Phi = \beta - \beta = o$, ita vt decrementum conſtans ſit $\partial\Phi = i$, denotante i angulum valde parvum, veluti vnius gradus, duorum aut ad ſummum trium graduum, hocque modo ex formula differentiali

$$\partial t = \frac{i}{2\sqrt{g\,a\,sin.\alpha}} \sqrt{\frac{kk + aa\,cos.\Phi^2}{sin.\beta - sin.\Phi}}$$

elicientur incrementa temporis ∂t, quorum ſummae praebebunt tempora epochis $\Phi = \beta$, $\Phi = \beta - i$, $\Phi = \beta - 2i$, etc. reſpondentia; tum vero pro ſingulis epochis innoteſcent x, y, z et P; hocque modo motus baculi ſatis accurate cognoſcetur, eoque accuratius, quo minor angulus i fuerit aſſumtus.

§. 12. Quoniam autem formula pro ∂t modo exhibita ea laborat difficultate, quod pro ipſo motus initio, vbi $\Phi = \beta$, ejus denominator evaneſcit, ad abigendum hoc incommodum ponam $sin.\beta - sin.\Phi = sin.\psi^2$, ita ut ſit $- \partial\Phi\,cos.\Phi = 2\,\partial\psi$ $sin.\psi\,cos.\psi$, ubi ſignum negationis tantum indicat, creſcente angulo ψ angulum Φ decreſcere. Hinc autem prodit

$$\partial t = \frac{h\,cos.\psi\sqrt{(kk + aa\,cos.\Phi^2)}}{cos\,\Phi}$$

exiſtente $h = \frac{\partial\psi}{\sqrt{g\,a\,sin.\alpha}}$ factore conſtante, ob $\partial\psi$ angulum conſtantem valde parvum. In hac enim formula denominator $cos.\Phi$ non amplius evaneſcit, niſi pro ſtatu initiali,

 ſi

ſi fuerit $\beta = 90^\circ$, circa quem autem caſum jam initio obſervavimus, eum, remota frictione, nullum motum gyratorium gignere poſſe, ideoque nihil habere difficultatis. Pro hoc enim ſtatu initiali aequatio $x = g\,tt\,cos.\,\alpha$, ex qua ſit $t = \sqrt{\frac{x}{g\,cos.\,\alpha}}$, totam problematis ſolutionem complectitur.

§. 13. Evolvamus caſum determinatum, inquirendo in motum baculi cylindrici, cujus diameter unius pollicis, longitudo vero octo pedum, ſuper plano inclinato cum verticali angulum 60 graduum conſtituente, exiſtente poſitione initiali 80 graduum. Baculum ſupponamus homogeneum, vt centrum gravitatis in ejus medium cadat, et pro vnitate lineari ſumamus pedem quorum 16 conſtituunt altitudinem, ex qua gravia primo minuto ſecundo libere delabuntur. His menſuris ita ſtabilitis erit $g = 16$ pedum, $a = 4$ pedum, radius cylindri $b = \frac{1}{2}$ pollicis, hincque $kk = \frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}bb = 5,333767$. Porro erit $\alpha = 60^\circ$ et $\beta = 80^\circ$ hincque $h = 0,\ 1343212 \cdot \partial\psi$; vnde ſi angulo ψ ſucceſſive tribuamus incrementa trium graduum, erit $\partial\psi = 0,\ 2094395$ ped. conſequenter $h = 0,\ 0281323$, ideoque

$$\partial t = \frac{0,0281323\ cos.\,\psi\,\sqrt{(5,333767 - 16\ cos.\,\Phi^2)}}{cos.\,\Phi}$$

$$x = 0,\ 69459 + 8\,tt;$$

$$y = 4\ sin.\,\Phi;$$

$$z = x - 4\,cos.\,\Phi;$$

$$\frac{P}{M} = \frac{4,619177}{5,333767 + 16\ cos.\,\Phi^2} - \frac{147,8137\ sin.\,\Phi\ sin.\,\psi^2}{(5,333767 + 16\ cos.\,\Phi^2)^2}.$$

Sequens tabula phaenomena motus baculi ſatis accurate exhibebit.

ψ

ψ	ϕ	t	x	y	z	P : M
0°	80°, 0′	0, 00	0, 69	3, 94	0, 00	0, 79
3	79, 8	0, 36	1, 74	3, 93	0, 99	0, 77
6	76, 52	0, 67	4, 26	3, 90	3, 35	0, 71
9	73, 48	0, 92	7, 52	3, 84	6, 40	0, 62
12	70, 19	1, 14	11, 12	3, 77	9, 78	0, 53
15	66, 36	1, 33	14, 92	3, 67	13, 34	0, 44
18	62, 47	1, 51	18, 84	3, 56	17, 01	0, 36
21	58, 55	1, 66	22, 84	3, 43	20, 77	0, 30
24	55, 1	1, 81	26, 89	3, 28	24, 60	0, 26
27	51, 8	1, 95	30, 99	3, 11	28, 48	0, 22
30	47, 17	2, 07	35, 10	2, 94	32, 39	0, 20
33	43, 29	2, 19	39, 22	2, 75	36, 32	0, 18
36	39, 44	2, 31	43, 32	2, 56	40, 25	0, 16
39	36, 4	2, 42	47, 38	2, 35	44, 15	0, 15
42	32, 29	2, 52	51, 38	2, 15	48, 01	0, 15
45	29, 0	2, 61	55, 29	1, 94	51, 80	0, 15
48	25, 38	2, 70	59, 10	1, 73	55, 49	0, 15
51	22, 23	2, 78	62, 76	1, 52	59, 06	0, 15
54	19, 17	2, 86	66, 26	1, 32	62, 49	0, 15
57	16, 21	2, 93	69, 58	1, 13	65, 74	0, 16
60	13, 35	3, 00	72, 69	0, 94	68, 80	0, 16
63	11, 0	3, 06	75, 56	0, 76	71, 63	0, 17
66	8, 38	3, 11	78, 18	0, 60	74, 22	0, 18
69	6, 30	3, 16	80, 52	0, 45	76, 54	0, 19
72	4, 36	3, 20	82, 56	0, 32	78, 58	0, 19
75	2, 58	3, 23	84, 29	0, 21	80, 30	0, 20
78	1, 36	3, 26	85, 70	0, 11	81, 70	0, 21
81	0, 32	3, 28	86, 76	0, 04	82, 76	0, 21
82, 55′	0, 0	3, 30	87, 60	0, 00	83, 60	0, 22

§. 14. Evidens eſt formulam pro elemento temporis ∂t inventam non mutari, etiamſi loco Φ ſcribatur $180° - \Phi$. Quin etiam, ſi baculus initio plano ita inſiſtat; vt verſus ejus ſummitatem E ſit inclinatus angulo $EAB = \gamma = 180° - \beta$, elementum y aeque ac ratio $P:M$ manent invariatae, ita vt praeter $x = gtt - a\,cos.\,\gamma$ et $z = x - 4\,cos.\,(180° - \Phi)$ nihil mutetur. Caſu igitur $\gamma = 80°$, ſive $\beta = 100°$, motus baculi ita ſe habebit, vt ſequens tabula eum exhibet.

ψ	Φ	t	x	y	z	P : M
0°	100°, 0′	0, 00	− 0, 69	3, 94	0, 00	0, 79
3	100, 52	0, 36	+ 0, 35	3, 93	1, 11	0, 77
6	103, 8	0, 67	2, 87	3, 90	3, 78	0, 71
9	106, 10	0, 92	6, 12	3, 84	7, 24	0, 62
12	109, 41	1, 14	9, 74	3, 77	11, 08	0, 53
15	113, 24	1, 33	13, 53	3, 67	15, 12	0, 44
18	117, 13	1, 51	17, 45	3, 56	19, 28	0, 36
21	121, 5	1, 66	21, 45	3, 43	23, 51	0, 30
24	124, 59	1, 81	25, 50	3, 28	27, 80	0, 26
27	128, 52	1, 95	29, 60	3, 11	32, 11	0, 22
30	132, 43	2, 07	33, 71	2, 94	36, 43	0, 20
33	136, 31	2, 19	37, 83	2, 75	40, 73	0, 18
36	140, 16	2, 31	41, 93	2, 56	45, 01	0, 16
39	143, 56	2, 42	45, 99	2, 35	49, 23	0, 15
42	147, 31	2, 52	49, 99	2, 15	53, 37	0, 15
45	151, 0	2, 61	53, 91	1, 94	57, 40	0, 15
48	154, 22	2, 70	57, 71	1, 73	61, 31	0, 15
51	157, 37	2, 78	61, 37	1, 52	65, 07	0, 15
54	160, 43	2, 86	64, 88	1, 32	68, 65	0, 15
57	163, 39	2, 93	68, 19	1, 13	72, 03	0, 16

ψ

ψ	Φ	t	x	y	z	P:M
60	166°, 25′	3, 00	71, 30	0, 94	75, 19	0, 16
63	169, 0	3, 06	74, 17	0, 76	78, 10	0, 17
66	171, 22	3, 11	76, 79	0, 60	80, 74	0, 18
69	173, 30	3, 16	79, 13	0, 45	83, 10	0, 19
72	175, 24	3, 20	81, 17	0, 32	85, 16	0, 19
75	177, 2	3, 23	82, 90	0, 21	86, 90	0, 20
78	178, 24	3, 26	84, 31	0, 11	88, 31	0, 21
81	179, 28	3, 28	85, 37	0, 04	89, 37	0, 21
82, 55′	180, 0	3, 30	86, 21	0, 00	90, 21	0, 22

§. 15. Problema heic expedito analogum jam ante novem, et quod excurrit, annos tractavi, de motu agens baculi, qui, plano horizontali impoſitus, extremitate ſuperna plano adnititur verticali, labensque ambo plana radit, qui ſcilicet motus absque frictione in eodemque plano fieri concipiebatur. Solutio hujus problematis extat in Tomo VI novorum Actorum pro anno 1788, ſub titulo: *Recherches sur un problème de Mécanique.*

EXA-

EXAMEN THÉORÉTIQUE DES REVÊTEMENS À DOS INCLINÉ ET DES REVÊTEMENS À ASSISES INCLINÉES, PROPOSÉS PAR QUELQUES AUTEURS DE FORTIFICATION;

par *NICOLAS FUSS.*

Préſenté à l'Académie le 15 Juin 1797.

§. 1.

La plûpart des auteurs de Fortification ſont d'accord à préférer les remparts revêtus de pierre à ceux dont les revêtemens ne ſont que de gazon ou de placage; du moins donnent-ils aſſez unanimément la préférence aux demi-revêtemens de brique, parceque ceux-ci réuniſſent tous les avantages des revêtemens entiers de maçonnerie et des revêtemens de gazon, sans en avoir les défauts. De cent cinquante places que Vauban a fortifiées, il n'y a pas une dont les revêtemens ne fuſſent de maçonnerie. Mais la dépenſe énorme qu'exige une place forte toute revêtue en pierres, ſelon les profils de Vauban, a fait ſonger pluſieurs Ingénieurs aux moyens de diminuer cette dépenſe, ſans porter atteinte à la ſolidité néceſſaire des ouvrages. Les uns ont propoſé de diminuer ſimplement l'épaiſſeur au ſommet dans les profils de Vauban, qu'ils prétendoient être plus forts que ne l'exige la pouſſée des terres que les revêtemens ont à ſoûtenir, ſans rien changer ni à la forme, ni à la

à la conſtruction. D'autres ont été d'avis de changer la poſition horiſontale des pierres, en faiſant les aſſiſes perpendiculaires au talud. D'autres enfin ont propoſé d'adoſſer le revêtement contre les terres, non pas à plomb, comme cela ſe pratique généralement, mais dans une poſition inclinée vers les terres qu'il doit soûtenir.

§. 2. L'un et l'autre de ces deux derniers projets eſt appuyé d'autorités bien reſpectables. Le premier doit ſa naiſſance à un homme conſommé dans l'art de fortifier, au fameux *Coehorn*, et il a même été exécuté, ſelon l'Abbé *Déidier*, à Manheim, par ſon inventeur même, et dans la ſuite auſſi à St. Martin, ſur l'isle de Ré, par un Officier diſtingué, le même qui avoit découvert le ſecret de cette conſtruction *). L'autre projet a été conçu par le celèbre *G. B. Bilfinger* **), ci-devant Académicien de St. Pétersbourg, puis Conseiller privé du Duc de Wurtemberg, Mathématicien profond, et auteur de plusieurs écrits de Fortification, entre autres d'un ſyſtème nouveau, très ingénieux, préſenté à l'Académie le 20 Fevrier 1738 ***).

§. 3.

*) V. Le parfait Ingénieur François, par Mr. L'Abbé Déidier, pag.

**) Nouveau projet du revêtement d'une forteresse; par G. B. Bilfinger Tubingue 1751.

***) Le dessin de cette nouvelle méthode de fortifiér, que je possède, eſt signé: *G. B. Bilfinger invenit Ao.* 173$\frac{7}{8}$. Je remarque ceci, parceque la pièce imprimée, où l'auteur a publié sa méthode, eſt sans date.

§. 3. Quoiqu'il en ſoit de ces autorités *), les deux projets en queſtion ſont tels qu'on eſt très diſpoſé à les croire l'un et l'autre avantageux, en ne conſidérant que l'équilibre entre la pouſsée des terres et la réſiſtance des revêtemens. Car on voit d'abord, ſans entrer dans des calculs, que toutes choſes d'ailleurs égales, le revêtement à aſſiſes inclinées oppoſe à la même pouſſée une réſiſtance plus grande que le revêtement ordinaire à aſſiſes horiſontales; et que le revêtement à dos incliné réſiſte avec plus de force à une pouſsée plus petite, que ne feroit le même revêtement droit. Que par conſéquent, au moyen de ces deux manieres de conſtruction on parviendroit probablement à faire des revêtemens auſſi forts, avec moins d'épaiſſeur, et partant avec moins de dépenſe.

§. 4. Cependant, perſonne, que je ſâche, n'a encore examiné **), jusqu'où peut aller cette diminution de l'épaiſſeur

*) M. le Conseiller des Mines Böhm assûre que l'auteur du projet de revêtement à dos incliné est le neveu du Conseiller privé, ce qui est assez probable, vu que celui-ci est mort en 1750.

**) M. *Woltmann* (Beyträge zur Hydrauliſchen Architectur, 3ter B. S. 203) cite un ouvrage de M. *De langes*: *Esperienze ed osservazioni intorno alla pressione delle terre ed alla resistenza de'muri, etc.* que je n'ai pas encore pu me procurer, et dont l'auteur doit avoir trouvé que les couches horisontales sont préférables. Quoique à certains égards cela puisse être vrai, du moins ne l'est-il pas par rapport à l'équilibre entre la poussée et la résistance. Aussi le peu que M. *Woltmann* cite page 160 etc. de la Théorie de cet auteur, fait voir qu'elle est très défectueuse. M. *Woltmann* (p. 208) y ajoute des réflexions sur les inconvéniens pratiques des assises inclinées, qui méritent de l'attention, mais sur la justesse desquelles la Théorie ne ſçauroit prononcer, et quant à l'expérience; elle a déjà prononcé en faveur des assises inclinées, s'il en faut croire ce qui a été rapporté ci-dessus de leur exécution à Manheim et du succès des expériences faites à St. Martin.

ſeur des profils ordinaires à aſſiſes horiſontales et à dos vertical, lorsqu'on leur ſubſtitue des revêtemens faits d'après l'idée de l'un ou de l'autre de nos deux auteurs, ni de quel côté est le plus grand avantage. C'eſt pourquoi, le ſujet m'ayant paru intéreſſant, et digne, par ſon utilité pratique (qui n'eſt pas reſtreinte à la ſeule architecture militaire) d'être ſoumis à la déciſion de la Théorie: j'ai conſulté celle-ci, et je vais préſenter ici l'eſſentiel de mes recherches relativement aux deux projets en queſtion.

§. 5. Mais avant de ſoumettre au calcul les revêtemens de Coehorn et de Bilfinger, je commencerai par les revêtemens ordinaires, en examinant ſi les profils de Vauban ont effectivement plus d'épaiſſeur qu'il ne leur en faut, et de combien on pourroit la diminuer dans ce cas-là avec aſſûrance. Cette diſcuſſion, outre qu'elle nous frayera le chemin aux recherches ſuivantes plus difficiles, nous mettra en état de comparer les revêtemens à aſſiſes inclinées et les revêtemens à dos incliné non ſeulement avec les profils de Vauban, mais auſſi avec les revêtemens droits à aſſiſes horiſontales dont l'épaiſſeur a deja été reduite ſelon la Théorie.

ARTICLE I.

Examen des revêtemens droits à aſſiſes horiſontales.

§. 6. Si d'une caiſſe remplie de terre ou de ſable, et dont le rectangle ABCD repréſente le profil, on ôte le parois antérieur BC, on ſçait par l'expérience qu'une partie CBE de la matiere s'écoule, et que ſeulement la portion ABED reſte en repos, après avoir acquis un talud BE, *Tab. II. Fig. 1.*

 ou

ou une pente qui fait avec le fond horiſontal AB de la caiſſe un angle ABE plus ou moins grand, ſelon que la terre ou le ſable eſt plus ou moins humide, plus ou moins battu, d'un grain plus ou moins gros. Cette face antérieure de la caiſſe, BC, ſoûtenoit donc, pendant qu'elle étoit fermée, la matiere prète à s'écouler, et réſiſtoit à la preſſion d'un priſme, dont le triangle CBE, que quelques auteurs appellent *le triangle d'éboulement*, repréſente la baſe.

Tab. II. Fig. 2. §. 7. Lors donc que derriere une muraille on amoncèle de la terre, cette muraille qu'on appelle le *revêtement*, et dont le trapèze ABCD repréſente le profil, doit ſoûtenir le priſme d'éboulement, dont le triangle EAC repréſente la baſe. Il faut donc que la maçonnerie contenue dans le trapèze ABCD ſoit aſſez forte, pour réſiſter à la preſſion ou à la pouſſée de la terre contenue dans le triangle d'éboulement EAC. Car il ſuffit de conſidérer ces deux ſurfaces ABCD et EAC, vu que les priſmes, dont elles repréſentent les baſes, et dont les poids produiſent l'action et la réaction, ont la troiſième dimenſion égale.

§. 8. Soit G le centre de gravité du triangle d'éboulement EAC, ſa hauteur $AC = a$, l'angle $ECS = \alpha$, et π la péſanteur ſpécifique de la matière contenue dans le triangle ECA; la péſanteur abſolue de ce triangle, qui agit dans la direction verticale, ſera $GF = \frac{1}{2}\pi a^2 \cot.\alpha$. Décompoſons cette force GF en deux autres forces équivalentes GM et GH, la premiere perpendiculaire, l'autre parallèle à EC, et nous aurons

$$GM = GF \cos.\alpha = \tfrac{1}{2}\pi aa \cos.\alpha \cot.\alpha;$$
$$GH = GF \sin.\alpha = \tfrac{1}{2}\pi aa \sin.\alpha \cot.\alpha.$$

Là

La force GH agit contre le point H du revêtement dans la direction HK. La force GM indique la preſſion du triangle d'éboulement contre le plan incliné EC, à laquelle le frottement eſt proportionnel, et qui, par conſéquent, multipliée par un nombre λ, déterminable par des expériences, donne la force, avec laquelle le frottement réſiſte à la force ſelon GH, deſorte que le point H n'a proprement à ſoûtenir que la force

$$HK = \tfrac{1}{2}\pi\, aa \cos.\alpha\, (1 - \lambda \cot.\alpha).$$

§. 9. Que ſi nous décompoſons cette force HK, par laquelle le revêtement eſt ſollicité, en deux autres HI et HC, l'une horiſontale et l'autre verticale, nous obtiendrons

$$HI = HK \cos.\alpha = \tfrac{1}{2}\pi\, aa \cos.\alpha^2\, (1 - \lambda \cot.\alpha) \text{ (*)}$$
$$HC = HK \sin.\alpha = \tfrac{1}{4}\pi\, aa \sin. 2\alpha\, (1 - \lambda \cot.\alpha).$$

La force verticale HC n'exerçant aucune action ſur le revêtement, il ne nous reſte à conſidérer que la force horiſontale HI, qui peut agir de deux manières différentes: car elle peut pouſſer le revêtement en avant, ſur ſa baſe CD, dans la direction HI; et elle peut auſſi le renverſer, en lui communiquant un mouvement de rotation autour du point

(*) Cette expression convient, en mettant $\alpha = 45°$, avec celle de M. Bossut, et aussi avec celle que M. *Woltmann* a déduite pag. 170. No. 7. du principe de M. *Kaestner*, et qu'il rejette par des raisons fondées sur la fausse idée qu'il se fait de l'angle α, lequel chez lui signifie l'inclinaison que le dos du revêtement fait avec une certaine direction moyenne de l'action des particules de la matière qui tend à s'ébouler, idée qu'il ne s'agit pas de rectifier ici.

point d'appuy D. Le moment de la force qui peut produire ce dernier effet, à cauſe de $DL = \frac{1}{3} a$, ſera

$$HI \, . \, DL = \tfrac{1}{6} \pi a^3 \cos. \alpha^2 (1 - \lambda \cot. \alpha) \text{ (*)}.$$

§. 10. Au mouvement progreſſif du revêtement ſelon HI, réſiſte ſa cohéſion avec la fondation, ou la force du mortier. Mais ne connoïſſant de cette force ni la quantité, ni la façon d'agir, pour faciliter la recherche et rendre ſa marche plus ſûre, nous ſuppoſerons que le revêtement repoſe ſur ſa fondation ſans mortier, deſorte que chaque couche de pierres réſiſte par le ſeul frottement au mouvement progreſſif. Car il eſt clair que ſi nous faiſons le revêtement aſſez fort, pour réſiſter à la pouſſée dans cette ſuppoſition, ſon épaiſſeur ſera plus que ſuffiſante dans la pratique, quelque puiſſe être la cohéſion, ou la force du mortier qui lie les pierres dont le revêtement et ſa fondation ſont compoſés. Soit donc le frottement à la preſſion comme $\mu : 1$, et ſoit ϱ la péſanteur ſpécifique de la maçonnerie; et la réſiſtance que le revêtement oppoſe au mouvement progreſſif ſera $= \frac{1}{2} \mu \varrho a (AB + CD)$. Ainſi la condition de l'équilibre nous donnera l'équation ſuivante:

$$\text{I.} \quad \tfrac{1}{2} \pi aa \cos. \alpha^2 (1 - \lambda \cot. \alpha) = \tfrac{1}{2} \mu \varrho a (AB + CD).$$

§. 11. Au mouvement de rotation autour du point D s'oppoſe le poids du revêtement $\frac{1}{2} \varrho a (AB + CD)$, avec une force

(*) En négligeant le frottement et la péſanteur des matières, c'est-à-dire, en mettant $\lambda = 0$ et $\pi = 1$, on aura ce moment $= \frac{1}{6} a^3 \cos. \alpha^2$, expreſſion qui convient avec celle de M. *Kaestner* (V. Woltmanns Beytr. 3. B. S. 153. No. 9). En mettant $\alpha = 45°$ c'est l'expression du moment donné par M. Bossut.

force dont le moment eſt $\frac{1}{2}\varrho a$ (AB + CD) × VD; VD étant la diſtance du point d'appuy D à la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité O du revêtement ABCD ſur ſa baſe CD. Or on ſcait que

$$VD = \frac{2CD^2 + 2CD.AB - AB^2}{3(AB + CD)}$$

par conséquent le moment de la réſiſtance ſera $\frac{1}{6}\varrho a$ ($2CD^2 + 2CD.AB - AB^2$), et la ſeconde équation tirée de la condition de l'équilibre

II. $\frac{1}{6}\pi a^3 \cos.\alpha^2 (1 - \lambda \cot.\alpha) = \frac{1}{6}\varrho a (2CD^2 + 2CD.AB - AB^2)$.

§. 12. Suppoſons à préſent que le talud ſoit proportionnel à la hauteur, comme on le fait presque généralement, et nommons $AB = x$, $CD = x + na$; et en mettant pour abrêger $\frac{\pi}{\varrho} \cos.\alpha^2 (1 - \lambda \cot.\alpha) = \delta$, nous aurons les deux équations ſuivantes:

I. $\delta a = \mu (2x + na)$;
II. $\delta aa = 3xx + 6nax + 2nnaa$.

De la premiere on tire le frottement

$$\mu = \frac{\delta a}{2x + na}$$

et la ſeconde donne l'épaiſſeur au cordon

$$AB = x = -na + a\sqrt{\frac{nn + \delta}{3}}$$

l'épaiſſeur à la baſe étant

$$CD = x + na = a\sqrt{\frac{nn + \delta}{3}}.$$

§. 13. Soit l'angle $\alpha = 45°$, $n = \frac{1}{5}$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, et il y aura $\delta = 0,2400$, et partant $x = 0,1055.a$ et $\mu = 0,5839$. Ainſi un ſimple frottement, qui ne va pas encore

encore jusqu'à $\frac{3}{5}$ de la preſſion (*) feroit ſuffiſant pour réſiſter au mouvement progreſſif d'un revêtement de $0{,}1055.a$ pieds d'épaiſſeur au ſommet.

§. 14. Soit la hauteur $a = 47\frac{2}{5}$ pieds, et l'épaiſſeur du revêtement au ſommet ſera $AB = 5$ pieds, et l'épaiſſeur à la baſe $CD = 14{,}480$ pieds. Comme c'eſt exactement l'épaiſſeur que Vauban a donné à ſes profils de 4-$\frac{2}{5}$ pieds de hauteur, et qu'il y en a qui ont réſiſté depuis plus d'un ſiècle, l'expérience prouve que l'épaiſſeur que nous venons de trouver par la théorie eſt ſuffiſante. On voit auſſi par là que ce n'eſt pas ſans fondement qu'on ſoutient que les profils de Vauban ſont trop forts pour les hauteurs moindres et qu'ils ſont trop foibles pour de plus grandes hauteurs, ce que l'expérience auroit immanquablement prouvé, ſi des revêtemens de *plus* de $47\frac{2}{5}$ pieds de hauteur n'étoient pas trop rares, et ſi ceux qui exiſtent, ſ'il y en a de ſi hauts, n'étoient pas redevables de leur ſurplus de force aux contreforts et à la cohéſion de la maçonnerie, dont notre Théorie n'a pas tenu compte.

§. 15. En adoptant la valeur de μ comme connue par l'expérience, nos deux équations du §. 12 donneroient l'épaiſſeur du revétement au ſommet et le talud. Car la premiere équation donne

$$x = \frac{\delta a}{2\mu} - \frac{1}{2} n a,$$

ce

(*) M. Woltmann (Beytr. zur Hydr. Archit. S. 104.) a trouvé à peu près la même choſe. Il eſt auſſi d'avis qu'il ne faut pas trop compter sur la cohésion et qu'on fait mieux de supposer que la maçonnerie résiste par le seul frottement. Selon lui (page 206) le frottement dans les briques ordinaires est assez approchemment égal aux $\frac{3}{5}$ de la pression.

ce qui étant ſubſtitué dans la ſeconde, fournit

$$\delta = \frac{3\delta\delta}{4\mu\mu} + \frac{3\delta n}{2\mu} - \frac{nn}{4},$$

d'où l'on tire le talud

$$n = \frac{3\delta}{\mu} \pm \sqrt{\frac{12\delta\delta}{\mu\mu} - 4\delta}.$$

§. 16 Ainſi, comme ſelon M. Woltmann il y a pour les briques ordinaires $\mu = \frac{3}{5}$ (V. la note §. 13), en mettant, comme ci-deſſus,

$\alpha = 45^\circ$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, on aura $\delta = 0,2400$,
$n = 0,2202$, et $x = 0,0899 . a$; c'eſt-à-dire

$$AB = 0,0899 . AC;$$
$$CD = 0,3101 . AC.$$

Ce profil eſt plus avantageux que celui du §. 13, ſa ſurface n'étant que 0,2000 . a^2, tandis que l'autre eſt de 0,2055 . a^2.

ARTICLE II.

Examen des revêtemens à aſſiſes inclinées

Tab. II. Fig. 3.

§. 17. Soit ABCD un revêtement dont les aſſiſes faſſent avec le talud BD un angle droit; ſoit ECA le triangle d'éboulement, et en gardant les mêmes dénominations, dont nous avons fait uſage dans l'article précédent, il eſt clair que quant à la pouſſée des terres tout ſera comme auparavant, dans le cas que nous venons de conſiderer, ſavoir que la ſeule force qui agit ſur le revêtement en H, eſt la force horiſontale

$$HL = \tfrac{1}{2}\pi aa \cos.\alpha^2 (1 - \lambda \cot.\alpha) = \tfrac{1}{2}\varrho\,\delta aa$$

en mettant pour abrêger comme au §. 12

$$\frac{\pi}{\varrho} \cos.\alpha^2 (1 - \lambda \cot.\alpha) = \delta;$$

 avec

avec la différence toutefois qu'entant que cette force tend à renverſer le revêtement, ce ne ſera plus le point D, mais le point d, autour duquel, comme appuy, elle s'efforcèra de le faire tourner, deſorte que le moment ne ſera plus $HL . DL$ (§. 9), mais $HL . dl$, par conſéquent plus petit que dans l'article précédent.

§. 18. Pour déterminer le bras de levier dl, ſoit l'angle $DBS = DCd = \gamma$, et comme dans l'article précédent (§. 1·) $AB = x$, $CD = x + na$, deſorte que $n = tag. \gamma$, nous aurons:

$$Dd = CD\ sin. \gamma = (x + na)\ sin. \gamma$$
$$Dq = Dd\ cos. \gamma = \tfrac{1}{2}(x + na)\ sin. 2\gamma$$

d'où nous tirons

$$dl = DL - Dq = \tfrac{1}{3} a - \tfrac{1}{2}(x + na)\ sin. 2\gamma$$

ou bien auſſi, à cauſe de $n = \frac{sin. \gamma}{cos. \gamma}$,

$$dl = a\ (\tfrac{1}{3} - sin. \gamma^2) - \tfrac{1}{2} x\ sin. 2\gamma$$

ou bien enfin

$$dl = \tfrac{1}{2} \varkappa a - \tfrac{1}{2} x\ sin. 2\gamma$$

en mettant pour abrêger $\frac{1}{3} - sin. \gamma^2 = \frac{1}{2}\varkappa$. Ainſi le moment de la pouſſée ſera

$$HL . dl = \tfrac{1}{4} \varrho \delta aa\ (\varkappa a - x\ sin. 2\gamma).$$

§. 19. Quant à la réſiſtance du revêtement, comme la force HL peut agir de deux manières: 1°) à faire monter le profil ABdC ſur le plan incliné Cd, dans la ſuppoſition qu'il y repoſe ſans mortier; 2°) à renverſer le revêtement ABdC, en le faiſant tourner ſur le point d'appuy d:

il

il faudra déterminer la réſiſtance qui s'oppoſe à l'une et à l'autre de ces deux actions. La premiere réſiſtance eſt compoſée de deux forces, ſçavoir du poids du revêtement ϱM, qui réſiſte à la montée, avec une force $= \varrho M \sin.\gamma$, et du frottement, qui s'y oppose pareillement, avec une force $\varrho\mu M \cos.\gamma$, deſorte que toute la réſiſtance eſt $\varrho M (\sin.\gamma + \mu \cos.\gamma)$, ϱ étant, comme dans l'article précédent, la péſanteur ſpécifique de la maçonnerie, et $\mu : 1$ le rapport du frottement à la preſſion. Quant au poids ϱM, comme içi c'eſt ſeulement la ſurface du Quadrilatère $ABdC$ qui peut céder à l'action des terres, il y aura

$$M = ABCD - \Delta\, DCd$$

c'eſt - à - dire

$$M = \tfrac{1}{2} a (2x + na) - \tfrac{1}{2} (x + na)^2 \sin.\gamma \cos.$$

ce qui peut être repréſenté de cette manière:

$$M = \tfrac{1}{2} a \cos.\gamma^2 (2x + na) - \tfrac{1}{4} xx \sin.\, 2\gamma.$$

Ainſi la condition de l'équilibre fournit cette équation à réſoudre:

$$\text{I. } \delta aa = (\sin.\gamma + \mu \cos \gamma)\,(a(2x + na) \cos.\gamma^2 - \tfrac{1}{2} x^2 \sin.\, 2\gamma).$$

§. 20. Le moment de la force, avec laquelle le revêtement réſiſte au renverſement autour du point d'appuy d, *Tab. II. Fig. 4.* dans la ſuppoſition de la cohéſion nulle, ſera $\varrho M \times vd$, où vd eſt la perpendiculaire tirée du point d ſur la verticale Oo, direction de la péſanteur paſſant par le centre de gravité O du profil $ABdC$.

§. 21. Pour déterminer vd, de Ω et ω, centres de gravité des triangles ACB et CBd menons Ωe et ωf pa-

rallèles à Oo, et nous aurons $ef = \frac{1}{3}\,Cd = \frac{1}{3}\,(x+na)$ $cos.\,\gamma$. Or

$$\Omega O : \omega O = eo : fo = \Delta\, CBd : \Delta\, ACB$$

donc

$$fo : eo + fo = \Delta\, ACB : \Delta\, CBd + \Delta\, ACB$$

ou bien

$$fo : ef = \Delta\, ACB : ABdC$$

par conſéquent

$$fo = \frac{ef\,.\,\Delta\, ACB}{ABdC} = \frac{\frac{1}{2}ax\,.\,ef}{M}$$

Mais $od = fo + fh + hd$, ou bien, à cauſe de

$$fh + hd = \tfrac{1}{3}(x+na)\,cos.\,\gamma + \frac{\frac{1}{3}an}{cos.\,\gamma} = \frac{\frac{1}{3}(x+na).\,sin.\,\gamma^2}{cos.\,\gamma}$$

c'eſt à dire, à cauſe de

$$fh + hd = \frac{(x+na)\,cos.\,2\gamma + an}{3\,cos.\,\gamma} = \frac{x\,cos.\,2\gamma + 2na\,cos.\,\gamma^2}{3\,cos.\,\gamma}$$

on aura

$$od = \frac{ax\,(x+na)\;cos.\,\gamma}{6M} + \frac{x\,cos.\,2\gamma + 2na\,cos.\,\gamma^2}{3\,cos.\,\gamma}$$

d'où, à cauſe de $vd = od\;cos.\,\gamma$, on obtient

$$vd = \frac{ax\,(x+na)\,cos.\,\gamma^2}{6M} + \tfrac{1}{3}(x\,cos.\,2\gamma + 2na\,cos.\,\gamma^2).$$

§. 22. Ayant trouvé ainſi le bras de levier vd, le moment de la force que le revêtement oppoſe à l'effort des terres pour le renverſer, ſera

$$\varrho M \times vd = \frac{\varrho ax}{6}(x+na)\,cos.\,\gamma^2$$
$$+\frac{\varrho}{6}(x\,cos.\,2\gamma + na\,cos.\,\gamma^2)(a\,cos.\,\gamma^2(2x+na) - \tfrac{1}{2}x^2 sin.\,2\gamma).$$

La condition de l'équilibre nous préſente donc cette ſeconde équation à réſoudre:

$$\text{II.}\quad 6\delta aa(\varkappa a - x\,sin.\,2\gamma) = 4ax\,(x+na)\,cos.\,\gamma^2$$
$$+ 4(x\,cos.\,2\gamma + 2na\,cos.\,\gamma^2)\,(a(2x+na)\,cos.\,\gamma^2 - \tfrac{1}{2}x^2\,sin.\,2\gamma).$$

§. 23. En développant et ordonnant cette équation ſelon les puiſſances de x, on parvient à cette équation complette du troiſième degré :

$$x^3 + A a x^2 - B a^2 x + C a^3 = 0$$

dont les coëfficiens ſont

$$A = \frac{4\, cos.\, \gamma^2 (n\, sin.\, 2\gamma - 1 - 2\, cos.\, 2\gamma)}{sin.\, 4\gamma}$$

$$B = \frac{4\, n\, cos.\, \gamma^2 (1 - cos.\, 2\gamma + 4\, cos.\, \gamma^2) + 6\delta\, sin.\, 2\gamma}{sin.\, 4\gamma}$$

$$C = \frac{6\delta x - 8\, n\, n\, cos.\, \gamma^4}{sin.\, 4\gamma}.$$

En mettant à la place de n ſa valeur $n = tag.\, \gamma$, ces coëfficiens ſe laiſſeront reduire aux expreſſions plus ſimples que voici:

$$A = \frac{12\, cos.\, \gamma^2 (sin.\, \gamma^2 - cos.\, \gamma^2)}{sin.\, 4\gamma};$$

$$B = \frac{6\, sin.\, 2\gamma (2\, cos.\, \gamma^2 + \delta)}{sin.\, 4\gamma};$$

$$C = \frac{6\delta x - 2\, sin.\, 2\gamma^2}{sin.\, 4\gamma};$$

et par des réductions ultérieures, on obtient ces valeurs exprimées de la maniere ſuivante encore plus ſimple:

$$A = -3\, cot.\, \gamma;$$

$$B = \frac{3 (2\, cos.\, \gamma^2 + \delta)}{cos.\, 2\gamma};$$

$$C = \frac{6\delta x}{sin.\, 4\gamma} - tag.\, 2\gamma.$$

§. 24. Ayant trouvé x par l'équation II. comme l'équation I du §. 19 donne

$$\mu = \frac{\delta aa - sin.\gamma\, [a(2x + na)\, cos.\, \gamma^2 - \frac{1}{2} x^2\, sin.\, 2\gamma]}{cos.\gamma\, [a(2x + na)\, cos.\, \gamma^2 - \frac{1}{2} x^2\, sin.\, 2\gamma]}$$

ſi l'on ſubſtitue la valeur trouvée pour x dans cette expreſſion; on obtiendra la quantité du frottement qui doit avoir lieu, pour qu'il y ait équilibre entre la pouſſée des terres et la réſiſtance du revêtement à aſſiſes inclinées.

§. 25.

§. 25. Soit, comme dans l'exemple de l'article précédent (§. 13), l'angle $\alpha = 45°$, $n = tag.\ \gamma = \frac{1}{5}$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, et il y aura $\delta = 0,2400$; $\gamma = 11°, 18', 36''$; $\varkappa = 0,58975$; $A = -15$; $B = 7,03003$; $C = 0,77927$, donc l'équation:

$$x^3 - 15\,a\,x^2 - 7,03003\,a^2\,x + 0,77927\,a^3 = 0$$

d'où l'on tire $x = 0,0926 \,.\, a$. ce qui étant trouvé, on aura auſſi $\mu = 0,46360$.

§. 26. Ayant trouvé §. 13, en prenant les mêmes données, que pour les revêtemens à aſſiſes horiſontales il y a $x = 0,1055 \,.\, a$ et $\mu = 0,5839$, nous voyons que, toutes choſes égales, pour les aſſiſes inclinées une épaiſſeur moindre et un moindre degré de frottement, partant auſſi une cohéſion plus petite, ſuffiſent pour réſiſter à la même pouſſée. Pour la même valeur de μ, ſçavoir pour $\mu = 0,4636$, le revêtement à aſſiſes horiſontales devroit avoir, ſelon les formules du § 15, l'épaiſſeur au ſommet $x = 0,2333 \,.\, a$ et le talud $n = 0,0111$. La ſurface du profil ſeroit donc $= 0,2588 \,.\, a^2$, tandis que dans le cas des aſſiſes inclinées elle ne ſeroit que $0,1926 \,.\, a^2$. Ainſi, toutes choſes d'ailleurs égales, en ſubſtituant au revêtement à aſſiſes horiſontales celui dont les aſſiſes ſont perpendiculaires au talud, on feroit ſur 100 R°. de dépenſe une épargne de $25\frac{3}{5}$ Roubles.

§. 27. Parceque Coehorn n'a donné, ſelon l'Abbé Deidier, que $\frac{1}{6}$ de la hauteur au talud, je ferai le calcul auſſi pour cette valeur $n = \frac{1}{6}$, en gardant les autres données $\alpha = 45°$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$, et j'aurai $\delta = 0,2400$, $\gamma = 9°, 27', 44''$ et $\varkappa = 0,61261$, de ſorte que $A = -18$; $B = 6,93257$ et $C = 1,09487$. Notre équation cubique ſera donc

$$x^3 - 18\,a\,x^2 - 6,93257\,a^2\,x + 1,09487\,.\,a^3 = 0$$

qui

qui donne $x = 0,1205 \cdot a$ et partant $\mu = 0,4504$. La ſurface de ce profil ſeroit donc $= 0,2038 \cdot a^2$, tandis que pour ce même frottement $\mu = 0,4504$ il y auroit pour le revêtement du premier article, ſelon les formules du §. 15, $n = 0,0342$ et $x = 0,2493 \cdot a$, donc la ſurface $= 0,2664 \cdot a^2$. Par conſéquent l'épargne qu'on feroit en ſubſtituant à ce revêtement-ci celui à aſſiſes inclinées avec $\frac{1}{6}$ de talud, feroit de $25\frac{1}{2}$ R° ſur cent ſeulement.

§. 28. Il eſt évident que l'avantage de ce révêtement croît avec le talud. Mais les maximes établis dans la fortification, et l'exécution même de ces revêtemens mettent des bornes à l'aggrandiſſement du talud. Les premieres exigent que le talud ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible; la derniere exige que les aſſiſes puiſſent ſe ſoutenir, par le ſeul frottement ſur le plan incliné, ſans l'appuy des terres. Il faut donc que $tag. \gamma < \mu$.

§. 29. Soit $x = 0$, de ſorte que le profil du revêtement eſt un triangle rectangle, et nous aurons $C = 0$, donc $\frac{6 \delta x}{sin. 4 \gamma} = tag. 2 \gamma$, ou bien $3 \delta x = sin. 2 \gamma^2$, c'eſt-à-dire $3 \delta (\frac{2}{3} - 2 sin. \gamma^2) = 1 - cos. 2 \gamma^2$, d'où l'on tire $cos. 2 \gamma = - \frac{3}{2} \delta \pm \sqrt{(\frac{9}{4} \delta^2 + \delta + 1)}$. Ainſi pour nos données $cos. 2 \gamma = 0,7930$, donc $\gamma = 18°, 46'$; $n = 0,3398$, et la ſurface du profil $= 0,1699 \cdot a^2$.

ARTICLE III.

Examen des revêtemens à dos incliné.

§. 30. Soit ABCD le profil d'un revêtement à dos incliné, la hauteur $CL = a$, l'angle $SCA = \beta$, deforte *Tab. II. Fig. 5.*

que

que $AL = a\,cot.\,\beta$. Soit G le centre de gravité du triangle d'éboulement ACE, et en nommant, comme dans les articles précédens, l'angle $SCE = \alpha$, la péſanteur ſpécifique de la terre $= \pi$, le poids abſolu ſera $GF = \frac{1}{2}$ â CL.AE. $= \frac{1}{2}\pi aa\,(cot.\,\alpha - cot.\,\beta)$. Décompoſons cette force en deux autres, l'une perpendiculaire et l'autre parallèle à EC, et nous aurons:

$$GM = GF\,cos.\,\alpha = \tfrac{1}{2}\delta aa\,cos.\,\alpha\,(cot.\,\alpha - cot.\,\beta);$$
$$GH = GF\,sin.\,\alpha = \tfrac{1}{2}\pi aa\,sin.\,\alpha\,(cot.\,\alpha - cot.\,\beta).$$

§. 31. La premiere de ces deux forces indique la preſſion ſur le plan incliné EC, et multipliée par λ (§. 8) elle donne le frottement qui s'oppoſe à la ſeconde force GH, de maniere que le point H du revêtement eſt ſollicité par la force $GH - \lambda.GM$, c'eſt-à dire par la force

$$HK = \tfrac{1}{2}\pi aa\,(cot.\,\alpha - cot.\,\beta)\,(sin.\,\alpha - \lambda\,cos.\,\alpha).$$

§. 32. Décompoſons cette force HK en deux autres équivalentes HI et HC; et comme la force verticale HC ne produit aucun effet ſur le revêtement, il nous reſtera à conſidérer la ſeule force horiſontale

$$HI = \frac{HK\,sin.\,(\beta - \alpha)}{sin.\,\beta}$$

c'eſt-à-dire

$$HI = \frac{\tfrac{1}{2}\pi aa\,sin.\,(\beta - \alpha)}{sin.\,\beta}\,(cot.\,\alpha - cot.\,\beta)\,(sin.\,\alpha - \lambda\,cos.\,\alpha)$$

expreſſion qui ſe reduit à la ſuivante:

$$HI = \frac{\tfrac{1}{2}\pi aa\,sin.\,(\beta - \alpha)^2}{sin.\,\beta^2}\,(1 - \lambda\,cot.\,\alpha).$$

§. 33.

§. 33. Or cette force peut agir de deux manieres ſur le revêtement: elle peut 1°) le pouſſer en avant ſur ſa baſe SD dans la Direction HI; elle peut 2°) le renverſer, en le faiſant tourner autour du point D. Le moment de la force qui peut produire ce dernier effet ſera

$$HI \times DN = \tfrac{1}{6}\,\pi a^3 \frac{sin.(\beta - \alpha)^2}{sin.\beta^2}(1 - \lambda\, cot.\, \alpha).$$

§. 34. Suppoſons, comme dans les articles précédens, que les aſſiſes repoſent ſimplement l'une ſur l'autre, et que le frottement ſeul, que nous mettrons égal à μ fois la preſſion, tienne lieu de la cohéſion de la maçonnerie, dont la péſanteur ſpécifique ſoit $= \varrho$; et la réſiſtance que le revêtement oppoſe au mouvement progreſſif que la force HI tend a effectuer, ſera $= \tfrac{1}{2}\varrho\mu a\,(AB + CD)$. Ainſi, la condition de l'équilibre exigeant que cette réſiſtance ſoit égale à la force HI, nous aurons cette premiere équation:

$$\text{I.}\ \frac{\pi a\, sin.(\beta - \alpha)^2}{sin.\beta^2}(1 - \lambda\, cot.\alpha) = \varrho\mu\,(AB + CD).$$

§. 35. Au renverſement du revêtement, ou à ſa rotation autour du point D, s'oppoſe le poids $\tfrac{1}{2}\varrho a\,(AB + CD)$ avec une force dont le moment eſt $\tfrac{1}{2}\varrho a\,(AB + CD) \times VD$, la ligne VD étant la diſtance du point d'appuy D à la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité O du quadrilatère ABCD ſur ſa baſe; et ce bras de levier ſe déterminera facilement de la maniere ſuivante.

§. 36. Par O, Ω et ω, centres de gravité du profil ABCD et des deux triangles ACB et CBD dont il eſt compoſé, tirons PQ, MN et *mn*, parallèles à CD, de même *Tab. II. Fig. 6.*

que OT, Ωe et ωf parallèles à AC et ns auſſi parallèle à AC; et à cause de

$$PM : Pm = \Omega O : \omega O = \triangle CBD : \triangle ACB$$

nous aurons

$$Pm : PM + Pm = \triangle ACB : ABCD$$

d'où nous tirons

$$Pm = \frac{1}{3}\frac{AC \cdot \triangle ACB}{ABCD} = \frac{AC \cdot AB}{3(AB + CD)}$$

et partant

$$CP = OT = \frac{AC(2AB + CD)}{3(AB + CD)}$$

Enſuite, à cauſe de

$$Tf : ef = O\omega . \Omega\omega = Pm : Mm$$

parceque $ef = \frac{1}{3}CD$, on aura

$$Tf = \frac{ef \cdot Pm}{Mm} = \frac{CD \cdot AB}{3(AB + CD)}$$

Or les triangles ſemblables VOT et LCA donnent

$$VT : OT = AL : AC$$

par conſéquent

$$VT = \frac{AL \cdot OT}{AC} = \frac{AL(2AB + CD)}{3(AB + CD)}$$

Mais $VD = VT + Tf + fs + sD$, donc

$$VD = \frac{AL(2AB + CD) + CD \cdot AB}{3(AB + CD)} + \frac{1}{3}CD + sD$$

ou bien, en mettant $AB = x$, $CD = x + na$, on aura $sD = \frac{1}{3}na$, et partant

$$VD = \frac{a\ \mathrm{cot.}\ \beta(3x + na) + x(x + na)}{3(2x + na)} + \frac{x + 2na}{3}.$$

§. 37. En multipliant donc ce bras de levier par $\frac{1}{2}\varrho a(2x + na)$, et mettant ce moment égal à celui de la pouſſée trouvé § 33, on aura cette ſeconde équation de condition:

$$\text{II.}\ \frac{\pi a^2\ \mathrm{sin.}(\beta - \alpha)^2}{\varrho\ \mathrm{sin.}\ \beta^2}(1 - \lambda\ \mathrm{cot.}\ \alpha) =$$
$$a\ \mathrm{cot.}\ \beta(3x + na) + 3xx + 6nax + 2nnaa.$$

§. 38.

§. 38. En mettant pour abrêger

$$\frac{\pi}{\varrho} \frac{sin. (\beta - \alpha)^2}{sin. \beta^2} (1 - \lambda \; cot. \alpha) = \delta'$$

les deux équations tirées de la condition de l'équilibre, qui contiennent la ſolution du problème, feront:

I. $\delta' a = \mu (2x + na)$;

II. $\delta' aa = a (3x + na) \; cot. \beta + 3xx + 6nax + 2nnaa.$

La premiere donne

$$x = \frac{\delta' a}{2\mu} - \frac{na}{2}$$

ce qui étant ſubſtitué dans la ſeconde fournit

$$n = \frac{3\delta'}{\mu} - cot. \beta \pm \sqrt{\frac{12\delta'\delta'}{\mu\mu} + cot. \beta^2 - 2\delta'}$$

§. 39. Que ſi dans ces expreſſions on met l'angle $\beta = 90°$, on a $\delta' = \frac{\pi}{\varrho} cos. \alpha^2 (1 - \lambda \; cot. \alpha) = \delta$, et par conſéquent

$$x = \frac{\delta a}{2\mu} - \frac{na}{2}$$

$$n = \frac{3\delta}{\mu} \pm \sqrt{\frac{12\delta\delta}{\mu\mu} - 4\delta}$$

comme nous avions trouvé § 15 pour les revêtemens ordinaires à dos vertical.

§. 40. Soit comme dans les exemples précédens $a = 45°$, $\frac{\pi}{\varrho} = \frac{4}{5}$, $\lambda = \frac{2}{5}$; ſoit de plus $\mu = \frac{3}{5}$ et $\beta = 80°$, nous aurons $\delta' = 0,16282$, partant $n = 0,1245$ et $x = 0,0734.a$. Ainſi la ſurface feroit $= 0,1356.a^2$, et l'épargne qu'on feroit en employant ces revêtemens au lieu des revêtemens droits, toutes choſes d'ailleurs égales, monteroit à $32\frac{1}{5}$ R.° ſur 100 R.°

§. 41. Pour que ce revêtement puiſſe ſe ſoûtenir ſans l'appuy des terres, il faudra que $VD < CD$, c'eſt à dire $cot. \beta < \frac{3x + na}{a}$ ou bien $cot. \beta < \frac{3\delta'}{2\mu} - \frac{n}{2}$, condition qui, en met-

mettant à la place de n ſa valeur, devient $cot.\,\beta < \sqrt{\frac{12\,\delta'\delta'}{\mu\mu} + cot.\,\beta^2 - 4\delta'}$, ce qui ſe reduit à $\delta' > \frac{\mu\mu}{3}$, ou bien $\frac{\pi}{\varrho}\,\frac{sin.\,(\beta-\alpha)^2}{sin.\,\beta^2}(1 - \lambda\,cot.\,\alpha) > \frac{\mu\mu}{3}$. Enfin $\frac{sin.\,(\beta-\alpha)^2}{sin.\,\beta^2} > \sigma$, en mettant pour abrêger $\frac{\mu\mu\varrho}{3\pi(1-\lambda\,cot.\,\alpha)} = \sigma$, donc $cot.\,\beta < cot.\,\alpha - \frac{\sqrt{\sigma}}{sin.\,\alpha}$.

§. 42. L'épaiſſeur de tous ces revêtemens ayant été déterminée dans la ſuppoſition que les pierres ſoyent poſées ſans mortier et que la réſiſtance ſe faſſe par le poids et le frottement ſeuls: une maçonnerie médiocrement bonne donnera à ces revêtemens une force incomparablement plus grande. A ne conſidérer donc que la pouſſée des terres et la réſiſtance des revêtemens et la condition de l'équilibre entre ces deux forces, il n'eſt pas douteux que les deux projets en queſtion ne l'emportaſſent l'un et l'autre de beaucoup ſur les revêtemens ordinaires. Je laiſſe aux gens de l'art à décider, ſi les difficultés de l'exécution ſont aſſez grandes pour contrebalancer les avantages conſidérables que la théorie en promet. Au reſte ces difficultés ceſſent en partie, quand on fait les inclinaiſons γ et $90^\circ - \beta$ aſſez petites, pour que les revêtemens puiſſent ſe ſoûtenir d'eux mêmes, c'eſt-à-dire, quand on fait $tag.\,\gamma < \mu$ (§. 28) et $cot.\,\beta < cot.\,\alpha - \frac{\sqrt{\sigma}}{sin.\,\alpha}$ (§. 41), limites qui, pour nos exemples calculés (§§ 25 et 40) deviennent $\gamma < 24^\circ, 52'$ et $\beta > 73^\circ, 40'$. Sans outrepaſſer ces termes nous aurions donc pu faire les revêtemens de nos deux exemples beaucoup plus minces que ne les ont donné les poſitions $\gamma = 11^\circ, 18', 36''$ et $\beta = 80^\circ$, et encore plus minces, ſi nous euſſions compté ſur la cohéſion et ajouté des contreforts.

RECHERCHES SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU TROISIÈME DEGRÉ

PAR

Mr. JEAN TREMBLEY.

Reçu le 16 Janvier 1798.

J'ai préſenté à l'Académie Impériale deux Mémoires ſur les équations linéaires aux différences partielles du ſecond degré. Mon deſſein dans celui-ci, eſt de voir jusqu'à quel point il eſt poſſible d'appliquer aux équations du troiſième degré la méthode que j'ai expoſée dans le premier de ces Mémoires, et de rechercher les différences qu'entraine la nature particuliere des équations du troiſième degré. Je ne ferai qu'effleurer une matiere qui eſt vaſte et remplie de difficultés. Je n'ai pas les forces néceſſaires pour l'épuiſer. Mais je n'aurai pas entierement perdu mon tems, ſi les Géometres qui liront ces recherches en prennent occaſion d'approfondir ce ſujet et d'en tirer des conſéquences que les bornes de mes facultés ne me permettent pas d'appercevoir.

§. 1. Soit $z = \Pi F : \Phi$, Π et Φ étant des fonctions quelconques de x et y, et F le ſigne d'une fonction arbitraire, on aura en différentiant:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) F : \Phi; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) F : \Phi;$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = \Pi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 F'' : \Phi + 2 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) F' : \Phi + \Pi \left(\frac{\partial\partial \Phi}{\partial x^2}\right) F' : \Phi + \left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right) F : \Phi;$$

$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right)$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right) = \Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F'':\Phi + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) F':\Phi + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F':\Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right) F:\Phi + \Pi\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) F':\Phi$$

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = \Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 F'':\Phi + 2\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F':\Phi + \Pi\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) F':\Phi + \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) F:\Phi;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3 F''':\Phi + 3\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 F'':\Phi + 3\,\Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) F'':\Phi$$
$$+ 3\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) F':\Phi + 3\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) F':\Phi + \Pi\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right) F':\Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) F:\Phi;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\right) = \Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F''':\Phi + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 F'':\Phi$$
$$+ 2\,\Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) F'':\Phi + 2\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F'':\Phi + \Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) F'':\Phi$$
$$+ 2\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) F':\Phi + 2\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) F':\Phi + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) F':\Phi$$
$$+ \Pi\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}\right) F:\Phi + \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F':\Phi + \left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^2\partial y}\right) F:\Phi;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\right) = \Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) F''':\Phi + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 F'':\Phi$$
$$+ 2\Pi\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F'':\Phi + 2\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) F'':\Phi$$
$$+ \Pi\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) F'':\Phi + 2\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) F':\Phi + 2\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\partial y}\right) F':\Phi$$
$$+ \Pi\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}\right) F':\Phi + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) F':\Phi + \left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) F':\Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x\partial y^2}\right) F:\Phi;$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) = \Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3 F''':\Phi + 3\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 F'':\Phi + 3\,\Pi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) F'':\Phi$$
$$+ 3\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) F':\Phi + 3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) F':\Phi + \Pi\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) F':\Phi$$
$$+ \left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right) F:\Phi.$$

2 Multipliant reſpectivement ces dix équations par les quantités T, S, R, Q, P, N, M, L, K, F et égalant ſéparément à zéro les coëfficiens de $F:\Phi$, $F':\Phi$, $F'':\Phi$, $F''':\Phi$, on aura l'equation differentielle du troiſième degré

Tz

$$Tz + S\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) + N\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)$$
$$+ L\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\right) + F\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) = 0,$$

et les quatre équations de condition ſuivantes:

I. $F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3 + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3 = 0,$

II. $\left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + 2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right.$
$+ 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + 3M\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)\right.$
$+ K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + 2L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) + L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)$
$+ N\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\Pi = 0$

III. $\left(3F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \left(2K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$
$+ \left(L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(3F\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)\right.$
$+ L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 2N\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + P\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(K\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2L\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)\right.$
$+ 3M\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + P\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2Q\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(F\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) + K\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^2\,\partial x}\right)\right.\right.$
$+ L\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y\,\partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right) + N\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)$
$+ R\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S\left.\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\Pi = 0$

IV. $F\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right) + K\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^2\,\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y\,\partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) + N\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + P\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$
$+ Q\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + R\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + S\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + T\Pi = 0.$

3. La premiere équation peut ſe mettre ſous cette forme:

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3} + \frac{K}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2} + \frac{L}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} + \frac{M}{F} = 0,$$

équation du troiſième degré qui donnera trois valeurs de $\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)}$, que j'appellerai $\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}$, $\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$, $\frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}$, et intégrant les

trois

trois équations du premier degré qui en réſultent, on aura les trois valeurs de Φ, ſavoir Φ', Φ'', Φ'''. Maintenant on a par la Théorie des équations,

$$\frac{K}{F} = -\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)},$$

$$\frac{L}{F} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)} + \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)} + \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)},$$

$$\frac{M}{F} = -\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)}$$

4. Au moyen de ces valeurs on a

$$3\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 = \frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)}$$

$$3\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)^2 + \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2 = -\frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)}$$

$$3\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)^2 + \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)^2 = \frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)}$$

$\frac{K}{F}$

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 =$$
$$-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}$$

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2 + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 =$$
$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$$

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2 + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2 =$$
$$-\frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}\cdot\frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$$

Faiſons maintenant pour abréger:

$$3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 = A';$$

$$3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 = A'';$$

$$3\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)$$
$$+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2 = A'''.$$

L'équation II donnera, en y ſubſtituant ſucceſſivement Φ', Φ'', Φ''' à la place de Φ et mettant Π', Π'', Π''' pour les valeurs correſpondantes de Π, les trois équations ſuivantes:

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)=$$
$$\frac{A'\,\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}$$

$$-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi''}{\partial y}\right)=$$
$$\frac{A''\,\Pi''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'''}{\partial y}\right)=$$
$$\frac{A'''\,\Pi'''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}$$

5, On remarquera que A' devient A'', en échangeant réciproquement Φ' et Φ'', et A''' en échangeant Φ' et Φ''' et réciproquement. Maintenant ces trois équations ſont telles que la premiere ſe change en la ſeconde, en y échangeant réciproquement Φ' et Φ'', Π' et Π''; en la troiſième, en y échangeant Φ' et Φ''', Π' et Π''' et réciproquement. On fera donc comme pour les équations du ſecond degré, $\Pi' : \Pi'' = \alpha : 1$ (α étant une fonction quelconque de x et y) on aura $\Pi' = \alpha\Pi''$, donc $\Pi'' = \frac{\Pi'}{\alpha}$. Donc α doit devenir $\frac{1}{\alpha}$, en y échangeant Φ' et Φ'', et réciproquement; parceque Π' doit devenir Π'', en échangeant dans ſa valeur Φ' et Φ'' et réciproquement, donc $\alpha = \frac{F:\Phi''}{F:\Phi'}$. Donc $\Pi' = \frac{\Pi'' F:\Phi''}{F:\Phi'}$, et $\Pi' F:\Phi' = \Pi'' F:\Phi''$. On prouvera de la même manière que $\Pi' F:\Phi' = \Pi''' F:\Phi'''$. L'intégrale pourra donc ſe mettre ſous cette forme: $z = \Pi\,(F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:\Phi''')$.

6. Les

6. Les quantités $\frac{K}{F}$, $\frac{L}{F}$, $\frac{M}{F}$, ſeront donc déterminées par les trois équations qui réſultent de l'équation I. Les quantités $\frac{N}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{Q}{F}$, ſeront déterminées par les trois équations qui réſultent de l'équation II. Les quantités $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$, ſe détermineront par deux des trois équations qui réſultent de l'équation III. L'équation IV ne fournira qu'une équation qui déterminera la quantité $\frac{T}{F}$. Il reſtera donc, à cauſe de la troiſième équation fournie par l'équation III, une équation de condition à remplir. Ainſi d'après la ſuppoſition de l'intégrale $\frac{z}{\Pi} = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''$, on ne pourra pas déterminer généralement l'équation différentielle :

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\, \partial y}\right)$$
$$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{T}{F} z = 0,$$

mais il reſtera une équation de condition qui contiendra une relation entre les quantités Φ', Φ'', Φ'''.

7. Pour découvrir cette relation reprenons l'équation $\frac{z}{\Pi} = F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''$. Je fais $z' = \frac{z}{\Pi}$ et j'ai $z' = F : \Phi' + f' : \Phi'' + \Sigma' : \Phi'''$. Donc

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) F' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) f' : \Phi'' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) \Sigma' : \Phi'''$$
$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) F' : \Phi' + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f' : \Phi'' + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) \Sigma' : \Phi'''.$$

On aura donc en faiſant

$$z'' = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right), \mu = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right),$$
$$\nu = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right), \; z'' = \mu f' : \Phi'' + \nu\, \Sigma' : \Phi''',$$

 ou

ou en faiſant $z''' = \frac{z''}{\mu}$, $\nu' = \frac{\nu}{\mu}$, on aura $z''' = f' : \Phi'' + \nu' \Sigma' : \Phi'''$. Donc

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) f'' : \Phi'' + \left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right) \Sigma' : \Phi''' + \nu' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) \Sigma'' : \Phi''',$$

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) f'' : \Phi'' + \left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) \Sigma' : \Phi''' + \nu' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) \Sigma'' : \Phi'''.$$

On aura donc en faiſant

$$z^{IV} = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right), \ \mu'' = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right)$$

$$\nu'' = \nu'\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right),$$

$$z^{IV} = \mu'' \Sigma' : \Phi''' + \nu'' \Sigma'' : \Phi''',$$

ou en faiſant

$$\frac{z^{IV}}{\mu''} = z^{V}, \ \frac{\nu''}{\mu''} = \nu''', \quad z^{V} = \Sigma' : \Phi''' + \nu''' \Sigma'' : \Phi'''.$$

Donc

$$\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right)\right) \Sigma'' : \Phi''' + \nu''' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) \Sigma''' : \Phi''',$$

$$\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial x}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right)\right) \Sigma'' : \Phi''' + \nu''' \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) \Sigma''' : \Phi'''.$$

ou en faiſant

$$\left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial y}\right) - \left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial z^{V}}{\partial x}\right) = z^{VI},$$

$$\nu'''\left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right)\right) = \nu^{IV}, \ z^{VI} = \nu^{IV} \Sigma''' : \Phi''',$$

ou en faiſant

$\frac{z^{VI}}{\nu^{IV}} = z^{VII}$, $z^{VII} = \Sigma''' : \Phi'''$. Donc $\left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) \Sigma^{IV} : \Phi'''$, $\left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) \Sigma^{IV} : \Phi'''$, et $\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z^{VII}}{\partial x}\right) = c$.

8. On arriverait ainſi à une équation différentielle du quatrième dégré. Pour qu'elle ſe reduiſe au troiſième, il

 faut

faut que l'on ait $\nu^{\text{iv}} = 0$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\nu'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\nu'''}{\partial y}\right)=0,$$

équation dont l'intégrale complette eſt $\nu''=\varrho:\Phi'''$. Donc $\frac{\nu''}{\mu''}=\varrho:\Phi'''$, $\nu''=\mu''\varrho:\Phi'''$, et ſubſtituant les valeurs de μ'' et ν'',

$$\nu'\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)=\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}\right)\varrho:\Phi''';$$

ou $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\nu'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right)\varrho:\Phi'''\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\nu'\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}\right)\varrho:\Phi'''\right)=0,$

ou $\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{\varrho:\Phi'''}-\frac{\left(\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right)}{\nu'}\right)-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{\varrho:\Phi'''}-\frac{\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}\right)}{\nu'}\right)=0,$

équation dont l'intégrale complette eſt $\sigma:\Phi'''-l\nu'=\tau:\Phi'''$, en faiſant $\int\frac{\partial\Phi'''}{\varrho:\Phi'''}=\sigma:\Phi'''$. Donc $l\nu'=\sigma:\Phi'''-\tau:\Phi''$, $\nu'=\frac{\nu}{\mu}=e^{\sigma:\Phi'''-\tau:\Phi''}$. Donc $\nu=\mu e^{\sigma:\Phi'''-\tau:\Phi''}$, ou en mettant pour μ et ν leurs valeurs,

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)=\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)e^{\sigma:\Phi'''-\tau:\Phi''}\right.$$

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)e^{-\sigma:\Phi'''}=\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)e^{-\tau:\Phi''},\ \text{ou}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)e^{-\sigma:\Phi'''}-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)e^{-\tau:\Phi''}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)e^{-\sigma:\Phi'''}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)e^{-\tau:\Phi''}\right)=0.$$ Je fais

$\int\partial\Phi'''e^{-\sigma:\Phi'''}=P:\Phi'''$, $\int\partial\Phi''e^{-\tau:\Phi''}=Q:\Phi''$, et j'ai

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial(P:\Phi'''-Q:\Phi'')}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial(P:\Phi'''-Q:\Phi'')}{\partial x}\right)=0$$

équation dont l'intégrale complette eſt $P:\Phi'''-Q:\Phi''=R:\Phi'$. Voilà la condition qui doit exiſter entre Φ', Φ''

et

et Φ''', pour que l'équation différentielle ſoit du 3e degré; enſorte que l'intégrale devra avoir cette forme:

$$z' = \frac{z}{\Pi} = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:(\sigma:\Phi' + \varrho:\Phi'').$$

Ainſi la quantité contenue ſous la troiſième fonction arbitraire doit être égale à la ſomme de deux fonctions quelconques des deux autres quantités.

9. On peut, en employant la méthode expoſée dans les derniers §§, arriver directement à la même concluſion, ſans aucun préliminaire. Soit l'équation

$$z = \Pi' F:\Phi' + \Pi'' f:\Phi'' + \Pi''' \Sigma:\Phi'''.$$

Différentiant et ſuppoſant $z' = \frac{z}{\Pi'}$, $\mu' = \frac{\Pi''}{\Pi'}$, $\mu'' = \frac{\Pi'''}{\Pi'}$,

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$\nu' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$\nu'' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\mu''}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

$$\nu''' = \frac{\mu''\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

on aura

$$z'' = \nu' f:\Phi'' + f':\Phi'' + \nu'' \Sigma:\Phi''' + \nu''' \Sigma':\Phi'''.$$

Différentiant et ſuppoſant

$$z''' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \left(\nu''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\nu'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}$$

$\varrho' =$

$$\varrho' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)}{\left(v'\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right) - \left(v''\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right)},$$

$$\varrho'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v''}{\partial y}\right)}{\left(v'\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(v''\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right)},$$

$$\varrho''' = \frac{v'''\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right)}{\left(v'\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(v''\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right)},$$

on aura

$$z''' = \varrho' f : \Phi'' + \varrho'' \Sigma :: \Phi''' + \Sigma' : \Phi'' + \varrho''' \Sigma'' : \Phi''.$$

Or pour que l'intégrale ſuppoſée conduiſe à une équation du troiſième degré, il faut que

$$\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = 0;$$

ce qui donnera les équations ſuivantes:

$$\text{I. } \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varrho'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varrho'}{\partial y}\right) = 0$$

$$\text{II. } \varrho'\left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right) = 0$$

$$\text{III. } \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varrho''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varrho''}{\partial y}\right) = 0$$

$$\text{IV. } \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varrho'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varrho'''}{\partial y}\right) = 0$$

La ſeconde équation donne $\varrho' = 0$, ſi l'on veut que les quantités Φ'' et Φ''' reſtent différentes; dans ce cas la première devient identiquement nulle. La troiſième donne $\varrho'' = A : \Phi''$, la quatrième $\varrho''' = B : \Phi''$. ($A : \Phi''$, $B : \Phi'''$ et toutes les dénominations analogues déſigneront toujours des fonctions arbitraires de Φ'', ou de telle autre ſemblable). La valeur $\varrho' = 0$, donne

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right) = 0,$$

donc

donc $\nu' = C : \Phi''$. Maintenant on a

$$\frac{\varrho''}{\varrho'''} = \partial : \Phi''' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu''}{\partial y}\right)}{\nu'''\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right)}.$$ Donc

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \nu''}{\partial x}\right)}{\nu'''} + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\partial : \Phi'''\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \nu''}{\partial y}\right)}{\nu'''} + \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\partial : \Phi'''\right) = 0$$

On tire de là

$$\int \frac{\partial \nu'}{\nu'''} + E : \Phi''' = S : \Phi'', \int \frac{\partial \nu''}{\nu'''} = S : \Phi'' - E : \Phi'''.$$

Pour que $\frac{\partial \nu''}{\nu'''}$ ſoit intégrable il faut que $\nu'' = H : \nu''$, ce qui donnera $I : \nu''' = S : \Phi'' - E : \Phi'''$, ou $\nu''' = K : \Phi'' + L : \Phi'''$. Subſtituant la valeur de ν'', ſavoir $H : \nu'''$ dans les équations que fourniſſent les valeurs de ϱ'' et ϱ''', on trouve après les réductions,

$$\left(\left(\frac{\partial \nu'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \nu'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right)(\nu''' H' : \nu''' - \nu''' A : \Phi''' -$$
$$B : \Phi''' H : \nu''' H' : \nu''') = 0,$$

d'où l'on tire $\nu''' = L : \Phi'''$. Donc $\nu'' = M : \Phi'''$ Mais

$$\nu'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial y}\right)}{\mu'\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$ donc $\nu'' = 0$,

donc $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial y}\right) = 0$, donc $\mu'' = Q : \Phi'$.

La valeur de $\nu' = C : \Phi''$ donne

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right)}{\mu'} - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) C : \Phi''\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \mu'}{\partial y}\right)}{\mu'} - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) C : \Phi''\right) = 0.$$

Donc $l\,\mu' = N : \Phi' + P : \Phi''$. Mais $\nu''' = L : \Phi''' =$

$$\frac{\frac{\mu''}{\mu'}\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}.$$

Donc

Donc $\mu'' = \mu' = Q:\Phi'$. Donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{L:\Phi'''}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)}{L:\Phi'''}\right) = 0.$$

donc $\Phi' = R:\Phi'' + S:\Phi'''$. Donc une des trois quantités Φ', Φ'', Φ''' doit être égale à la ſomme des fonctions des deux autres, comme nous l'avons trouvé ci-deſſus §. 8. De plus on aura $z' = F:\Phi' + Q:\Phi' f:\Phi'' + Q:\Phi' \Sigma:\Phi''' = \frac{z}{\Pi'}$. Donc $\frac{z}{\Pi' Q:\Phi'} = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:\Phi'''$. Donc en général $z = \Pi\,(F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:(\sigma:\Phi' + \varrho:\Phi''))$, comme nous l'avons trouvé ci-deſſus.

10. On peut confirmer ce réſultat en exécutant le procédé indiqué dans le §. 6. Reprenons l'équation du §. 7 $\frac{z}{\Pi} = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:\Phi'''$, ou plus ſimplement $z = F:\Phi' + f:\Phi'' + \Sigma:\Phi'''$, on pourra faire dans les équations générales du § 2 $\Pi = 1$, ce qui donnera $T = 0$, et les équations II et III nous donneront les ſix équations ſuivantes:

I. $\left(3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\Big)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)$
$+ \left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$
$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2 = 0,$

II. $\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)$
$+ \frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)$
$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2 = 0;$

III. $\left(3\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)$
$+ \left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \left(\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)^2 + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)$
$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)^2 = 0;$

$$\text{IV. } \left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\,\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\,\partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) = 0;$$

$$\text{V. } \left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^2\,\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y\,\partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 0;$$

$$\text{VI. } \left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^2\,\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y\,\partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) = 0.$$

Multiplions réſpectivement les trois dernieres équations par m', m'', m''', ajoutons les et égalons ſéparément à zéro les coëfficiens de $\frac{K}{F}$, $\frac{S}{F}$, l'équation réſultante ſera:

$$m'\Big[\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\,\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\,\partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\Big]$$
$$+ m''\Big[\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^2\,\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y\,\partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\Big]$$
$$+ m'''\Big[\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y^2\,\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial y\,\partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'''}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\Big] = 0,$$

et les deux équations de condition ſeront:

$$m'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + m''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + m'''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) = 0,$$
$$m'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + m''\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + m'''\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) = 0,$$

d'où l'on tire en éliminant

$$\frac{m'''}{m'} = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)},$$

m''

$$\frac{m''}{m'} = -\frac{\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)}.$$

L'on peut donc faire

$$m' = \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\Phi'''}{\partial y}\right),$$

$$m'' = -\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right),$$

$$m''' = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right).$$

11. Maintenant multiplions reſpectivement les trois premieres équations et celle que nous venons d'obtenir par les quantités n', n'', n''', n^{IV} et égalons ſéparément à zéro les coëfficiens de $\frac{N}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{Q}{F}$, l'équation réſultante ſera:

$$n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3 \Phi'}{\partial y^3}\right) + m''\left(\frac{\partial^3 \Phi''}{\partial y^3}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3 \Phi'''}{\partial y^3}\right)\right) + \frac{K}{F}\, n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3 \Phi'}{\partial y^2 \partial x}\right)\right.$$
$$\left. + m''\left(\frac{\partial^3 \Phi''}{\partial y^2 \partial x}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3 \Phi'''}{\partial y^2 \partial x}\right)\right)$$
$$+ \frac{L}{F}\, n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3 \Phi'}{\partial y \partial x^2}\right) + m''\left(\frac{\partial^3 \Phi''}{\partial y \partial x^2}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3 \Phi'''}{\partial y \partial x^2}\right)\right) + \frac{M}{F}\, n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial^3 \Phi'}{\partial x^3}\right)\right.$$
$$\left. + m''\left(\frac{\partial^3 \Phi''}{\partial x^3}\right) + m'''\left(\frac{\partial^3 \Phi''}{\partial x^3}\right)\right)$$
$$+ n'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right)\left(3\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right) + n'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\, \partial y}\right)\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right)$$
$$+ n'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\right)$$
$$+ n''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right)\left(3\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right) + n''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x\, \partial y}\right)\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right)$$
$$+ n''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right)$$
$$+ n'''\left(\frac{\partial\partial \Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(3\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right) + n'''\left(\frac{\partial\partial \Phi'''}{\partial x\, \partial y}\right)\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right) + n'''\left(\frac{\partial\partial \Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right) = 0.$$

Les trois équations de condition ſeront:

$$n'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + n''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)^2 + n'''\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)^2 + n^{IV}\left(m'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial y^2}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left. + m'''\left(\frac{\partial\partial \Phi'''}{\partial y^2}\right)\right) = 0$$

$$n' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + n''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) + n'''\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) + n^{\mathrm{IV}}\Big(m'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ m''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x\,\partial y}\right) + m'''\left(\frac{\partial\partial \Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\Big) = 0$$
$$n' \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 + n''\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)^2 + n'''\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)^2 + n^{\mathrm{IV}}\Big(m'\left(\frac{\partial\partial \Phi'}{\partial x^2}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial \Phi''}{\partial x^2}\right)$$
$$+ m'''\left(\frac{\partial\partial \Phi'''}{\partial x^2}\right)\Big) = 0;$$

d'où l'on tire en éliminant :

$$n = m' \left\{\begin{aligned}
& m'\Big(\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
&\quad + m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
& - m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) \\
&\quad - m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) \\
& - m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) - m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
&\quad - m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
& + m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) \\
&\quad + m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$n'' = m'' \left\{\begin{aligned}
& m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
&\quad + m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
& - m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) - m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
&\quad - m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) \\
& - m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) \\
&\quad - m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) \\
& + m'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + m''\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) \\
&\quad + m'''\left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\}$$

m'''

$$n''' = m''' \left\{ \begin{array}{l} m' \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + m'' \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ \quad + m''' \left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ - m' \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x \partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) - m'' \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x \partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ \quad - m''' \left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x \partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) \\ - m' \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x \partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - m'' \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x \partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\ \quad - m''' \left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial x \partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\ + m' \left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + m'' \left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \\ \quad + m''' \left(\frac{\partial\partial\Phi'''}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) \end{array} \right\}$$

$$n^{IV} = m' \, m'' \, m'''.$$

Subſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura l'équation de condition entre Φ', Φ'', Φ''' néceſſaire pour que l'intégrale ſuppoſée conduiſe à une équation différentielle du troiſième degré. Maintenant ſi l'on fait $\Phi''' = \sigma : \Phi' + \varrho : \Phi''$, on trouve $m'' = - m''' \varrho' : \Phi''$, $m' = - m''' \sigma' : \Phi'$, $n' = - m'''^4 \sigma' : \Phi' \sigma'' : \Phi' \varrho' : \Phi'$, $n'' = - m'''^4 \sigma' : \Phi' \varrho' : \Phi'' \varrho'' : \Phi''$, $n''' = 0$, $n^{IV} = m'''^3 \sigma' : \Phi' \varrho' : \Phi''$. Et ces valeurs ſubſtituées dans l'équation de condition la rendent identiquement nulle, ce qui donne le réſultat du §. 8. On peut arriver auſſi au même réſultat, en conſidérant que ſi l'on ſubſtitue la valeur $\Phi''' = \sigma : \Phi' + \varrho : \Phi''$ dans l'équation VI, elle devient identiquement nulle, pourvû qu'on y faſſe uſage des équations I, II, IV, V, ce qui n'arrive pas à l'équation III. Les ſix équations que nous avons rapportées ſe réduiſent donc à cinq, par le moyen deſquelles on déterminera les cinq inconnues $\frac{N}{F}$, $\frac{P}{F}$, $\frac{Q}{F}$, $\frac{R}{F}$, $\frac{\;}{F}$.

12. Reprenons les équations du §. 4, faiſons $\Pi' = \Pi'' = \Pi''' = \Pi$, et ſuppoſant pour abrêger

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) = a,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) = b,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) = c,$$
$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) = u,$$

on aura

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = \frac{A'u}{ab};$$
$$-\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} + \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = \frac{A''u}{ac}$$
$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} - \left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = \frac{A'''u}{bc}.$$

Eliminant $\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}$ des deux premieres équations, on a

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} = \frac{A'\,u\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{a^2 b} + \frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2 c}$$

et des deux derniéres, on a

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi} = -\frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{ac^2} - \frac{A'''\,u\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{bc^2}.$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient

$$\frac{A'}{a^2 b}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + \frac{A''}{a^2 c}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + \frac{A''}{ac^2}\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) + \frac{A'''}{bc^2}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 0, \text{ ou}$$
$$A'c^2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) + A''b\left(c\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + a\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right) + A'''a^2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) = 0.$$

Mais

$$c\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right) + a\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right) = b\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right). \text{ Donc}$$
$$A'c^2 + A''b^2 + A'''a^2 = 0.$$

Eli-

Eliminant enſuite $\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}$ des deux premieres équations, on a

$$\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = -\frac{A'\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) u}{a \cdot b} + \frac{A''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) u}{a^2 c}$$

et des deux dernieres, on a

$$\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = -\frac{A''\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) u}{a c^2} - \frac{A'''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) u.}{b c^2}$$

Retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient,

$$A' c^2 \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + A'' b \left(c\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + a\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right) + A''' a^2 \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = o.$$

Mais

$$c\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + a\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) = b\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right), \text{ donc}$$

$$A' c^2 + A'' b^2 + A''' a^2 = o.$$

comme ci-deſſus. Suppoſant cette équation de condition, on a en multipliant la premiere valeur de $\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}$ par ∂x et celle de $\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}$ par ∂y et ajoutant ces valeurs, on aura dis-je,

$$\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{A' c\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\partial y\right) + A'' b\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\partial y\right)}{a^2\ bc}.$$

ou bien $\frac{\partial \Pi}{\Pi} = \frac{(A' c \partial \Phi'' + A'' b \partial \Phi') u}{a^2 b c}$ et partant

$$\Pi = e^{\int\left(\frac{A' c \partial \Phi'' + A'' b \partial \Phi'}{a^2 b c}\right) u}$$

On ſubſtituera cette valeur de Π dans les équations III et IV, et l'on aura de nouvelles équations de condition qui doivent être remplies, pour que l'intégrale

$$z = e^{\int\left(\frac{A' c \partial \Phi' + A'' b \partial \Phi'}{a^2 b c}\right) u} \left(F : \Phi' + f : \Phi'' + \Sigma : \Phi'''\right),$$

puiſſe

puiſſe avoir lieu. Au reſte, ſi au lieu de prendre les premieres valeurs de $\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}$ et $\frac{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)}{\Pi}$, on avait pris les ſecondes, on aurait trouvé

$$\frac{\partial \Pi}{\Pi} = - \frac{(A'' b\,\partial\Phi'' + A''' a\,\partial\Phi''')\,\Pi}{a\,b\,c^2}.$$

Egalant cette valeur à la précédente on obtient

$$\frac{A' c^2 \partial\Phi'' + A'' b\,(c\,\partial\Phi' + a\,\partial\Phi''') + A''' a^2 \partial\Phi''}{a^2\,c^2} = 0.$$

Mais $c\partial\Phi' + a\partial\Phi''' = b\partial\Phi''$, donc $A'c^2 + A''b^2 + A'''a^2 = 0$, ce qui eſt l'équation de condition trouvée ci-deſſus. Ainſi ces deux intégrales reviennent au même. Si l'on fait uſage de la valeur de Φ''' trouvée plus haut, ſavoir $\Phi''' = \sigma : \Phi' + \varrho : \Phi''$, l'on aura $b = a\,\varrho' : \Phi''$, $c = -\,a\,\sigma' : \Phi'$, l'équation de condition devient donc en la diviſant par a^2, $A'(\sigma' : \Phi')^2 + A''(\varrho' : \Phi'')^2 + A''' = 0$.

13. Prenons pour exemple l'équation

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + \frac{c}{e}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + \frac{b}{e}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) + \frac{a}{e}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) + \frac{b}{c}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + \frac{g}{e}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$+ \frac{f}{c}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \frac{b}{e}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{i}{e}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{l}{e}\,z = 0$$

(que traite M. de Condorcet Mem. de l'Ac. des ſc. de Paris pour 1772 P 1. p. 30) $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$ étant des conſtantes. Nous aurons $\frac{K}{F} = \frac{c}{e}$, $\frac{L}{F} = \frac{b}{e}$, $\frac{M}{F} = \frac{a}{e}$, $\frac{N}{F} = \frac{b}{e}$, $\frac{P}{F} = \frac{g}{e}$, $\frac{Q}{F} = \frac{f}{c}$, $\frac{R}{F} = \frac{k}{e}$, $\frac{S}{F} = \frac{i}{e}$, $\frac{T}{F} = \frac{l}{e}$.

On aura donc

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3} + \frac{c}{e}\,\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2} + \frac{b}{e}\,\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} + \frac{a}{e} = 0.$$

Soyent

Soyent les trois racines de cette équation

$$\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)},\ \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)},\ \frac{\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)},$$ ou en faiſant en général $\frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)} = m,$

on aura à intégrer l'équation $\partial x + m\partial y = 0$, ce qui donnera $\Phi = x + my$, donc

$$\Phi' = x + m'y,\ \Phi'' = x + m''y,\ \Phi''' = x + m'''y,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = 0,\ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = 1,\ \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = m',\ \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) = m'',\ \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right) = m''',$$

toutes les différentielles ultérieures feront $= 0$. On aura

$$a = m' - m'',\ b = m' - m'',\ c = m'' - m''',\ A' = \frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e},$$
$$A'' = \frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e},\ A''' = \frac{h}{e}m'''^2 + \frac{g}{e}m''' + \frac{f}{e}.$$ Donc

$$\frac{A'c\partial\Phi'' + A''b\partial\Phi'}{abc} =$$
$$\frac{(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e})(m'' - m''')(\partial x + m''\partial y) + (\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}) \times (m' - m''')(\partial x + m'\partial y)}{(m' - m'')^2(m' - m''')(m' - m'')}.$$

Donc

$$\Pi = \varepsilon^{\frac{(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e})(m'' - m''')(x + m''y) + (\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}) \times (m' - m'')(x + m'y)}{(m' - m'')^2(m' - m''')(m'' - m''')}},$$

ε étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt $= 1$.

14. Maintenant l'équation de condition $A'c^2 + A''b^2 + A'''a^2 = 0$, deviendra en y ſubſtituant les valeurs,

$$(\tfrac{h}{e}m'^2 + \tfrac{g}{e}m' + \tfrac{f}{e})(m'' - m''')^2 + (\tfrac{h}{e}m''^2 + \tfrac{g}{e}m'' + \tfrac{f}{e})(m' - m''')^2 + (\tfrac{h}{e}m'''^2 + \tfrac{g}{e}m''' + \tfrac{f}{e})(m' - m'')^2 = 0$$

et au moyen de cette équation on ſatisfait aux trois équations que donne la ſeconde des équations générales. La troiſième des équations générales donne, en mettant pour $\frac{K}{F}, \frac{L}{F}, \frac{M}{F}$ leurs valeurs en m', m'', m''', les trois équations ſuivantes:

$$(2m' - m'' - m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right) - (2m'' m''' - 2m'^2)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + (m'^2 m'' + m'^2 m''' - 2m' m'' m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{2b}{e}m' + \frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(\frac{g}{e}m' + \frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{k}{e}m' + \frac{i}{e}\right)\Pi = 0,$$

$$(2m'' - m' - m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (2m' m''' - 2m''^2)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + (m' m''^2 + m''^2 m''' - 2m' m'' m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{2b}{e}m'' + \frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(\frac{g}{e}m'' + \frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{k}{e}m'' + \frac{i}{c}\right)\Pi = 0,$$

$$(2m''' - m' - m'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (2m'm'' - 2m'''^2)\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + (m' m'''^2 + m'' m'''^2 - 2m' m'' m''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{2b}{e}m''' + \frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(\frac{g}{e}m''' + \frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(\frac{k}{e}m''' + \frac{i}{e}\right)\Pi = 0.$$

Nous ſavons a priori que ces trois équations ſe reduiſent à deux, puisque $x + m'''y = \sigma{:}(x + m'y) + \varrho{:}(x + m''y)$; car en faiſant $x + m'''y = p(x + m'y) + q(x + m''y)$, on trouve $p + q = 1$, $pm' + qm'' = m'''$, ce qui donne $p = \frac{m''' - m''}{m' - m''}$, $q = \frac{m' - m'''}{m' - m''}$. Or ajoutant enſemble la premiere équation multipliée par p et la ſeconde multipliée par q, on obtient la troiſième, faiſant pour abréger:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{b}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e}\right)(m'' - m''') + \left(\frac{b}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}\right)(m' - m''')}{(m' - m'')^2\,(m' - m''')\,(m'' - m''')}$$

$$\beta = \frac{\left(\frac{b}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e}\right)(m'' - m''')\,m'' + \left(\frac{b}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e}\right)(m' - m''')}{(m' - m'')^2\,(m' - m''')\,(m'' - m''')}$$

$\Pi = \varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, donc $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) = \alpha\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = \beta\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) = \alpha^2\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) = \alpha\beta\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) = \beta^2\varepsilon^{\alpha x + \beta y}$.

Au

Au moyen de ces valeurs les deux premieres équations deviendront

$$(2m' - m'' - m''')\beta^2 + (2m''m''' - 2m'^2)\alpha\beta$$
$$+ (m'^2m'' + m'^2m''' - 2m'm''m''')\alpha^2$$
$$+ (2\tfrac{b}{e}m' + \tfrac{g}{e})\beta + (\tfrac{g}{e}m' + \tfrac{2f}{e})\alpha + \tfrac{k}{e}m' + \tfrac{i}{e} = 0,$$
$$(2m'' - m' - m''')\beta^2 + (2m'm''' - 2m''^2)\alpha\beta$$
$$+ (m'm''^2 + m''^2m''' - 2m'm''m''')\alpha^2$$
$$+ (\tfrac{2b}{e}m'' + \tfrac{g}{c})\beta + (\tfrac{g}{e}m'' + \tfrac{f}{c})\alpha + \tfrac{k}{c}m'' + \tfrac{i}{e} = 0$$

équations de condition qui doivent être remplies pour que l'intégrale ait lieu. Enfin l'équation IV donnera, à cauſe de

$$\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) = \alpha^3, \left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^2\partial y}\right) = \alpha^2\beta, \left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x\partial y^2}\right) = \alpha\beta^2, \left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right) = \beta^3,$$

l'équation de condition:

$$\beta^3 - (m' + m'' + m''')\beta^2\alpha + (m'm'' + m'm''' + m''m''')\beta\alpha^2$$
$$- m'm''m'''\alpha^3 + \tfrac{b}{e}\beta^2 + \tfrac{g}{e}\beta\alpha + \tfrac{f}{e}\alpha^2 + \tfrac{h}{e}\beta + \tfrac{i}{e}\alpha + \tfrac{k}{e} = 0;$$

Avec ces équations de condition on aura pour intégrale,

$$z = \Pi(F:(x + m'y) + f:(x + m''y) + \Sigma:(x + m'''y)),$$

Π ayant la valeur rapportée à la fin du § préc.

15. On peut mettre l'intégrale ſous la forme ſuivante:

$$z = \Pi' F:(x + m'y) + \Pi'' f:(x + m''y)) + \Pi''' \Sigma:(x + m'''y).$$

Pour avoir la valeur de Π' on ſera dans la valeur générale de Π, $x + m'y = 0$, ce qui donne $x = -m'y$, et l'on a

$$\Pi' = \varepsilon^{\frac{-(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e})y}{(m' - m'')(m' - m''')}}.$$

 Pour

Pour avoir Π'', on fera dans la valeur générale de Π $x + m''y = 0$, ce qui donne $x = -m''y$, et l'on a

$$\Pi'' = \varepsilon^{\frac{\left(\frac{b}{e} m''^2 + \frac{g}{e} m'' + \frac{f}{e}\right) y}{(m'-m'')(m''-m''')}}.$$

Pour avoir Π''', on fera dans la valeur générale de Π, $x + m'''y = 0$, ce qui donne $x = -m'''y$, et l'on a

$$\Pi''' = \varepsilon^{\frac{\left(\frac{b}{e} m'^2 + \frac{g}{e} m' + \frac{f}{e}\right)(m''-m''')^2 y + \left(\frac{b}{e} m''^2 + \frac{g}{e} m'' + \frac{f}{e}\right)(m'-m''')^2 y}{(m'-m'')^2 (m'-m''')(m''-m''')}} =$$

(à cauſe de l'équation de condition)

$$\varepsilon^{\frac{-\left(\frac{b}{e} m''^2 + \frac{g}{e} m'' + \frac{f}{e}\right) y}{(m'-m''')(m''-m''')}}.$$

Soyent pour abréger

$$\Pi' = \varepsilon^{\alpha' y},\ \Pi'' = \varepsilon^{\alpha'' y},\ \Pi''' = \varepsilon^{\alpha''' y},$$

on aura, en ſubſtituant ces valeurs dans les équations qui réſultent des équations III et IV,

$$\left(3m' + \frac{c}{e}\right)\alpha'^2 + \left(\frac{2b}{e} m' + \frac{g}{e}\right)\alpha' + \frac{k}{e} m' + \frac{i}{e} = 0;$$

$$\alpha'^3 + \frac{b}{e}\alpha'^2 + \frac{k}{e}\alpha' + \frac{l}{e} = 0,$$

$$\left(3m'' + \frac{c}{e}\right)\alpha''^2 + \left(\frac{2b}{e} m'' + \frac{g}{e}\right)\alpha'' + \frac{k}{e} m'' + \frac{i}{e} = 0;$$

$$\alpha''^3 + \frac{b}{e}\alpha''^2 + \frac{k}{e}\alpha'' + \frac{l}{e} = 0,$$

$$\left(3m''' + \frac{c}{e}\right)\alpha'''^2 + \left(\frac{2b}{e} m''' + \frac{g}{e}\right)\alpha''' + \frac{k}{e} m''' + \frac{i}{e} = 0;$$

$$\alpha'''^3 + \frac{b}{e}\alpha'''^2 + \frac{k}{e}\alpha''' + \frac{l}{e} = 0.$$

On tire des trois dernieres équations $\frac{b}{e} = -\alpha' - \alpha'' - \alpha'''$, ce qui donne, en ſubſtituant les valeurs de α', α'', α''', une équa-

équation identique: $\frac{k}{e} = \alpha' \alpha'' + \alpha' \alpha''' + \alpha'' \alpha'''$, d'où l'on tire une équation de condition, où entre $\frac{k}{e}$; $\frac{l}{e} = - \alpha' \alpha'' \alpha'''$, d'où l'on tire une équation de condition, où entre $\frac{l}{e}$. Les trois premieres équations donnent, en éliminant $\frac{g}{e}$ et $\frac{i}{e}$ et ſubſtituant pour $\frac{b}{e}$, $\frac{k}{e}$ leurs valeurs en α', α'' α''' et reduiſant, une équation identiquement nulle.

16. On voit que α' devient α'' ou α''', en y échangeant m' et m'' au lieu m' et m''', enſorte qu'en faiſant en général

$$\alpha = - \frac{\left(\frac{b}{e} m^2 + \frac{g}{e} m + \frac{f}{e}\right)}{3 m^2 + \frac{2c}{e} m + \frac{b}{e}},$$

on aura en général $z = e^{\alpha y} \text{F}:(x + my)$, ce qui donnera les trois fonctions, en ſubſtituant au lieu de m, m', m'', m'''. Ces valeurs de m ſe tireront de l'équation

$$m^3 + \frac{c}{e} m^2 + \frac{b}{e} m + \frac{a}{e} = 0,$$

que donne l'équation I. La valeur α, que donne l'équation II, ſe tirera de l'équation

$$\left(3 m^2 + \frac{2c}{e} m + \frac{b}{e}\right) \alpha + \frac{b}{e} m^2 + \frac{g}{e} m + \frac{f}{e} = 0,$$

et l'on aura par les équations III et IV les équations de condition

$$\left(3 m + \frac{c}{e}\right) \alpha^2 + \left(\frac{2b}{e} m + \frac{g}{e}\right) \alpha + \frac{k}{e} m + \frac{i}{e} = 0,$$

$$\alpha^3 + \frac{b}{e} \alpha^2 + \frac{k}{e} \alpha + \frac{l}{e} = 0.$$

C'eſt ſous cette forme que M. de Condorcet préſente l'intégrale dans l'endroit cité.

17. Nous

17. Nous avons ſuppoſé jusqu'ici les trois valeurs Φ', Φ'', Φ''' inégales. Si deux d'entr'elles ſont égales, par exemple $\Phi'' = \Phi'''$, nous ferons, en employant la méthode du § 9.

$$z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi'' + \Phi''' \Sigma : \Phi'';$$

ou en faiſant

$$\frac{z}{\Pi'} = z', \; \frac{\Pi''}{\Pi'} = \nu, \; \frac{\Pi'''}{\Pi'} = \mu, \text{ on aura}$$

$$z' = F : \Phi' + \nu f : \Phi'' + \mu \Sigma : \Phi''.$$

Différentiant et ſuppoſant;

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\mu\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)}$$

$$p = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)}{\mu\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)}$$

$$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\mu\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)},$$

on aura

$$z'' = p f : \Phi'' + \nu' f' : \Phi'' + \varrho \Sigma : \Phi'' + \Sigma' : \Phi''.$$

Différentiant et ſuppoſant

$$z''' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)},$$

$$p' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)},$$

$$\varrho' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu'}{\partial y}\right)}, \text{ on aura}$$

$$z''' = p' f : \Phi'' + f' : \Phi'' + \varrho' \Sigma : \Phi''.$$

Pour

Pour que l'intégrale ſuppoſée conduiſe à une équation du troiſième degré, il faut que

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = 0$$

ce qui donne les équations ſuivantes:

$$\text{I. } \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\text{II. } \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varrho'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varrho'}{\partial y}\right) = 0. \quad \text{Donc}$$

$$\varrho' = A : \Phi'', \; p' = B : \Phi'', \quad \text{donc}$$

$$\frac{p'}{\varrho'} = C : \psi = \frac{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right)}, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right) C : \Phi''\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) C : \Phi''\right) = 0.$$

Pour que cette équation ſoit intégrable, il faut que

$$\varrho = D : \Phi'', \text{ donc } p = E : \Phi'', \text{ donc},$$

$$\frac{\nu}{\mu} = P : \Phi'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}. \quad \text{Donc}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) P : \Phi''\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) P : \Phi''\right) = 0.$$

Pour que cette équation ſoit intégrable, il faut que

$$\mu = M : \Phi'', \text{ donc } \nu = M : \Phi'' + \sigma : \Phi', \text{ donc}$$

$$\Pi'' = \Pi' (M : \Phi'' + \sigma : \Phi'), \; \Pi''' = \Pi' \; M : \Phi'',$$

$$z = \Pi' (F : \Phi' + (M : \Phi'' + \sigma : \Phi') f : \Phi'' + M : \Phi'' \Sigma : \Phi'')$$

$$= \Pi' (F : \Phi' + \Sigma : \Phi'' + \sigma : \Phi' \; f : \Phi'').$$

On parviendra aux mêmes réſultats d'après les équations générales du §. 2. Car on déterminera par l'équation I les quantités $\frac{K}{F}$, $\frac{L}{F}$, $\frac{M}{F}$, ſubſtituant pour Φ dans l'équation II la valeur double Φ'', les coëfficiens de $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)$ et $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$ deviendront

dront identiquement nuls, et le coëfficient de Π, égalé à zéro, déterminera la quantité $\frac{N}{F}$. Subſtituant la troiſiéme valeur Φ', on aura une équation qui déterminera la quantité $\frac{P}{F}$. L'équation III fournira trois équations qui détermineront les valeurs $\frac{Q}{F}$, $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$. L'équation IV. fournira trois équations, en y ſubſtituant pour Π les quantités Π' Π'', Π'''; l'une d'elles déterminera la valeur $\frac{T}{F}$, et il reſtera deux équations, par le moyen deſquelles on déterminera deux des quantités Π'', Π''', par le moyen de la troiſième Π' et des quantités Φ', Φ''. La méthode précédente eſt comme l'on voit plus abrégée, parce que celle-ci ſuppoſe des éliminations aſſez longues.

18. Reprenons l'intégrale

$$z = \Pi' \, (F:\Phi' + \Sigma:\Phi'' + \sigma:\Phi' \, f:\Phi'').$$

Les trois équations rapportées à la fin du § 4 ſe reduiront à deux, ſavoir

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)}{\Pi'} - \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)}{\Pi'} - \frac{A'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)^2}{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)} = 0,$$

$A = 0$. La premiere de ces équations donnera la valeur de Π' par l'intégration d'une équation du premier degré. La ſeconde fournira une équation de condition. L'équation III du §. 2 fournira les trois équations ſuivantes :

$$\left(3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\,\partial y}\right) +$$
$$\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)$$

+ (3

$$+\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\Pi'=0;$$

$$\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)$$
$$+\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi''}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'=0,$$

$$\Big[\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)2\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)2\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi''}{\partial x^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\Big]\;\sigma':\Phi'.$$
$$+\left(3\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\Pi'\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2\sigma'':\Phi'=0.$$

Les deux premieres équations fourniront des équations de condition, et la troiſième déterminera $\sigma:\Phi'$, en ſuppoſant la condition que la valeur de $\frac{\sigma'':\Phi'}{\sigma':\Phi'}$ ſoit une fonction de Φ'. Enfin l'équation IV donnera l'équation de condition ſuivante:

 $\left(\frac{\partial^3\Pi'}{\partial y^3}\right)$

$$\left(\frac{\partial^3\Pi'}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Pi'}{\partial y^2\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Pi'}{\partial y\partial x^2}\right) + \frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Pi'}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right) + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)$$
$$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) + \frac{T}{F}\Pi' = 0.$$

La ſeconde équation de condition qu'on pourrait croire en réſulter, ſe reduit aux précédentes; car en appellant I, II, III, IV les quatre équations générales du § 2, cette équation ſera $IV\,\sigma : \Phi' + III\,\sigma' : \Phi' + II\,\sigma'' : \Phi' + I\,\sigma''' : \Phi' = 0.$

19. *Si* nous appliquons cette Théorie à l'exemple du §. 13 et que nous faſſions $m'' = m'''$, l'équation II donnera

$$\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right) - m'\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right) + \frac{\left(\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e}\right)\Pi'}{(m'-m'')^2} = 0,$$

$$\frac{h}{e}m''^2 + \frac{g}{e}m'' + \frac{f}{e} = 0,$$

La valeur de m'' étant double par ſuppoſition, on aura

$$m'' = -\frac{g}{2h},\ f = \frac{gg}{4h}.$$ Donc

$$\frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{f}{e} = \frac{h}{e}m'^2 + \frac{g}{e}m' + \frac{gg}{4he} =$$
$$\frac{hhm'^2 + hgm' + \frac{gg}{4}}{e} = \frac{(hm' + \frac{g}{2})^2}{e}.$$

Faiſons pour intégrer l'équation du premiere dégré, $\Pi' = \varepsilon^{\alpha x + \beta y}$, cette équation deviendra

$$\beta - m'\alpha + \frac{(hm'+\frac{g}{2})^2}{e(m'-m'')} = 0, \text{ ou } \beta - m'\alpha + \frac{hm'+\frac{g}{2}}{e(m'+\frac{g}{2h})} = 0, \text{ ou}$$
$$\beta - m'\alpha + \frac{h}{e} = 0, \text{ donc } \beta = m'\alpha - \frac{h}{e},\ \Pi' = e^{\alpha(x+m'y) - \frac{h}{e}},$$

α étant une conſtante qui reſte indéterminée, et que nous déterminerons par les équations de condition. L'équation III donnera:

(3 m'

$$\left(3m'+\frac{c}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{2c}{e}m'+\frac{2b}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{b}{e}m'+\frac{3a}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)$$
$$+\left(\frac{2b}{e}m'+\frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{g}{e}m'+\frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)+\frac{k}{e}m'+\frac{i}{e}\right)\Pi'=0,$$

ou en mettant pour Π' ſa valeur,

$$\left(3m'+\frac{c}{e}\right)\beta^2+\left(\frac{2c}{e}m'+\frac{2b}{e}\right)\alpha\beta+\left(\frac{b}{e}m'+\frac{3a}{e}\right)\alpha^2+\left(\frac{2b}{e}m'+\frac{g}{e}\right)\beta$$
$$+\left(\frac{g}{e}m'+\frac{2f}{e}\right)\alpha+\left(\frac{k}{e}m'+\frac{i}{e}\right)=0,$$

ou en mettant pour β, $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{e}$ leurs valeurs, $\frac{k}{e}m'+\frac{i}{e}=0$, donc $\frac{i}{e}=-\frac{k}{e}m'$. On aura enſuite

$$\left(3m''+\frac{c}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{2c}{e}m''+\frac{2b}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{b}{e}m''+\frac{3a}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial\Pi'}{\partial x^2}\right)$$
$$\left(\frac{2b}{e}m''+\frac{g}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{g}{e}m''+\frac{2f}{e}\right)\left(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{k}{e}m''+\frac{i}{e}\right)\Pi'=0,$$

ou en mettant les valeurs trouvées

$$\beta^2-2m''\alpha\beta+m''^2\alpha^2+\frac{k}{e}=0;$$

ou en mettant la valeur de β,

$$\frac{\alpha^2cc}{ee}-\frac{3\alpha^2cg}{be}+\frac{2\alpha bc}{ee}-\frac{3\alpha g}{e}+\frac{bb}{ee}+\frac{9\alpha^2gg}{4bb}+\frac{k}{e}=0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha=\frac{\frac{b}{e}+\sqrt{-\frac{k}{e}}}{\frac{3g}{2b}-\frac{c}{e}},$$ en obſervant que $m'=-\frac{c}{e}-2m''=\frac{g}{b}-\frac{c}{e}$.

On aura enfin

$$\left(\left(3m''+\frac{c}{e}\right)2\beta m'+\left(\frac{2c}{e}m''+\frac{2b}{e}\right)(\alpha m'+\beta)+\left(\frac{b}{e}m''+\frac{3a}{e}\right)2\alpha\right)\sigma':\Phi'$$
$$+\left(\left(3m''+\frac{c}{e}\right)m'^2+\left(\frac{2c}{e}m''+\frac{2b}{e}\right)m'+\frac{b}{e}m''+\frac{3a}{e}\right)\sigma'':\Phi'=0,$$ ou

$$\frac{\frac{2b}{e}}{m'-m''}-2\alpha=\frac{\sigma'':\Phi'}{\sigma':\Phi'}=\frac{-2\sqrt{-\frac{k}{e}}}{\frac{3g}{2b}-\frac{c}{e}},$$ donc

$$\sigma:\Phi'=-\frac{2\sqrt{-\frac{k}{e}}}{\frac{3g}{2b}-\frac{c}{e}}\left(x+\left(\frac{g}{b}-\frac{c}{e}\right)y\right).$$

 Enfin

Enfin l'équation IV donnera l'équation de condition,

$$\beta^3 + \frac{a}{e}\beta^2\alpha + \frac{b}{e}\beta\alpha^2 + \frac{a}{c}\alpha^3 + \frac{b}{e}\beta^2 + \frac{g}{e}\beta\alpha + \frac{f}{e}\alpha^2 + \frac{k}{e}\beta$$
$$+ \frac{i}{e}\alpha + \frac{l}{c} = 0,$$

L'Intégrale aura donc cette forme :

$$z = \varepsilon^{\frac{\left(\frac{b}{e} + \sqrt{\frac{-k}{e}}\right)}{\frac{3g}{2b} - \frac{c}{e}}\left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)y\right) - \frac{b}{e}y} \left(F : \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)y\right)\right.$$
$$+ f : \left(x - \frac{g}{2b}y\right) + \varepsilon^{\frac{-2\sqrt{\frac{-k}{e}}}{\frac{3g}{2b} - \frac{c}{e}}\left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)y\right)} \Sigma : \left(x - \frac{g}{2b}y\right).$$

On peut mettre cette intégrale ſous une autre forme. Dans le coëfficient de $F : \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)y\right)$ on peut faire

$$x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)y = 0,$$

ce qui réduit ce coëfficient à $\varepsilon^{-\frac{b}{e}y}$. Dans les coëfficiens de $f : \left(x - \frac{g}{2b}y\right)$ et $\Sigma : \left(x - \frac{g}{2b}y\right)$ on peut faire $x - \frac{g}{2b} = 0$, ce qui donne $x = \frac{g}{2b}y$; alors le premier coëfficient devient $\varepsilon^{y\sqrt{\frac{-k}{e}}}$ et le ſecond $\varepsilon^{-y\sqrt{\frac{-k}{e}}}$. L'intégrale aura donc cette forme:

$$z = \varepsilon^{-\frac{b}{e}y} F : \left(x + \left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)y\right) + \varepsilon^{y\sqrt{\frac{-k}{e}}} f : \left(x - \frac{g}{2b}\right) + \varepsilon^{-y\sqrt{\frac{-k}{e}}} \Sigma : \left(x - \frac{g}{2b}y\right).$$

Au reſte la valeur $i = -km$ donne l'équation de condition $\frac{i}{k} + \frac{g}{b} - \frac{c}{e} = 0$.

L'équation de condition en β du troiſiéme dégré ſe reduit à celle-ci, $hk - le = 0$.

De

De plus, comme $b = 2m'm'' + m''^2$, on a, en ſubſtituant les valeurs, l'équation de condition

$b = -\left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)\frac{g}{b} + \frac{gg}{4bb} = \frac{cg}{eb} - \frac{3gg}{4bb}$. De même

$a = -m'm''^2 = \left(\frac{c}{e} - \frac{g}{b}\right)\frac{gg}{4bb} = \frac{cgg}{4bbe} - \frac{g^3}{4b^3}$, $f = \frac{gg}{4b}$.

20. Soit l'équation

$$by^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + (1-2b)y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}\right) + (b-2)y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x}\right) + y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)$$
$$-3by^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - 2(1-2b)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial x}\right) - (b-2)y^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + 6by\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+ 2(1-2b)y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - 6bz = 0.$$

On a ici

$F = by^3$, $K = (1-2b)y^3$, $L = (b-2)y^3$, $M = y^3$, $N = -3by^2$, $P = -2(1-2b)y^2$, $Q = -(b-2)y^2$, $R = 6by$, $S = 2(1-2b)y$, $T = -6b$.

La premiere équation nous donnera donc

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3} + \frac{(1-2b)}{b}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2} + \frac{(b-2)}{b}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} + \frac{1}{b} = 0,$$

ou en faiſant $\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} = u$,

$bu^3 + (1-2b)u^2 + (b-2)u + 1 = 0$, ou
$(bu+1)(u-1)^2 = 0$. Ce qui donne
$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} = -\frac{1}{b}$, $\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} = 1$. Cette derniere équation eſt double.

L'on tire de là les deux équations:

$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0$.

La

Enfin l'équation IV donnera l'équation de condition,

$$\beta^3+\frac{a}{e}\beta^2\alpha+\frac{b}{e}\beta\alpha^2+\frac{a}{c}\alpha^3+\frac{h}{e}\beta^2+\frac{g}{e}\beta\alpha+\frac{f}{e}\alpha^2+\frac{k}{e}\beta$$
$$+\frac{i}{e}\alpha+\frac{l}{c}=0,$$

L'Intégrale aura donc cette forme :

$$z=\varepsilon^{\frac{\left(\frac{b}{e}+\sqrt{\frac{-k}{e}}\right)}{\frac{3g}{2b}-\frac{c}{e}}\left(x+\left(\frac{g}{b}-\frac{c}{e}\right)y\right)-\frac{b}{e}y}\left(F:\left(x+\left(\frac{g}{b}-\frac{c}{e}\right)y\right)\right.$$
$$+f:\left(x-\frac{g}{2b}y\right)+\varepsilon^{\frac{-2\sqrt{\frac{-k}{e}}}{\frac{3g}{2b}-\frac{c}{e}}\left(x+\left(\frac{g}{b}-\frac{c}{e}\right)y\right)}\Sigma:\left(x-\frac{g}{2b}y\right).$$

On peut mettre cette intégrale ſous une autre forme. Dans le coëfficient de F : $\left(x+\left(\frac{g}{b}-\frac{c}{e}\right)y\right)$ on peut faire

$$x+\left(\frac{g}{b}-\frac{c}{e}\right)y=0,$$

ce qui réduit ce coëfficient à $\varepsilon^{-\frac{b}{e}y}$. Dans les coëfficiens de $f:\left(x-\frac{g}{2b}y\right)$ et $\Sigma:\left(x-\frac{g}{2b}y\right)$ on peut faire $x-\frac{g}{2b}=0$, ce qui donne $x=\frac{g}{2b}y$; alors le premier coëfficient devient $\varepsilon^{y\sqrt{\frac{-k}{e}}}$ et le ſecond $\varepsilon^{-y\sqrt{\frac{-k}{e}}}$. L'intégrale aura donc cette forme:

$$z=\varepsilon^{-\frac{b}{e}y}F:\left(x+\left(\frac{g}{b}-\frac{c}{e}\right)y\right)+\varepsilon^{y\sqrt{\frac{-k}{e}}}f:\left(x-\frac{g}{2b}y\right)+\varepsilon^{-y\sqrt{\frac{-k}{e}}}\Sigma:\left(x-\frac{g}{2b}y\right).$$

Au reſte la valeur $i=-km$ donne l'équation de condition $\frac{i}{k}+\frac{g}{b}-\frac{c}{e}=0$.

L'équation de condition en β du troiſiéme dégré ſe réduit à celle-ci, $hk-le=0$.

De

De plus, comme $b = 2m'm'' + m''^2$, on a, en ſubſtituant les valeurs, l'équation de condition

$b = -\left(\frac{g}{b} - \frac{c}{e}\right)\frac{g}{b} + \frac{gg}{4b^2} = \frac{cg}{eb} - \frac{3gg}{4bb}$. De même

$a = -m'm''^2 = \left(\frac{c}{e} - \frac{g}{b}\right)\frac{gg}{4bb} = \frac{cgg}{4bbe} - \frac{g^3}{4b^3}$, $f = \frac{gg}{4b}$.

20. Soit l'équation

$$by^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) + (1 - 2b)y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + (b - 2)y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x}\right) + y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)$$
$$- 3by^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - 2(1 - 2b)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y \partial x}\right) - (b - 2)y^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + 6by\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$+ 2(1 - 2b)y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - 6bz = 0.$$

On a ici

$F = by^3$, $K = (1 - 2b)y^3$, $L = (b - 2)y^3$, $M = y^3$, $N = -3by^2$,
$P = -2(1 - 2b)y^2$, $Q = -(b - 2)y^2$, $R = 6by$, $S = 2(1 - 2b)y$,
$T = -6b$.

La premiere équation nous donnera donc

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3} + \frac{(1 - 2b)}{b}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2} + \frac{(b - 2)}{b}\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} + \frac{1}{b} = 0,$$

ou en faiſant $\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} = u$,

$bu^3 + (1 - 2b)u^2 + (b - 2)u + 1 = 0$, ou
$(bu + 1)(u - 1)^2 = 0$. Ce qui donne
$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} = -\frac{1}{b}$, $\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)} = 1$. Cette derniere équation eſt double.

L'on tire de là les deux équations

$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0$.

La

La premiere équation donne $\Phi' = bx - y$, la ſeconde $\Phi'' = x + y$. La premiere valeur donne $(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}) = b$, $(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}) = -1$. L'équation II donne, en y ſubſtituant ces valeurs, $by(\frac{\partial\Pi'}{\partial y}) + y(\frac{\partial\Pi'}{\partial x}) - b\Pi' = 0$, d'où l'on tire en intégrant $\Pi' = \alpha y$, α étant une conſtante arbitraire. On a de plus $(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}) = 1$, $(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}) = 1$. Les deux premieres équations que fournit l'équation III deviennent identiquement nulles, auſſi bien que la ſeconde équation que fournit l'équation II. L'équation en $\sigma : \Phi'$ donne le coëfficient de $\sigma' : \Phi'$ nul, donc $\sigma'' : \Phi' = 0$, donc $\sigma : \Phi' = \Phi' = bx - y$. L'équation que fournit l'équation IV devient identiquement nulle, en ſorte que l'intégrale est

$$z = y(F:(bx - y) + f:(x+y) + (bx-y)\Sigma:(x+y)) =$$
$$y(F:(bx-y) + f:(x+y) + (bx-y-b(x+y))\Sigma:(x+y)) =$$
$$y(F:(bx-y) + f:(x+y) - (b+1)y\Sigma:(x+y)) =$$
$$y(F:(bx-y) + f:(x+y) + y\Sigma:(x+y)).$$

21. Je remarquerai à cette occaſion, que l'équation que propoſe M. Monge (Mémoires de Turin T. 5. p. 52),

$$z = yF:(bx-y) + yy\Sigma:(x+y),$$

comme l'intégrale d'une équation différentielle du ſecond degré, ne l'est pas réellement, mais eſt une intégrale incomplette d'une équation différentielle du troiſiéme degré, et que pour la rendre complette il faut y ajouter le terme $yf:(x+y)$. Nous pouvons démontrer, par la méthode du § 9, que dans l'intégrale qui réſulte d'une équation du ſecond degré, la quantité Π doit être la même pour les deux fonctions arbitraires. En effet ſoit

$$z = \Pi' F:\Phi' + \Pi'' f:\Phi'', \text{ ſuppoſons } z' = \frac{z}{\Pi'}, \mu = \frac{\Pi''}{\Pi'},$$

on

on aura $z' = F : \Phi' + \mu f : \Phi''$. Différentiant et faiſant

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)},$$

$$\nu = \mu \frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)},$$ on aura

$$z'' = f : \Phi'' + \nu f' : \Phi''.$$

Pour que l'intégrale ſuppoſée conduiſe à une équation différentielle du ſecond degré, il faut qu'on ait

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = 0,$$ ce qui donne

$$\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right) = 0,$$ donc

$$\nu = A : \Phi'' = \mu \frac{\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}.$$ Donc

$$\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\mu} - \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{A : \Phi''}\right) - \left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)}{\mu} - \frac{\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)}{A : \Phi''}\right) = 0,$$

$$l\mu = B : \Phi'' + C : \Phi', \mu = B : \Phi'' \, C : \Phi' = \frac{\Pi''}{\Pi'}, \Pi'' = \Pi' B : \Phi'' \, C : \Phi'',$$

$$z = \Pi' F : \Phi' + \Pi' B : \Phi' \, C : \Phi'' f : \Phi'' = \Pi' F : \Phi' + \Pi' B : \Phi' \times$$

$$\times f : \Phi'' = \Pi' B : \Phi' (F : \Phi' + f : \Phi'') = \Pi' (F : \Phi' + f : \Phi'').$$

Si l'on fait $\nu = 0$, on aura $\Phi' = \Phi''$ et μ reste indéterminé, ce qui donnera $z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi''$. Ce ſont les concluſions que nous avons obtenues dans le Mémoire précédent. L'équation dont il eſt ici queſtion n'étant pas dans ce cas, on ſait déjà *a priori* que cette intégrale ne peut pas conduire à une équation différentielle du ſecond degré. On peut obtenir la même conſéquence *a poſteriori*. Car ſi l'on différencie l'intégrale propoſée par M. Monge, on obtient

tient l'équation différentielle que nous venons de traiter. En effet ſoit $\frac{z}{y} = z'$, on aura, en prenant nos dénominations:

$$z' = F:(bx-y) + y\,\Sigma:(x+y), \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = -F':(bx-y) + \Sigma:(x+y) + y\,\Sigma':(x+y)$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = b\,F':(bx-y) + y\,\Sigma':(x+y). \text{ Soit}$$

$$z'' = b\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right), \text{ on aura}$$

$$z'' = b\,\Sigma:(x+y) + (b+1)\,y\,\Sigma':(x+y). \text{ Donc}$$

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = (2b+1)\,\Sigma':(x+y) + (b+1)\,y\,\Sigma'':(x+y)$$

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) = b\,\Sigma':(x+y) + (b+1)\,y\,\Sigma'':(x+y). \text{ Soit}$$

$$z''' = \left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right), \text{ on aura } z''' = (b+1)\,\Sigma:(x+y). \text{ Donc}$$

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = (b+1)\,\Sigma'':(x+y), \left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = (b+1)\,\Sigma'':(x+x). \text{ Donc}$$

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = 0. \text{ Mais}$$

$$\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\partial y}\right), \left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x^2}\right), \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial y^2}\right) - 2\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x^2}\right) = 0. \text{ Mais}$$

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = b\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x\partial y}\right), \left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) = b\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial y^2}\right) = b\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^3}\right) + \left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^2\partial x}\right), \left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x\partial y}\right) = b\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x^2\partial y}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\partial z''}{\partial x^2}\right) = b\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x^2\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x^3}\right) = 0. \text{ Mais}$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{z}{yy},$$

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) - 2\,\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{yy} + \frac{2z}{y^3},$$

$$\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\,\partial x}\right) - \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{yy},$$

$$\left(\frac{\partial\partial z'}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^3}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) - \frac{3}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) + 6\,\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{y^3} - \frac{6z}{y^4},$$

$$\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y^2\partial x}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}\right) - 2\,\frac{\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\partial x}\right)}{yy} + 2\,\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{y^3},$$

$$\left(\frac{\partial^3 z'}{\partial y\partial x^2}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}\right) - \frac{\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)}{yy}, \left(\frac{\partial^3 z'}{\partial x^3}\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

Donc

Donc

$$\frac{b}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)+\frac{(1-2b)}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right)+\frac{(b-2)}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right)+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)-\frac{3b}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{-2(1-2b)}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y\, \partial x}\right)\frac{-(b-2)}{yy}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+6b\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{y^3}+\frac{2(1-2b)}{y^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{6bz}{y^4}=0,$$

ce qui revient à l'équation que nous avons traitée ci-deſſus.

22. Suppoſons maintenant les trois valeurs Φ', Φ'', Φ''' égales, nous ferons, en ſuivant la méthode du § 9.

$z = \Pi'\ F:\Phi' + \Pi'' f:\Phi' + \Pi'''\ \Sigma:\Phi'$, ou faiſant
$z' = \frac{z}{\Pi'}$, $\mu' = \frac{\Pi''}{\Pi'}$, $\mu'' = \frac{\Pi'''}{\Pi'}$,
$z' = F:\Phi' + \mu' f:\Phi' + \mu''\ \Sigma:\Phi'$, et en différentiant,

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial z}\right) F':\Phi' + \left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right) f:\Phi' + \mu'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) f':\Phi'$$
$$+\left(\frac{\partial \mu''}{\partial x}\right)\Sigma:\Phi' + \mu''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\Sigma':\Phi'$$
$$\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) F':\Phi' + \left(\frac{\partial \mu'}{\partial y}\right) f:\Phi' + \mu'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) f':\Phi'$$
$$+\left(\frac{\partial \mu''}{\partial y}\right)\Sigma:\Phi' + \mu''\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\Sigma':\Phi'.$$

Multipliant la ſeconde équation par $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)$ et la retranchant de la premiere multipliée par $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)$, on aura

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial y}\right)\right) f:\Phi'$$
$$+\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial y}\right)\right)\Sigma:\Phi',$$

ou en faiſant

$$z'' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial y}\right)},$$
$$y' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \mu'}{\partial y}\right)}.$$

$z'' = f:\Phi' + v'\Sigma:\Phi'$. On a enſuite en différentiant

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) f':\Phi' + \left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right)\Sigma:\Phi' + v'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\Sigma':\Phi'$$

$$\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) f':\Phi' + \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)\Sigma:\Phi' + v'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\Sigma':\Phi'.$$

Multipliant la ſeconde équation par $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)$ et la retranchant de la premiere multipliée par $\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)$, on aura

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)\right)\Sigma:\Phi',$$

ou en faiſant

$$z''' = \frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z''}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)},$$

$z''' = \Sigma:\Phi'$. Donc en différentiant

$\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\Sigma':\Phi'$, $\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\Sigma':\Phi'$, donc

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z'''}{\partial y}\right) = 0,$$

équation différentielle du troiſième degré.

23. On parviendra au même réſultat par la méthode du § 3. Les formules de ce § donnent

$$\frac{K}{F} = -3\,\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)},\quad \frac{L}{F} = 3\,\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2},\quad \frac{M}{F} = -\frac{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^3}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^3}.$$

En vertu des formules du § 4. on aura

$$3\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 = 0$$

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + \frac{2L}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \frac{3M}{F}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

On

On a de même

$$3\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0,\quad \frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0.$$

L'équation II du § 2 deviendra donc

$$\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2=0.$$

Maintenant l'équation III ſe reduit à

$$\left(3\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{2N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)\quad(a)$$
$$+\left(\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)$$
$$+\left(\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^3}\right)+\frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y^2\partial x}\right)+\frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial y\partial x^2}\right)+\frac{M}{F}\left(\frac{\partial^3\Phi'}{\partial x^3}\right)+\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{R}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{S}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\right)\Pi=0.$$

Si l'on retranche le coëfficient de $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$ de cette équation, multiplié par $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)$, du coëfficient de Π de l'équation II, lequel eſt $=0$, par ce que nous avons démontré, on aura en ſuppoſant ce coëfficient de $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=0$ et diviſant par $\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)$:

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)-\frac{N}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0.$$

Or puisque

$$\frac{N}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)^2=0,\text{ on a}$$

$$-\frac{N}{F}\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}=\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right).$$

Subſtituant cette valeur, on obtient:

$$\frac{K}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial y^2}\right)+\frac{2L}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x\partial y}\right)+\frac{3M}{F}\left(\frac{\partial\partial\Phi'}{\partial x^2}\right)+\frac{P}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\frac{2Q}{F}\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)=0.$$

Or cette quantité eſt préciſément le coëfficient de $(\frac{\partial \Pi}{\partial x})$. Donc ſi le coëfficient de $(\frac{\partial \Pi}{\partial y})$ eſt $= 0$, le coëfficient de $(\frac{\partial \Pi}{\partial x})$ eſt auſſi $= 0$. Donc en égalant à zéro les coëfficiens de $(\frac{\partial \Pi}{\partial x})$ et $(\frac{\partial \Pi}{\partial y})$, on ne déterminera qu'une ſeule quantité $\frac{P}{F}$. Enſuite le coëfficient de Π de cette même équation III, égalé à zéro, déterminera la quantité $\frac{Q}{F}$. Enfin l'équation IV donnera, en y ſubſtituant les trois valeurs de Π: Π', Π'', Π''', trois équations qui détermineront les quantités $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$, $\frac{T}{F}$. Ainſi la ſuppoſition $z = \Pi' F : \Phi' + \Pi'' f : \Phi' + \Pi''' \Sigma : \Phi'$ ne conduit qu'à une équation différentielle du troiſiéme degré.

24. On procedera encore plus ſimplement, en mettant l'équation ſous la forme: $\frac{z}{\Pi'} = F : \Phi' + \frac{\Pi''}{\Pi'} f : \Phi' + \frac{\Pi'''}{\Pi'} \Sigma : \Phi'$, ou $z' = F : \Phi' + \pi' f : \Phi' + \pi'' \Sigma : \Phi'$, en faiſant $z' = \frac{z}{\Pi'}$, $\pi' = \frac{\Pi''}{\Pi'}$, $\pi'' = \frac{\Pi'''}{\Pi'}$, on aura dans ce cas $\frac{T}{F} = 0$, l'équation

$$\frac{N}{F} (\frac{\partial \Phi'}{\partial y})^2 + \frac{P}{F} (\frac{\partial \Phi'}{\partial y}) (\frac{\partial \Phi'}{\partial x}) + \frac{Q}{F}) (\frac{\partial \Phi'}{\partial x})^2 = 0,$$

déterminera $\frac{N}{F}$. Mettant enſuite dans l'équation (a) du § préc. pour Π ſes deux valeurs π' et π'', on aura deux équations qui détermineront $\frac{P}{F}$ et $\frac{Q}{F}$. Subſtituant enfin dans l'équation IV pour Π ſes deux valeurs π', π'' on aura deux équations qui détermineront $\frac{R}{F}$, $\frac{S}{F}$. Cette intégrale ne conduit donc qu'à une équation du troiſiéme degré, comme nous l'avons trouvé ci-deſſus. Et il eſt aiſé de faire coincider cette méthode avec celle du § préc. Car on a $\Pi'' = \pi' \Pi'$, $\Pi''' = \pi'' \Pi'$. Soit maintenant pour abréger E' le coëfficient de $(\frac{\partial \Pi}{\partial y})$ dans l'équation (a), E'' le coëfficient de $(\frac{\partial \Pi}{\partial x})$

dans

dans la même équation, E''' le coëfficient de Π dans la même équation, cette équation deviendra

$$E'\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)+E'''\,\Pi=0.$$

Cette équation donnera, en y ſubſtituant les trois valeurs Π', Π'', Π''', les trois équations ſuivantes:

$$E'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)+E'''\,\Pi'=0,$$

$$E'\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \Pi''}{\partial x}\right)+E'''\,\Pi''=0,$$

$$E'\left(\frac{\partial \Pi'''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \Pi'''}{\partial x}\right)+E'''\,\Pi'''=0.$$

Subſtituant maintenant pour Π'', Π''' leurs valeurs $\pi'\Pi'$, $\pi''\Pi'$, les deux dernieres équations deviendront:

$$E'\left(\Pi'\left(\frac{\partial \pi'}{\partial y}\right)+\pi'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)\right)+E''\left(\Pi'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)+\pi'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)\right)+E'''\pi'\Pi'=0,$$

$$E'\left(\Pi'\left(\frac{\partial \pi''}{\partial y}\right)+\pi''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)\right)+E''\left(\Pi'\left(\frac{\partial \pi''}{\partial x}\right)+\pi''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)\right)+E'''\pi''\Pi'=0,$$

$$\pi'\left(E'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)+E'''\Pi'\right)+\Pi'\left(E'\left(\frac{\partial \pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \pi'}{\partial x}\right)\right)=0,$$

$$\pi''\left(E'\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right)+E'''\Pi'\right)+\Pi'\left(E'\left(\frac{\partial \pi''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \pi''}{\partial x}\right)\right)=0,$$

ou:

$$E'\left(\frac{\partial \pi'}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \pi'}{\partial x}\right)=0,$$

$$E'\left(\frac{\partial \pi''}{\partial y}\right)+E''\left(\frac{\partial \pi''}{\partial x}\right)=0.$$

Mais nous avons vu § préc. qu'appellant D le coëfficient de Π dans l'équation II, on a $\dfrac{D-E'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)}=E''$. Mais nous avons démontré que $D=0$, donc $E''=-\dfrac{E'\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)}$.

Subſtituant cette valeur on a

$$E'\left(\left(\frac{\partial \pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\right)=0.$$

Si

Si l'on faiſait:

$$\left(\frac{\partial \pi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \pi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = 0,$$

on aurait $\pi' = \sigma : \Phi'$, ou $\pi' = 1$, ce qui ne donnerait plus d'intégrale complette, donc $E' = 0$, et $E'' = 0$, donc $E''' = 0$, donc les ſuppoſitions du § 23 ſont les ſeules légitimes, et l'on peut affirmer en général que ſi les trois valeurs de Φ ſont égales, les équations II, III, du § 2 deviennent identiquement nulles. Il ne reste donc, pour déterminer les trois valeurs de Π, que l'équation IV.

$$\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^3}\right) + \frac{K}{F}\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^2 \partial x}\right) + \frac{L}{F}\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial y \partial x^2}\right) + M\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial x^3}\right) + \frac{N}{F}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial y^2}\right) + \frac{P}{F}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x \partial y}\right)$$
$$+ \frac{Q}{F}\left(\frac{\partial\partial \Pi}{\partial x^2}\right) + \frac{R}{F}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \frac{S}{F}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) + T\,\Pi = 0.$$

Si l'on trouve trois valeurs particulieres de Π dans cette équation, on aura Π', Π'', Π'''. Au reſte on peut regarder dans cette équation Φ' comme conſtant; or Φ' étant une fonction de x et y, on tirera de là la valeur de y en Φ' et x, ou de x en Φ' et y, qu'on ſubſtituera dans l'équation, et l'on n'aura plus à intégrer qu'une équation aux différences ordinaires. Mais ſi l'équation eſt trop compliquée, pour qu'on puiſſe en tirer la valeur de y ou de x, on rencontre alors les mêmes difficultés que nous avons détaillées pour les équations du ſecond degré. Le détail de ces difficultés pour ce cas-ci nous menerait trop loin.

25. Reprenons l'exemple du § 13 et ſuppoſons les trois valeurs de m égales, on aura $\Phi = x + my$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 1$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) = m$, et toutes les autres différentielles égales à zéro. La premiere équation donnera donc $m^3 + \frac{c}{e} m^2 + \frac{b}{e} m + \frac{a}{e} = 0$, et l'égalité des racines donnera $\frac{c}{e} = -3m$, $\frac{b}{e} = 3m^2$ $\frac{a}{e} = -m^3$.

Subſti-

Subſtituant ces valeurs dans l'équation II, on aura $hm^2+gm+f=0$, ce qui donne, à cauſe de l'égalité des racines, $\frac{g}{h}=-2m$, $\frac{f}{h}=m^2$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation III, celle-ci devient $km+i=0$, ce qui donne $\frac{i}{k}=-m$. On tire delà les deux équations de condition $\frac{c}{3e}+\frac{g}{2h}=0$, $\frac{c}{3e}+\frac{i}{k}=0$. Il ne reſte maintenant que l'équation IV en Π du 3e degré. Or comme dans cette équation on peut faire Φ conſtant, ou nul, on peut tirer de là la valeur de x en y, par conſéquent dans cette équation du 3e degré, on peut ſuppoſer x conſtant, pourvu que dans les coëfficiens on ſubſtitue la valeur de x en y, tirée de l'équation $\Phi=$ conſt. Mais comme ici les coëfficiens ſont eux mêmes conſtans, cette ſubſtitution devient inutile. L'équation deviendra donc :

$$\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right)+\frac{h}{e}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+\frac{k}{e}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\frac{l}{e}\,\Pi=0.$$

Les coëfficiens étant conſtans, je fais $\Pi=\varepsilon^{\alpha y}$, α étant une conſtante, et l'équation devient $\alpha^3+\frac{h}{e}\alpha^2+\frac{k}{e}\alpha+\frac{l}{e}=0$. Soyent α', α'', α''' les racines de cette équation, l'intégrale complette ſera :

$$z=\alpha' F:(x-\tfrac{c}{3e}y)+\alpha'' f:(x-\tfrac{c}{3e}y)+\alpha'''\Sigma:(x-\tfrac{c}{3e}y).$$

26. Soit l'équation

$$y^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)+3xy^2\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}\right)+3x^2y\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}\right)+x^3\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)+hy^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+2hxy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)+hx^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)+iy\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+ix\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+kz=0.$$

Nous avons ici $F=y^3$, $K=3xy^2$, $L=3x^2y$, $M=x^3$, $N=hy^2$, $P=2hxy$, $Q=hx^2$, $R=iy$, $S=ix$, $T=k$.

L'équa-

L'équation I donnera donc

$$y^3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3+3xy^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+3x^2y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+x^3\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3=0.$$

ou

$$\left(y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)^3=0,\quad\text{donc}$$

$$y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=0.$$

Il s'agit donc d'intégrer l'équation $y\partial y-x\partial y=0$, ce qui donne $\Phi=\frac{x}{y}$, donc

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{1}{y},\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=-\frac{x}{yy},\ \left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)=-\frac{1}{yy},\ \left(\frac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)=\frac{2x}{y^3},\ \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}\right)=0,\ \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}\right)=\frac{2}{y^3},\ \left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right)=-\frac{6x}{y^4}.$$

Ces valeurs rendent identiques les deux équations en Π des ſecondes et troiſiemes degrés. Il ne reſtera que l'équation du 3e degré, laquelle, en ſuppoſant $x=0$, deviendra

$$y^3\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right)+hy^2\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+iy\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+K\Pi=0.$$

Faiſant $\Pi=y^n$, on aura

$$n(n-1)(n-2)y^n+hn(n-1)y^n+iny^n+ky^n=0,$$

ou en diviſant par y^n,

$$n(n-1)\,n-2)+hn(n-1)+in+k=0.$$

Soyent n', n'', n''' les racines de cette équation, l'intégrale complette ſera: $z=x^{n'}F:\frac{x}{y}+x^{n''}f:\frac{x}{y}+x^{n'''}\Sigma:\frac{x}{y}$.

27. Si dans l'exemple du § 13, on fait $h=g=f=k=i=l=0$, ce qui eſt le cas que traite M. Euler (Calc. Int. T. 3 p. 383), on aura § 21 $\Pi=0$, et les équations de condition deviendront identiquement nulles. Donc

$$z=F:(x+m'y)+f:(x+m''y)+\Sigma:(x+m'''y).$$

S'il

S'il y a deux racines égales, on a alors, en reprenant le procédé du § 26.

$$\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial y}\right) - m' \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x}\right) = 0, \text{ et } \beta - m'\alpha = 0, \text{ donc } \beta = m'\alpha.$$

L'on aura enſuite

$$\left(3m'' + \frac{c}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{2c}{e} m'' + \frac{2b}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{b}{e} m'' + \frac{3a}{e}\right)\left(\frac{\partial\partial \Pi'}{\partial x^2}\right) = 0,$$

ou $\beta^2 - 2m''\alpha\beta + m''^2\alpha^2 = 0$, ou $(\beta - m''\alpha)^2 = 0$, ou $\beta = m''\alpha$. Donc puiſque m'' eſt différent de m', $\alpha = \beta = 0$, $\Pi' = 1$, l'équation qui détermine $\sigma : \Phi'$ donnera $(m' - m'')^2 \sigma'' : \Phi' = 0$, donc $\sigma'' : \Phi' = 0$, $\sigma' : \Phi' = A$, $\sigma : \Phi' = A\Phi' + B$, A et B étant des conſtantes arbitraires. L'intégrale ſera donc

$$z = F : (x + m'y) + f : (x + m''y) + (A\Phi' + B)\, \Sigma : (x + m''y).$$

Les équations de condition deviennent identiquement nulles. Si les trois racines ſont égales, en ſuivant le procédé du § 27, l'équation ſe reduit à $\left(\frac{\partial^3 \Pi}{\partial y^3}\right) = 0$, ce qui donne $\Pi' = 1$, $\Pi'' = y$, $\Pi''' = y^2$, l'intégrale ſera donc

$$z = F : \left(x - \frac{c}{3e} y\right) + y f : \left(x - \frac{c}{3e} y\right) + y^2\, \Sigma : \left(x - \frac{c}{3e} y\right).$$

28. Soit l'équation

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right) - \frac{3y^2}{x^2}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right) + \frac{3y^4}{x^4}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right) - \frac{y^6}{x^6}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{6}{y} + \frac{3y^2}{x^3}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$$
$$+ \frac{6y}{x^2}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) + \frac{3y^6}{x^7}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{10}{y^2} + \frac{2y^4}{x^6} + \frac{6y}{x^3}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{6y^6}{x^8}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{6y^6}{x^9} z = 0.$$

on aura d'abord à réſoudre l'équation du 3[e] degré,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^3 - \frac{3y^2}{x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{3y^4}{x^4}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{y^6}{x^6}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^3 = 0,$$

qui ſe reduit à

$$\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\right)^3 = 0, \text{ ou}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) - \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = 0,$$

ce qui donne la valeur triple $\Phi = x^3 + y^3$. Voilà ce que

donne l'équation I du § 2. Les équations II et III deviennent identiquement nulles. L'équation IV revient à l'équation propoſée, pourvu qu'on y mette Π au lieu de z. Dans cette équation on peut faire $x^3 + y^3$ conſtant ou nul. On peut donc ne ſuppoſer Π variable que relativement à x, pourvu qu'on ſubſtitue dans l'équation qui reſtera, la valeur de y en x. L'équation ſera donc

$$-\frac{y^6}{x^6}\left(\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) + \frac{3y^6}{x^3}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) - \frac{6y^6}{x^8}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \frac{6y^6}{x^9}\,\Pi = 0\text{, ou}$$

$$\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^3} - \frac{3}{x}\,\frac{\partial^3\Pi}{\partial x^2} + \frac{6}{x^2}\,\frac{\partial\Pi}{\partial x} - \frac{6}{x^3}\,\Pi = 0.$$

Je fais $\Pi = \alpha x^n$, et ſubſtituant les valeurs, α diſparaît et j'ai $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 - 0$, d'où l'on tire $n = 1, n = 2, n = 3$, ce qui donne les trois valeurs $\Pi = x$, $\Pi = x^2$, $= x^3$. L'Intégrale ſera donc

$$z = x\,F:(x^3+y^3) + x^2 f:(x^3+y^3) + x^3\,\Sigma:(x^3+y^3).$$

29. Il faudrait paſſer à préſent à la forme $z = \Pi' F:\Phi + \Pi F':\Phi$, et la méthode générale d'intégration employée dans ce Mémoire ſubſiſterait toujours, c'eſt à dire qu'on trouverait d'abord Π en intégrant auſſi une équation du premier degré, dans laquelle on aurait ſubſtitué la valeur de Π. Enſuite les autres équations fourniraient des équations de condition, qui devraient avoir lieu, pour que l'intégrale ſatisfît. Mais il eſt bon de s'aſſurer *a priori* de la poſſibilité de cette forme, parceque ſi elle n'était pas poſſible, la méthode ſerait néceſſairement illuſoire. Pour cela je mets l'intégrale ſous cette forme: $z' = F:\Phi + \Pi F':\Phi$, et j'obtiendrai, en différentiant comme dans le § 1, la même équation différentielle du troiſiéme dégré que dans le § 2, à cela près

près que $T = 0$, parce que $\Pi' = 1$, et les quatre équations de condition ſuivantes:

$$\text{I.}\ F\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^3 + K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + M\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3 = 0;$$

$$\begin{aligned}\text{II.}\ &\left(3F\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + 2K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right.\\
&\left.+ 2L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + 3M\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(3F\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\right.\\
&+ 2K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) + K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&+ L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 3M\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + N\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + P\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\\
&\left.+ Q\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right)\Pi = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{III.}\ &\left(3F\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \left(2K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)\\
&+ \left(L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 3M\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + \left(3F\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)\right.\\
&\left.+ L\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 2N\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + P\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \left(K\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2L\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)\right.\\
&\left.+ 3M\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + P\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + 2Q\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \left(F\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) + K\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial x\,\partial y^2}\right)\right.\\
&+ L\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y}\right) + M\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right) + N\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + P\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) + Q\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right)\\
&\left.+ R\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + S\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right)\Pi\\
&+ 3F\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right) + 2K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) + K\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\\
&+ 2L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) + L\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + 3M\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + N\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\\
&+ P\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Q\left(\tfrac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{IV.}\ &F\left(\tfrac{\partial^3\Pi}{\partial y^3}\right) + K\left(\tfrac{\partial^3\Pi}{\partial x\,\partial y^2}\right) + L\left(\tfrac{\partial^3\Pi}{\partial x^2\,\partial y}\right) + M\left(\tfrac{\partial^3\Pi}{\partial x^3}\right) + N\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)\\
&+ P\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + Q\left(\tfrac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) + R\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + S\left(\tfrac{\partial\Pi}{\partial x}\right)\\
&+ F\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}\right) + K\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial y^2\,\partial x}\right) + L\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial y\,\partial x^2}\right) + M\left(\tfrac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right) + N\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial y^2}\right)\\
&+ P\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x\,\partial y}\right) + Q\left(\tfrac{\partial\partial\Phi}{\partial x^2}\right) + R\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = 0.\end{aligned}$$

 Subſti-

Subſtituant dans l'équation III les trois valeurs Φ', Φ'', Φ''', on obtiendra les trois équations ſuivantes:

$$a'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+b'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)+c'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+e'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+f'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+g'\Pi+A'=0,$$

$$a''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+b''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)+c''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+e''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+f''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+g''\Pi+A''=0,$$

$$a'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+b'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)+c'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+e'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+f'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+g'''\Pi$$
$$+A'''=0;$$

en prenant pour a', b', etc. les coëfficiens reſpectifs tels qu'ils réſultent de l'équation générale. On tire de là en éliminant,

$$(a''b'-a'b'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)+(a''c'-a'c'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+(a''e'-a'e'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+(a''f'-a'f''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(a''g'-a'g'')\Pi+a''A'-a'A''=0;$$

$$(a'''b'-a'b''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)+(a'''c'-a'c''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+a'''e'-a'e'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+(a'''f'-a'f''')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+(a''\,g'-a'g''')\Pi+a'''A'-$$
$$a'A'''=0,$$ ou

$$\alpha'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)+\beta'\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+\gamma'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\delta'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\varepsilon'\Pi+\zeta'=0$$

$$\alpha''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)+\beta''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right)+\gamma''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+\delta''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)+\varepsilon''\Pi+\zeta''=0 \quad (u)$$

en prenant pour α', α'', etc. les coëfficiens reſpectifs des deux équations précédentes. On tire delà en éliminant

$$(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)+(\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)+(\alpha''\delta'-\alpha'\delta'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)$$
$$+(\alpha''\varepsilon'-\alpha'\varepsilon'')\Pi+\alpha''\zeta'-\alpha'\zeta''=0 \quad (b).$$

Mais on a en vertu du § 12

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)}{\Pi}=\frac{A'u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2b}+\frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2c}, \text{ ou } \left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)=M'\cdot\Pi,$$

en faiſant

$$M'=\frac{A'u\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)}{a^2b}+\frac{A''u\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)}{a^2c},$$

donc

donc

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x^2}\right) = M'\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \Pi\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right) = M' M'\Pi + \Pi\left(\frac{\partial M'}{\partial x}\right).$$

On aura par le même §,

$$\frac{\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)}{\Pi} = -\frac{A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)u}{a^2b} + \frac{A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)u}{a^2c}, \text{ ou } \left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) = M''\Pi$$

en faiſant

$$M'' = -\frac{A'\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)u}{a^2b} + \frac{A''\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)u}{a^2c}, \text{ donc}$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) = M''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right) = M''^2\,\Pi + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial x}\right);$$

$$\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) = M''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial y}\right) = M''^2\,\Pi + \Pi\left(\frac{\partial M''}{\partial y}\right).$$

Pour que la valeur de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$, qu'on vient de trouver, s'accorde avec celle de l'équation (b), il faut que l'on ait $\alpha''\zeta' - \alpha'\zeta'' = 0$. Mais $\alpha'' = a'''b' - a'b'''$, $\alpha' = a''b' - a'b''$, $\zeta'' = a'''A' - a'A'''$, $\zeta' = a''A' - a'A''$. Donc

$$(a'''b' - a'b''')(a''A' - a'A'') - (a''b - a'b'')(a'''A' - a'A''') = 0;$$

ou en développant et reduiſant

$$(a'''b'' - a''b''')A' + (a'b'' - a'''b')A'' + (a''b' - a'b'')A''' = 0.$$

Mais

$$a' = 3F\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial z}\right),$$

$$a'' = 3F\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right),$$

$$a''' = 3F\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right),$$

$$b' = 2K\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right),$$

$$b'' = 2K\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right),$$

$$b''' = 2K\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + 2L\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right).$$

Subſti-

Subſtituant ces valeurs et diviſant toute l'équation par $2KK - 6FL$, on a

$cA' - bA'' + aA''' = 0$, mais l'on a par le § 12

$c^2 A' + b^2 A'' + a^2 A''' = 0$, donc

$A'' = \frac{c(a-c)}{b(a+b)} A'$, $A''' = -\frac{c(b+c)}{a(a+b)} A'$.

Nous aurons donc en ſubſtituant ces valeurs dans les équations de la fin du § 4,

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = \frac{A' \Pi u}{ab},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = -\frac{A' \Pi (a-c) u}{ab(a+b)},$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = -\frac{A' (b+c) u}{ab(a+b)}.$$

Donc ſubſtituant dans les deux dernieres équations la valeur de $\frac{A \Pi u}{ab}$, tirée de la premiere, on aura les deux équations ſuivantes:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{a+b}{a-c}\right) = 0 \\ \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) + \left(\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{a+b}{b+c}\right) = 0\end{array}\right\}(1)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}\left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{a+b}{a-c}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{a+b}{a-c}\right)\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = 0 \\ \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left(\frac{a+b}{a-c}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) + \left(\frac{a+b}{a-c}\right)\left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = 0\end{array}\right\}(2)$$

Retranchant la ſeconde équation de la premiere et diviſant par $\frac{a+b}{a-c}$, on a

$$\left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) - 0,$$

équation dont l'intégrale eſt $\Pi = \sigma : (\Phi'' - \Phi''')$. Donc

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial x}\right)\right) \sigma' : (\Phi'' - \Phi'''),$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right) = \left(\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \Phi'''}{\partial y}\right)\right) \sigma' : (\Phi'' - \Phi''').$$

Subſti-

Subſtituant ces valeurs dans les équations (1) on aura;

$$(a-b)\,\sigma':(\Phi''-\Phi''')-\frac{c(a+b)}{a-c}\,\sigma':(\Phi''-\Phi''')=0,\text{ ou}$$

$$a-b-\frac{c(a+b)}{a-c}=0,\text{ ce qui donne}$$

$$a-b-2c=0,\text{ ou } c=\frac{a-b}{2},\text{ donc }\frac{a+b}{a-}=2.$$

Les équations (2) deviennent donc

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+2\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=0,$$

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+2\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+2\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=0.\quad\text{Donc}$$

$$\Pi=\varrho:(\Phi'+2\Phi'')=\tau:(\Phi'+2\Phi'''),\text{ donc}$$

$$\Phi'+2\Phi'''=\mu:(\Phi'+2\Phi'')\text{ et }\Phi'''=\frac{\mu:(\Phi'+2\Phi'')-\Phi'}{2},\text{ donc}$$

$$\Phi''-\Phi'''=\frac{\Phi'+2\Phi''-\mu:(\Phi'+2\Phi'')}{2}=\nu:(\Phi'+2\Phi''),\text{ donc}$$

$$\Pi=\sigma:(\Phi''-\Phi''')=\varrho:(\Phi'+2\Phi''),$$

comme cela doit être. Nous avons maintenant, en combinant entre elles les trois équations du § 4, l'équation ſuivante:

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=$$
$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)}{abc}(A'c-A''b+A'''a).$$

Mais nous avons trouvé ci-deſſus $A'c-A''b+A'''a=0$, donc

$$\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right)-\left(\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)=0,$$

ce qui donne $\Pi=\sigma:(\Phi'+\Phi''+\Phi''')$. Mais nous venons de trouver $\Pi=\varrho:(\Phi'+2\Phi'')$, d'où l'on tire $\Phi'''=\Phi''$, c'eſt à dire $\mu(\Phi'+2\Phi'')=\Phi'+2\Phi''$. On ne peut donc trouver une Intégrale complette par le moyen de cette forme, puisque la troiſième fonction arbitraire disparaît et ſe reduit à la ſeconde.

30. Au

30. Au reſte, on parvient à la même équation $A'c - A''b + A'''a = 0$, en cherchant les valeurs de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$ et de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$. En effet on tire des équations (u)

$$(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + (\beta''\gamma' - \beta'\gamma'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ (\beta''\delta' - \beta'\delta'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + (\beta''\varepsilon' - \beta'\varepsilon'')\Pi + \beta''\zeta' - \beta'\zeta'' = 0.$$

Comparant la valeur de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right)$, qui réſulte de cette équation, avec celle que nous avons obtenue ci-deſſus, on en conclura que $\beta''\zeta' - \beta'\zeta'' = 0$. Or

$$\beta' = a''c' - a'c'',\quad \beta'' = a'''c' - a'c''',\ \text{donc}$$
$$(a'''c' - a'c''')(a''A' - a'A'') - (a''c' - a'c'')(a'''A' - a'A''') = 0,$$

ou en développant et reduiſant

$$(c''a''' - c'''a'')A' + (a'c''' - a'''c')A'' + (a''c' - a'c'')A''' = 0.$$

Mais

$$c' = L\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial x}\right),$$
$$c'' = L\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi''}{\partial x}\right),$$
$$c''' = L\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial y}\right) + 3M\left(\frac{\partial\Phi'''}{\partial x}\right).$$

Subſtituant ces valeurs et diviſant toute l'équation par $LK - 9FM$, on obtient $cA' - bA'' + aA''' = 0$, comme ci-deſſus. Pour avoir maintenant $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$, on reprendra les équations (t), desquelles on tirera

$$(c''a' - c'a'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (c''b' - c'b'')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + (c''e' - c'e'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ (c''f' - c'f'')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + (c'' - c')g'\Pi + c''A' - c'A'' = 0;$$
$$(c'''a' - c'a''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (c'''b' - c'b''')\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + (c'''e' - c'e''')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ (c'''f' - c'f''')\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + (c''' - c')g'\Pi + c'''A' - c'A''' = 0;$$
$$\alpha'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \beta'''\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + \gamma'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \delta'''\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \varepsilon'''\Pi + \zeta''' = 0;$$
$$\alpha^{IV}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + \beta^{IV}\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial x\,\partial y}\right) + \gamma^{IV}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \delta^{IV}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + \varepsilon^{IV}\Pi + \zeta^{IV} = 0;$$

en

en prenant pour α''', α^{IV} etc. les coëfficiens reſpectifs des deux équations précédentes. On tire de là en éliminant

$$(\beta^{IV}\alpha''' - \beta'''\alpha^{IV})\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right) + (\beta^{IV}\gamma''' - \beta'''\gamma^{IV})\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)$$
$$+ (\beta^{IV}\delta''' - \beta'''\delta^{IV})\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\right) + (\beta^{IV}\varepsilon''' - \beta'''\varepsilon^{IV})\,\Pi$$
$$+ \beta^{IV}\zeta''' - \beta'''\zeta^{IV} = 0.$$

Comparant la valeur de $\left(\frac{\partial\partial\Pi}{\partial y^2}\right)$, qui réſulte de cette équation, avec celle que nous avons obtenue ci-deſſus, on obtient $\beta^{IV}\zeta''' - \beta'''\zeta^{IV} = 0$. Or $\beta''' = c''b' - c'b''$, $\beta^{IV} = c'''b' - c'b'''$, $\zeta''' = c''A' - c'A''$, $\zeta^{IV} = c'''A' - c'A'''$, donc

$$(c'''b' - c'b''')(c''A' - c'A'') - (c''b' - c'b'')(c'''A' - c'A''') = 0,$$

ou en développant et reduiſant:

$$(c'''b'' - c''b''')A' + (c'b''' - c'''b')(A'' + c''b' - c'b'')A''' = 0.$$

Subſtituant les valeurs et diviſant par $LL - 6KM$, on a $cA' - bA'' + aA''' = 0$, comme ci-deſſus.

ESSAI
DE DÉMONTRER RIGOUREUSEMENT
UN THÉOREME FONDAMENTAL
DES ÉQUATIONS DE CONDITION DE LA DIFFÉRENTIELLE DES FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES, ET DU CALCUL DES VARIATIONS.

PAR

S. GOURIEF.

Préſenté à l'Académie le 20. Juillet 1797.

Après avoir entrepris de démontrer le calcul différentiel dans toute la rigueur mathématique, ſans le ſecours des quantités infiniment grandes et infiniment petites, en ne faiſant uſage que d'accroiſſemens et décroiſſemens *indéfinis*, tels qu'admettoient les Géomètres anciens, et que le plus faible eſprit peut ſaiſir auſſi facilement que le plus grand génie: il étoit naturel que je portaſſe mon attention ſur les équations de condition de la différentielle exacte des fonctions à deux et plusieurs variables, et ſur le calcul des variations. Et comme j'ai remarqué dans les livres nouvellement mis au jour, que les Géomètres du premier rang commencent déjà à rejetter les infinis, j'ai cru que le préſent mémoire pourrait auſſi contribuer quelque choſe à en dégager de plus en plus les Mathématiques.

I.

I. Des équations de condition de la différentielle exacte.

Soit z une fonction dont la différentielle eſt $M\partial y + N\partial x$, Π la quantité en laquelle ſe change z, en mettant $y + \Delta y$ pour y, Λ ce que devient z, en mettant $x + \Delta x$ au lieu de x, et enfin Z ce que devient z quand on ſubſtitue $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$ au lieu de x et de y; alors $\Pi - z$ ſera la différence de la fonction z, priſe par rapport à y, et $\Lambda - z$ ſera la différence de la même fonction z, priſe par rapport à x. Suppoſons $\Pi - z\ (= \Delta z) = P$ et $\Lambda - z\ (= \Delta z) = Q$ et prenons les différences de $\Pi - z$ par rapport à x et de $\Lambda - z$ par rapport à y; pour cela dans $\Pi - z$ mettons $x + \Delta x$ au lieu de x, et du réſultat ſouſtrayons $\Pi - z$; de même dans $\Lambda - z$ mettons $y + \Delta y$ au lieu de y, et du réſultat ſouſtrayons $\Lambda - z$; nous aurons $Z - \Lambda - \Pi + z = \Delta P$ et $Z - \Pi - \Lambda + z = \Delta Q$, et de cette maniere ΔP ſera $=$ à ΔQ, c'eſt-à-dire, quand d'une fonction z à deux variables y et x on prend ſéparément les différences finies P et Q par rapport à y et par rapport à x, et puis les autres différences de P par rapport à x et de Q par rapport à y, ces deux dernieres différences ΔP et ΔQ ſont toujours égales entr'elles.

Cette propriété, autant que je ſache, n'a pas encore été remarquée dans les différences finies, et nous donne l'eſpérance d'intégrer les équations aux différences finies par le moyen de multiplicateurs convenables. Prenons l'équation $\Delta P = \Delta Q$ et diviſons ſes termes par le produit $\Delta y \Delta x$; nous aurons $\frac{\Delta P}{\Delta y \Delta x} = \frac{\Delta Q}{\Delta y \Delta x}$ et $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$. Car on prend la différence de P par rapport à x et la différence de Q par rapport à y ſeulement, de manière que dans le

premier cas Δy et dans le ſecond cas Δx peuvent être regardés comme des quantités conſtantes.

Cela poſé, commençons par diminuer la différence Δy, en la diviſant ſucceſſivement en deux parties égales; alors d'après ce qui a été dit dans mes Principes de Géométrie tranſcendante, le rapport $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ ſera la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ et le rapport $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$ la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$. Car 1°). quand dans le cas de la différentielle de la fonction z par rapport à une variable, on a $\partial z = M\partial y$ et $\frac{\partial z}{\partial y} = M$, alors la limite du rapport $\frac{P}{\Delta y}$ $(=\frac{\Delta z}{\Delta y})$ eſt M, parceque $\frac{\partial z}{\partial y}$ eſt l'expreſſion de la limite du rapport $\frac{\Delta z}{\Delta y}$; puis en vertu d'une des XII vérités ſecondaires de la méthode des limites, la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ ſera $\frac{\Delta M}{\Delta x}$. 2°). Puisque on diminue ſeulement Δy, et qu'on prend la différence de $\frac{Q}{\Delta x}$ ſeulement par rapport à y, on pourra regarder x et Δx comme des quantités conſtantes, et $\frac{Q}{\Delta x}$ comme fonction ſeulement de y; donc la limite du rapport $\frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$ ſera $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$. Ainſi deux quantités $\frac{\Delta\left(\frac{P}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\Delta y}$, qui ſont toujours égales entr'elles, ont deux limites $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ et $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$, donc par la premiere vérité fondamentale de la méthode des limites, on aura $\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$.

Ayant obtenu cette égalité commençons à diminuer Δx de la même maniere; alors la limite du rapport $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ ſera

ſera $\frac{\partial M}{\partial x}$, et la limite du rapport $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$ ſera le rapport $\frac{\partial N}{\partial y}$. Car 1°) Puisqu'on prend la différence de M ſeulement par rapport à x, on peut regarder M comme fonction de la ſeule quantité x, et ainſi, par ce qui a été dit dans mes Principes de Géométrie tranſcendante, la limite du rapport $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ ſera $\frac{\partial M}{\partial x}$. 2°) Puiſque $\partial z = N\partial x$ et $\frac{\partial z}{\partial x} = N$, ſi on prend la différentielle de z ſeulement par rapport à x, la limite du rapport $\frac{Q}{\Delta x}$ $(= \frac{\Delta z}{\Delta x})$ eſt N, et $\frac{\partial N}{\partial y}$ ſera la limite du rapport $\frac{\partial \frac{Q}{\Delta x}}{\partial y}$; car d'aprés les XII vérités ſecondaires de la méthode des limites on voit que ſi on fait une opération ſur une quantité qui augmente ou diminue et qui a une limite, le réſultat de cette opération a pour limite le réſultat de la même opération faite ſur la limite de cette quantité qui augmente ou diminue. Ainſi deux grandeurs $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ et $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$, toujours égales entr'elles, ont deux limites $\frac{\partial M}{\partial x}$ et $\frac{\partial N}{\partial y}$; par conſéquent en vertu de la premiere vérité fondamentale de la méthode des limites, ces limites $\frac{\partial M}{\partial x}$ et $\frac{\partial N}{\partial y}$ ſont égales entr'elles.

Peut-être on ne ſera pas content de la démonſtration que j'ai donné ſur ce que le rapport $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$ ait pour limite $\frac{\partial N}{\partial y}$ ainſi pour ne laiſſer aucun doute, je préſenterai une autre démonſtration plus rigoureuſe de la même vérité.

Suppoſons $\frac{Q}{\Delta x} - N = u$, dans le cas où $\frac{Q}{\Delta x}$ diminue, et $N - \frac{Q}{\Delta x} = u$, dans le cas où $\frac{Q}{\Delta x}$ augmente; on aura $\frac{\partial\left(\frac{Q}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$; je dis que le rapport $\frac{\partial u}{\partial y}$, par la diminution

tion de Δx, peut devenir plus petit que chaque quantité donnée. Car puiſque u eſt la différence entre $\frac{Q}{\Delta x}$ et N, qui ſont des fonctions de y, u eſt auſſi une fonction de y, et par conſéquent elle repréſente quelque courbe dont l'arc pris d'un point quelconque, eſt ou concave ou convexe: 1°) Suppoſons qu'il ſoit concave, comme l'arc BC, et ſoit le point A l'origine des abſciſſes, de manière que $AP = y$, $PM = u$, $Ap = y'$ et $pC = u'$; ayant pris ſur l'axe le point N correſpondant à l'origine de l'arc BC, faiſons le rapport $\frac{EP}{NP}$ plus petit qu'une quantité donnée D, et menant NEQ, diminuons PM ($= u$) et pC ($= u'$) par la biſection ſucceſſive de Δx, deſorte que u ſoit plus petit que PE, et u' plus petit que pQ; ce qui eſt toujours poſſible, puisque u eſt la différence entre la quantité croiſſante ou décroiſſante $\frac{Q}{\Delta x}$ et ſa limite N; d'après cela la courbe BMC prendra la poſition bmc et coupera dans quelque point e la droite NEQ, parceque le point b ne peut jamais tomber ſur le point N. Enſuite tirez par le point m la droite nmq, parallèlement à NEQ; cette droite paſſant au deſſus du prolongement de la droite qui unit les points e et m, ira audeſſus de la tangente mr de l'arc bmc dans le point m; donc le rapport $\frac{ro}{mo}$ des cathètes de la tangente, lequel, d'après la notation que nous avons priſe dans les principes de la Géometrie tranſcendante, doit être repréſenté par $\frac{\partial u}{\partial y}$, ſera plus petit que le rapport $\frac{qo}{mo}$; mais ce dernier eſt égal à $\frac{PE}{NP}$, c'eſt-à-dire égal à un rapport qui eſt plus petit qu'une quantité donnée D; donc etc.

Tab. I. Fig. 4.

Tab. I. Fig. 5. 2°) Soit l'arc convexe, comme BC, et ſoit le point A l'origine des abſciſſes, de manière que $AP = y$, $PM = u$, Ap

$Ap = y'$ et $pC = u'$; faites au point P le rapport $\frac{Qp}{Pp}$ plus petit que la quantité donnée D, et diminuez pC ($= u'$), deſorte que u ſoit plus petit que pQ; d'après cela la courbe BMC prendra la poſition bmc, et coupera la droite PQ dans un certain point e, parceque le point m ne peut jamais ſe confondre avec le point P. Par le point m menez la droite mq parallèlement à PQ; cette droite paſſant au deſſus de la droite qui unit les points m et e, et par conſéquent auſſi au deſſus de l'arc me, paſſera au deſſus de la tangente mr de l'arc bmc au point m; donc le le rapport $\frac{ro}{mo}$ des cathètes de la tangente, lequel, par la notation que nous avons citée, eſt exprimé ici par $\frac{\partial u}{\partial y}$, ſera plus petit que le rapport $\frac{qo}{mo}$ ($= \frac{Qp}{Pp}$), et par conſéquent, à plus forte raiſon, plus petit que la quantité donnée D.

Dans ces deux cas nous avons ſuppoſé que les ordonnées ſoyent croiſſantes; mais d'après cette expoſition chacun pourra facilement déduire la même choſe pour le cas où les ordonnées ſont décroiſſantes.

Ainſi la différence entre les rapports $\frac{\partial \left(\frac{Q}{\Delta x}\right)}{\partial y}$ et $\frac{\partial N}{\partial x}$ peut être faite plus petite que chaque grandeur donnée, et puisque le premier rapport $\frac{\partial \left(\frac{Q}{\Delta y}\right)}{\partial y}$ croît ou décroît, et que l'autre eſt toujours conſtant, ce ſecond rapport eſt la limite du premier. C. Q. F. D.

Corollaire I.

La condition de la différentielle exacte $M\partial y + N\partial x$ de la fonction z à deux variables y et x, conſiſte donc en ce

ce que la différentielle de M priſe par rapport à x et diviſée par ∂x eſt égale à la différentielle de N priſe par rapport à y et diviſée par ∂y. Soit $dM = m\partial x$. $dN = n\partial y$, la condition de la différentielle exacte $M\partial y + N\partial x$ de la fonction z ſera contenue dans l'équation $m = n$.

Corollaire 2.

Que ſi la fonction z étoit une fonction à trois variables, c'eſt-à-dire ſi au lieu de deux termes la différentielle exacte de la fonction z avoit les trois termes $M\partial y + N\partial x + P\partial u$; alors on aura: 1°) le coëfficient m de ∂x dans la différentielle de M égal au coëfficient n de ∂y dans la différentielle de N; 2°) le coëfficient m' de ∂u dans la différentielle de M égal au coëfficient p de ∂y dans la différentielle de P; et enfin 3°) le coëfficient n' de ∂u dans la différentielle de N égal au coëfficient p' de ∂x dans la différentielle de P. En effet, puisque $M\partial y + N\partial x$ eſt la différentielle exacte de la fonction par rapport aux deux grandeurs variables y et x, par ce qui a été dit ci-deſſus, on aura $m = n$; de même quand dans l'expreſſion $M\partial y + N\partial x + P\partial u$ les deux termes $M\partial y + P\partial u$ forment la différentielle exacte de la fonction z de deux variables y et u, il doit être $m' = p$; et enfin par la même raiſon on aura $n' = p'$.

Corollaire 3.

En général on aura autant de ces équations de condition que les termes de la différentielle exacte pourront être combinés de fois deux à deux.

En

En admettant la notation de M. Fontaine, nous aurons, au lieu de $\partial z = M \partial y + N \partial x$, l'expreſſion ſuivante:

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial y} \partial y + \frac{\partial z}{\partial x} \partial x;$$ d'où il réſulte

$$\partial . \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \partial x;$$

$$\partial . \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \partial x;$$

et ainſi de ſuite.

Par le moyen de cette notation les équations de condition de ces différentielles ſeront exprimées de la maniere ſuivante:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} \left(= \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial z} \left(= \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}\right);$$

et ainſi de ſuite.

II. CALCUL DES VARIATIONS.

Soit β une fonction des variables y, x, leſquelles ſoyent des fonctions de z et de la grandeur conſtante a; il eſt clair que quand on donnera à a un changement quelconque, alors x, y auſſi bien que β ſe changeront, mais z reſtera conſtant. Suppoſons que d'un changement quelconque de a les fonctions x, y et β ſe changent en X, Y et B, alors les différences $X - x$, $Y - y$ et $B - \beta$ ſont ce que nous appellons *les différences de variation*; et pour les déſigner brièvement, nous prendrons la lettre majuſcule latine D, en l'écrivant au devant des fonctions x, y et β, pour les

diſtinguer des différences ordinaires que nous ſommes convenus de déſigner par la lettre majuſcule Grecque Δ, miſe au devant de ces fonctions Ainſi $X - x$, $Y - y$ et $B - \beta$ feront déſignées par Dx, Dy et $D\beta$.

Cela poſé, je dis que la différence de la variation priſe de la différence d'une fonction quelconque eſt égale à la différence priſe de la différence de la variation.

Démonſtration.

Soit y la fonction donnée, Y ce que devient y en vertu du changement attribué à la quantité a, y' ce que devient y en vertu de l'incrément que prend la variable z et enfin Y' ce que devient y' en vertu du changement attribué à la grandeur a; on aura $Y = y + Dy$, $y' = y + \Delta y$ et $Y' = y' + Dy$, et puisque Y en vertu de l'incrément que prend z dans le même changement de a, doit auſſi devenir Y', on aura $Y' = Y + \Delta Y$, et par conſéquent $y' + Dy' = Y + \Delta Y$; mettez au lieu de y' et Y leurs grandeurs, vous aurez $y + \Delta y + D(y + \Delta y) = y + Dy + \Delta(y + Dy)$ et enfin $D\Delta y = \Delta Dy$. C. Q. F. D.

Il eſt clair que tout cela n'eſt autre choſe qu'une répétition exacte de ce que nous avons dit dans le premier article ſur les différences finies.

Puiſque en attribuant un changement à la grandeur conſtante a, nous lui attribuons une variabilité, on peut ici regarder a comme une grandeur variable; pour cela on peut prendre les différentielles des fonctions β, y et x par rapport à a, comme par rapport à z, et ces différentielles

priſes

priſes par rapport à a ſont ce que nous appellons *variations des fonctions* β, y et x; et pour les déſigner nous prendrons la lettre minuſcule Greque pour δ, pour les diſtinguer des différentielles ordinaires que nous ſommes convenus de déſigner par la lettre minuſcule latine.

Cela poſé, je dis que la variation de la différentielle d'une fonction quelconque eſt égale à la différentielle de la même fonction.

Démonſtration.

Soit la fonction donnée y, on aura par ce qui a été démontré plus haut $D\Delta y = \Delta D y$; diviſez cette équation par $Da\Delta z$ et raiſonnez de la même maniere, comme on a fait dans le premier article ſur le théoreme fondamental des équations de condition, vous aurez d'abord

$\frac{D\left(\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)}{Da} = \frac{\Delta\left(\frac{Dy}{Da}\right)}{\Delta z}$, puis $\frac{D\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{Da} = \frac{\partial\left(\frac{Dy}{Da}\right)}{dz}$ et enfin

$\frac{\delta\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\delta a} = \frac{\partial\left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)}{dz}$.

À préſent pour derniere concluſion raiſonnez ainſi: Puisque dans l'expreſſion $\frac{\delta\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\delta a}$ on prend la différentielle de $\frac{\partial y}{\partial z}$ par rapport ſeulement à a, quelque valeur que puiſſe avoir ∂z, le réſultat ſera le même; ou ce qui revient au même, la priſe de la différentielle de $\frac{\partial y}{\partial z}$ par rapport à a, n'influe en rien ſur ∂z; et pour cela au lieu de $\frac{\delta\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{\delta a}$ nous pouvons prendre cette expreſſion $\frac{\delta\partial y}{\delta a\,\partial z}$; auſſi par la même rai-

 ſon

ſon au lieu de $\frac{\partial\left(\frac{\delta y}{\delta a}\right)}{\partial z}$ nous pouvons prendre l'expreſſion ſuivante $\frac{\partial \delta y}{\partial z \delta a}$, et de cette maniere on aura $\delta \partial y = \partial \delta y$. C.Q.F.D.

D'après cela il ne ſera plus ſurprenant que M. Fontaine, ait pû déduire le théorème fondamental expoſé dans le premier article ſur les équations de condition de la différentielle exacte, du calcul des variatious, car l'un à l'égard de l'autre n'eſt autre choſe qu'une répétition.

Et cela poſé il ne me reſte plus, pour finir cette matiere, que de citer l'excellent ouvrage de M. Couſin, intitulé *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, depuis la page 330 jusqu'à 339.

Mais en recommendant ce livre, il eſt néceſſaire de faire de petits changemens dans la démonſtration de quelques vérités et d'ajouter encore une remarque.

1) M. Couſin démontre l'équation $\delta\int\beta\, dx = \int.\delta(\beta dx)$ par le moyen des différences finies, mais elle peut ſe démontrer plus aiſement de cette maniere: puisque $\partial\int\beta dx = \beta dx$, par conſéquent $\delta\partial\int\beta dx = \delta(\beta dx)$ à cauſe de $\delta\partial\int.\beta dx = \partial\delta\int.\beta dx$, on a $\partial\delta\int.\beta dx = \delta(\beta dx)$ et $\delta\int.\beta dx = \int.\delta(\beta dx)$.

2) De même M. Couſin démontre l'équation $\int.\beta d\delta x = \beta\delta x - \int d\beta\delta x$ par le moyen des différences finies, mais on peut s'en paſſer en ſuivant la même méthode.

3) Enfin il reſte à remarquer que les principes expoſés ci-deſſus s'appliquent très convenablement à tout ce que M. Couſin a dit depuis la page 330. Par exemple le

le calcul des variations a les mêmes regles que le calcul différentiel; pour cela en prenant comme lui le produit xy, où x, y ſont des fonctions de z et de la quantité conſtante a, et ſuppoſant a comme variable, vous aurez, par ce qui a été dit dans mes Principes de Géométrie transcendante, d'abord $D\beta = x\,Dy + y\,Dx + Dx\,Dy$ enſuite $\frac{D\beta}{Da} = x\frac{Dy}{Da} + (y + Dy)\,\frac{Dx}{Da}$, et enfin par le ſecours des XII vérités ſecondaires et la premiere fondamentale de la méthode des limites

$$\frac{\delta\beta}{\delta a} = \frac{x\,\delta y}{\delta a} + \frac{y\,\delta x}{\delta a} \text{ et } \delta\beta\,(= \delta\,xy) = x\delta y + y\,\delta x.$$

Je ne trouve par néceſſaire d'aller plus loin, parceque tout s'accorde parfaitement, comme le lecteur peut en juger lui même.

DE

DE POLYGONIS SYMMETRICE IRREGULARIBUS CIRCULO SIMUL INSCRIPTIS ET CIRCUMSCRIPTIS

AUCTORE

NICOLAO FUSS.

Conventi exhibit. d. 19. April. 1798.

§. 1.

In Tomo X Novorum Actorum, pro anno 1792, varia et ex parte nova problemata, ad quadrilatera ſpectantia circulo inſcripta ſimul et circumſcripta, ſoluta dederam. Hic in alia polygona circulo ſimul inſcripta et circumſcripta inquirere conſtitui. Ex eo ſcilicet jam tempore poſtquam poſtremas quaeſtiones, in memorata commentatione tractatas, abſolviſſem: de quadrilatero nimirum dato circulo ita inſcribendo, ut ei itidem circulus inſcribi queat; nec non de diſtantia centrorum circuli inſcripti et circumſcripti determinanda, varios interdum tentavi modos eadem problemata etiam pro polygonis plus quam quatuor laterum reſolvendi. Aſt ſcopum attingere mihi non licuit. Creſcente enim numero laterum formulae fundamentales jam tantopere fiunt perplexae, ut oleum et opera in iis extricandis fruſtra impenduntur. Derelicto igitur problemate generali, maximis obſepto difficultatibus, ad ea me contuli polygona, quae

Sym-

Symmetrice irregularia vocare licet, utpote diametro praedita, qui per ambo centra tranſit et polygonum propoſitum in duo polygona aequalia et ſimilia ſecat. Imo etiam hac limitatione ſtabilita, problema, ut infra videbimus, nodis non caret, quos tamen, ope congruae electionis terminorum ad ineundum calculum idoneorum, deinceps vero, aptarum ſubſtitutionum ſubſidio, ſolvere licet. Incipiam igitur a pentagono; ante autem quam problema de pentagono ſymmetrice irregulari circulo inſcripto *ſimul* et circumſcripto aggrediar, ex datis angulis latera pentagoni cujuscunque circulo dato *ſive* inſcripti, *ſive* circumſcripti determinabo, quibus in ſequentibus opus eſt.

Problema I.

§. 2. *Datis angulis pentagoni, inveſtigare ejus latera, ita ut ei circulus datae magnitudinis circumſcribi poſſit.* *Tab. III Fig. 1.*

Solutio.

Sit O centrum circuli pentagono A B C D E' circumſcripti, radius vero A O = R, ductisque diagonalibus A C et A D erunt latera

$$AB = 2R \sin.\tfrac{1}{2} AOB = 2R \sin. ACB;$$
$$BC = 2R \sin.\tfrac{1}{2} BOC = 2R \sin. BAC;$$
$$CD = 2R \sin.\tfrac{1}{2} COD = 2R \sin. CAD;$$
$$DE = 2R \sin.\tfrac{1}{2} DOE = 2R \sin. DAE;$$
$$EA = 2R \sin.\tfrac{1}{2} EOA = 2R \sin. EDA;$$

Quodſi igitur vocentur anguli $BAC = \alpha$, $CAD = \beta$, $DAE = \gamma$, erit $\alpha + \beta + \gamma = A$; tum vero, ob quadrilatera ABCD et

A C

ACDE circulo inſcripta, erit $\alpha + \beta = \pi - C$, nec non $\beta + \gamma = \pi - D$, unde ſequitur fore

$$\alpha = A - (\beta + \gamma) = A + D - \pi;$$
$$\gamma = A - (\alpha + \beta) = A + C - \pi;$$
$$\beta = \pi - C - \alpha = 2\pi - (A + C + D).$$

Eſt vero $A + B + C + D + E = 3\pi$, unde ſequitur $\beta = B + E - \pi$; tum vero erunt anguli

$$ACB = \pi - \alpha - B = 2\pi - (A+B+D) = C+E-\pi;$$
$$EDA = \pi - \gamma - E = 2\pi - (A+C+E) = B+D-\pi;$$

quibus ſubſtitutis latera pentagoni ſequenti modo prodibunt expreſſa:

$$AB = -2R \sin.(E+C);$$
$$BC = -2R \sin.(A+D);$$
$$CD = -2R \sin.(B+E);$$
$$DE = -2R \sin.(C+A);$$
$$EA = -2R \sin.(D+B).$$

Corollarium 1.

§. 3. Deſignetur perimeter pentagoni littera Γ, ſuperficies vero littera Σ, atque ex modo traditis intelligitur fore

$$\Gamma = -2R\,[\sin.(A+D) + \sin.(B+E) + \sin.(C+A) + \sin.(D+B) + \sin.(E+C)]$$
$$\Sigma = -\tfrac{1}{2}R^2\,[\sin.2(A+D) + \sin.2(B+E) + \sin.2(C+A) + \sin.2(D+B) + \sin.2(E+C)]$$

quae expreſſiones in ſequentibus opus erunt.

Corollarium 2.

§. 4. Quod diagonales attinet, unamquamque duplici modo exprimere licet. Cum enim ſit verbi gratia $BE = 2R \sin.\frac{BOE}{2}$, ob $\frac{BOE}{2} = \pi - A$, erit $BE = 2R \sin. A$. Tum vero, ſi

ſi latera pentagoni vocentur $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$, $EA = e$, etiam erit $BE = \sqrt{aa + ee - 2ae \cos. A}$. His autem binis valoribus inter ſe comparatis nanciſcimur radium circuli circumſcripti

$$R = \frac{\sqrt{aa + ee - 2ae \cos. A}}{2 \sin. A}$$

cujusmodi expreſſiones pro radio R etiam ex reliquis diagonalibus derivari poſſunt.

Corollarium 3.

§. 5. Hinc autem porro ſequitur, ſi latera pentagoni ut data ſpectentur, una cum radio circuli circumſcripti, angulos ipſos ſequenti modo determinatum iri:

$$\cos. A = \frac{ae \pm \sqrt{aaee - 4(aa + ee) R^2 + 16 R^4}}{4RR}$$

$$\cos. B = \frac{ba \pm \sqrt{bbaa - 4(bb + aa) R^2 + 16 R^4}}{4RR}$$

$$\cos. C = \frac{cb \pm \sqrt{ccbb - 4(cc + bb) R^2 + 16 R^4}}{4RR}$$

$$\cos. D = \frac{dc \pm \sqrt{ddcc - 4(dd + cc) R^2 + 16 R^4}}{4RR}$$

$$\cos. E = \frac{ed \pm \sqrt{eedd - 4(ee + dd) R^2 + 16 R^4}}{4RR}$$

Problema 2.

§. 6. *Datis angulis pentagoni, inveſtigare ejus latera, ita ut ei circulus datae magnitudinis inſcribi poſſit.*

Solutio.

Tab. III Fig. 2. Sit o centrum et $oP = r$ radius circuli inſcripti, et cum ſit $AP = r \cot. \frac{A}{2}$ et $BP = r \cot. \frac{B}{2}$, habebimus

$$AB = r\left(\cot. \tfrac{A}{2} + \cot. \tfrac{B}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{A}{2} \sin. \frac{B}{2}};$$

ſimilique modo reperietur

$$BC = r\left(\cot. \tfrac{B}{2} + \cot. \tfrac{C}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{B+C}{2}}{\sin. \frac{B}{2} . \sin. \frac{C}{2}};$$

$$CD = r\left(\cot. \tfrac{C}{2} + \cot. \tfrac{D}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{C+D}{2}}{\sin. \frac{C}{2} . \sin. \frac{D}{2}};$$

$$DE = r\left(\cot. \tfrac{D}{2} + \cot. \tfrac{E}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{D+E}{2}}{\sin. \frac{D}{2} \sin. \frac{E}{2}};$$

$$EA = r\left(\cot. \tfrac{E}{2} + \cot. \tfrac{A}{2}\right) = \frac{r \sin. \frac{E+A}{2}}{\sin. \frac{E}{2} . \sin. \frac{A}{2}}.$$

Problema 3.

§. 7. *Datis lateribus pentagoni et uno quolibet puncto contactus, invenire radium circuli inſcripti.*

Solutio.

Servatis laterum denominationibus ſupra § 4. introductis, vocentur inſuper ſegmenta

$AP = AT = f;$
$BQ = BP = a - f = g;$

$$CR = CQ = b - g = h;$$
$$DS = DR = c - h = i;$$
$$ET = ES = d - i = k;$$

ita ut habeamus

$$\cot.\ \tfrac{A}{2} = \tfrac{f}{r};$$
$$\cot.\ \tfrac{B}{2} = \tfrac{g}{r};$$
$$\cot.\ \tfrac{C}{2} = \tfrac{h}{r};$$
$$\cot.\ \tfrac{D}{2} = \tfrac{i}{r};$$
$$\cot\ \tfrac{E}{2} = \tfrac{k}{r}.$$

Cum igitur ſit $A + B + C + D + E = 3\pi$, ſieri oportet
$\cot.\ (\frac{A+B+C}{2} + \frac{D+E}{2}) = 0$, atque adeo
$\cot.\ \frac{A+B+C}{2} \times \cot.\ \frac{D+E}{2} - 1 = 0.$

Componendo autem colligitur

$$\cot.\ \frac{C+B+C}{2} = \frac{fgh - (a+b)rr}{r(fg+ab-rr)}),$$
$$\cot.\ \frac{D+E}{2} = \frac{ik - rr}{r(i+k)} = \frac{ik - rr}{dr}$$

unde ſequens emergit aequatio:

$$(a+d+h)r^4 - adh + ik(a+h) + fg(d+h))r^2 + fghik = 0$$

atque hinc elicitur radius quaeſitus

$$r = \sqrt{\frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{MM}{4} - N}}$$

exiſtentibus nempe

$$M = \frac{adh + ik(a+h) + fg(d+h)}{a+d+h};$$
$$N = \frac{fghik}{a+d+h}.$$

Problema 4.

§. 8. *Si pentagoni circulo ſimul inſcripti et circumſcripti anguli fuerint cogniti, invenire relationem inter radios* R et *r*.

Solutio.

Cum ſit area $\Sigma = \frac{1}{2}\Gamma r$, erit $\frac{1}{r} = \frac{\Gamma}{2\Sigma}$, ubi ſi loco Γ et 2Σ valores ſupra § 3 inventos ſubſtituamus, nanciſcemur hanc relationem:

$$\frac{R}{2r} = \frac{sin.(A+D) + sin.(B+E) + sin(C+A) + sin.(D+B) + sin.(E+C)}{sin.2(A+D) + sin.2(B+E) + sin.2(C+A) + sin.2(D+B) + sin.2(E+C)}$$

quae propter ordinem in ea conſpicuum notari merebatur.

Scholion.

§. 9. Si latera pentagoni, prout § 2 ſunt inventa, aequalia ſtatuantur lateribus § 6 exhibitis, prodibunt ſequentes relationes inter radios R et *r*:

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{A}{2} + \cot.\frac{B}{2}}{-2\sin.(E+C)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{B}{2} + \cot.\frac{C}{2}}{-2\sin.(A+D)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{C}{2} + \cot.\frac{D}{2}}{-2\sin.(B+E)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{D}{2} + \cot.\frac{E}{2}}{-2\sin.(C+A)};$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\cot.\frac{E}{2} + \cot.\frac{A}{2}}{-2\sin.(D+B)}.$$

quibus inter ſe comparatis adipiſcimur relationes angulorum, prout

prout eos aſſumi oportet, quo pentagonum ſit ſimul circulo inſcriptum et circumſcriptum.

Problema 5.

§. 10. *Invenire diſtantiam centrorum circuli pentagono ſymmetrice irregulari tam inſcripti quam circumſcripti.* Tab. III Fig. 3.

Solutio.

Sit ABCDE pentagonum ſymmetrice irregulare, a recta AP ex angulo A in latus oppoſitum CD perpendiculariter demiſſa, in duo quadrilatera ſimilia et aequalia partitum; ac ſtatim perſpicuum eſt ambo centra fore in hac recta AP ſita. Sit O centrum circuli circumſcripti, *o* vero centrum circuli inſcripti, eritque $OA = R$ et $oP = op = r$. Vocetur diſtantia centrorum quaeſita $Oo = d$, tum vero $Ao = R + d = p$ et $oQ = R - d = q$, ita ut ſit $R = \frac{p+q}{2}$ et $d = \frac{p-q}{2}$, eritque $OP = r + d = R \sin OCP$. Eſt vero angulus $OBA = OAB = \frac{A}{2}$, hinc $OCB = OBC = B - \frac{A}{2}$, adeoque $OCP = C - B + \frac{A}{2}$. Quoniam autem in quadrilatero ABCP eſt $\frac{A}{2} + B + C + P = 360°$, erit $\frac{A}{2} + C = 270° - B$, hinc $OCP = 270° - 2B$, ergo $OP = r + d = - R \cos. 2B$, unde conſequimur $\cos. 2B = -\frac{r-d}{R} = \frac{q-p-2r}{p+q}$, ac proinde $\cos. B = \pm \sqrt{\frac{q-r}{p+q}}$.

Jam ex § 2 eſt $AB = - 2R \sin. (E + C)$, hinc ob $E + C = B + C = 270° - \frac{A}{2}$, erit $AB = 2R \cos. \frac{A}{2}$. Tum vero ex § 6 eſt

$$AB = \frac{r \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{A}{2} \sin. \frac{B}{2}},$$ unde ob $r = p \sin. \frac{A}{2}$ habebimus

$$AB = \frac{p \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{B}{2}} = 2R \cos. \frac{A}{2}.$$

Perve-

Pervenimus igitur ad hanc aequationem:

$$2\,R \sin.\frac{B}{2}\cos.\frac{A}{2} = p \sin.\frac{A+B}{2}$$

quam ita repraeſentare licet:

$$R\left(\sin.\frac{B-A}{2} + \sin.\frac{B+A}{2}\right) = p \sin.\frac{A+B}{2}$$

ex qua, ob $p - R = d$, colligitur

$$R \sin\frac{B-A}{2} = d \sin.\frac{B+A}{2}$$

unde evolvendo prodit

$$R\left(\sin.\frac{B}{2}\cos.\frac{A}{2} - \cos.\frac{B}{2}\sin.\frac{A}{2}\right) = d\left(\sin.\frac{B}{2}\cos.\frac{A}{2} + \cos.\frac{B}{2}\sin.\frac{A}{2}\right)$$

et dividendo per $\cos.\frac{B}{2}\cos.\frac{A}{2}$

$$R\left(\mathrm{tag}\,\frac{B}{2} - \mathrm{tag}.\frac{A}{2}\right) = d\left(\mathrm{tag}.\frac{B}{2} + \mathrm{tag}.\frac{A}{2}\right)$$

hincque tandem intelligitur fore

$$\mathrm{tag}.\frac{B}{2} = \frac{R+d}{R-d}\,\mathrm{tag}.\frac{A}{2} = \frac{p}{q}\,\mathrm{tag}.\frac{A}{2}.$$

Nunc autem, cum ſit $\sin.\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$, erit $\cos.\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{pp-rr}}{p}$ et $\mathrm{tag}.\frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{pp-rr}}$, ideoque $\mathrm{tag}.\frac{B}{2} = \frac{pr}{q\sqrt{pp-rr}}$, unde ſit $\sin.\frac{B}{2} = \frac{pr}{\sqrt{ppqq+rr(pp-qq)}}$ et $\cos.B = \frac{ppqq - rr(pp+qq)}{ppqq + rr(pp-qq)}$. Supra autem jam invenimus $\cos.B = \pm\sqrt{\frac{q-r}{p+q}}$, unde ſequens reſultat aequatio:

$$\frac{ppqq - rr(pp+qq)}{ppqq + rr(pp-qq)} = \pm\sqrt{\frac{q-r}{p+q}}$$

quae autem ita eſt comparata, ut vix quicquam ad perficiendam noſtram ſolutionem adferret, niſi attentius eam conſideranti quaſi ſponte ſe praeberent valores ſatisfacturi $r = -p$ et $r = \frac{qq}{p}$; ex quibus intelligitur, aequationem ad rationalitatem perductam et ordinatam diviſibilem fore per

ıer $p+r$ et per $pq-r(p+q)$. His igitur operationibus ıſtitutis nanciſcimur hanc aequationem:

$$p^3q^3+ppqqr(p+q)-pqrr(p+q)^2-r^3(p+q)(p-q)^2=0$$

Quodſi nunc ſtatuatur $r=\frac{pq}{s}$, aequatio noſtra hanc induet formam:

$$s^3+(p+q)s^2-(p+q)^2s-(p+q)(p-q)^2=0$$

quae porro, ſumto radio $R=1$, ob $p=1+d$, $q=1-d$, $p+q=2$ et $p-q=2d$, abit in hanc:

$$s^3+2s^2-4s-8dd=0,$$

unde denique adipiſcimur diſtantiae centrorum quaeſitae quadratum

$$dd=\frac{s^3+2s^2-4s}{8}.$$

Expedito hoc problemate etiam ſequens facillime reſolvere poterimus.

Problema 6.

§. 11. *Dato circulo pentagonum ſymmetrice irregulare inſcribere, cui itidem circulum inſcribere liceat.*

Solutio.

Ex ipſo quaeſtionis ſtatu perſpicitur fieri debere $d^2>0$ et $d^2<1$; valores igitur, quos littera s recipere poteſt, hos intra limites $s>\sqrt{5}-1$ et $s<2$ contineantur neceſſe eſt. Prior enim conditio, $d^2>0$, poſtulat ut ſit $ss+2s>4$, ideoque $s>\sqrt{5}-1$. Altera conditione $d^2<1$, requiritur ut fiat $s^3+2s^2-4s<8$, hoc eſt $(s+2)^2(s-2)<0$, ergo $s<2$. Tribuendo igitur quantitati s valorem determinatum quemcunque, intra hos limites contentum, habebimus diſtantiam centro-

centrorum d, hincque porro p, q et r, tum vero innoteſcit sin. $\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$ et tag. $\frac{B}{2} = \frac{p}{q}$ tag. $\frac{A}{2}$. Inventis autem angulis A et B etiam reliqui innoteſcunt. Ex angulis autem, ſecundum § 2 vel § 6, ipſa latera derivantur, quorum ope pentagonum conſtrui poterit propoſito problemati ſatisfaciens.

Corollarium.

§. 12. Si diſtantia centrorum fuerit nulla, evidens eſt pentagonum fore regulare: Videamus quid ex noſtra ſolutione conſequamur. Sit igitur $d = 0$, erit $s = \sqrt{5} - 1$, $p = 1$, $q = 1$ et $r = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$, hinc sin. $\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, ergo $\frac{A}{2} = 54^\circ$, unde fit tag. $\frac{B}{2} =$ tg. 54, ideoque $\frac{B}{2} = 54^\circ$, denique $C = 270^\circ - \frac{A}{2} - B = 108^\circ$. Pentagonum igitur eſt regulare, uti requiritur.

Exemplum.

§. 13. Sumatur $s = \frac{3}{2}$, erit $dd = \frac{15}{64}$, hinc $d = 0,4841$; unde $p = 1,4841$ et $q = 0,5159$, ergo $r = 0,5104$, ita ut fit sin. $\frac{A}{2} = \frac{0,5104}{1,4841}$, ideoque $\frac{A}{2} = 20^\circ, 7'$ et $A = 40^\circ, 14'$. Tum vero erit tag. $\frac{B}{2} = \frac{1,4841}{0,5159}$ tag. $\frac{A}{2}$, unde $\frac{B}{2} = 46^\circ, 30'$, ergo $B = 93^\circ, 0'$, hinc $C = 156^\circ, 53'$, quibus inventis latera polygoni problemati ſatisfacientis ita determinantur:

$$AB = AE = 1,8780;$$
$$BC = ED = 0,5886;$$
$$CD = \ldots 0,2090.$$

exiſtente radio circuli; cui inſcribendum eſt polygonum, $R = 1$.

Scholion 1.

§. 14. Cum aequationi noſtrae generali (§ 10) ſatisfacerint valores $r = -p$ et $r = \frac{pq}{p+q}$, iis ſolutiones particulares

lares problematis propoſiti contineantur neceſſe eſt, quae quomodo ſint explicandae, breviter hic oſtendiſſe juvabit, ne, quae tantummodo reſpectu propoſiti problematis *incongrue vera* ſunt, pro *falſis* habeantur. Prior valor $r = -p$ dat sin. $\frac{A}{2} = -1$, cos. $B = -1$, ergo $\frac{A}{2} = -90°$, $A = -180°$, $B = E = +180°$ et $C = D = +180$, unde omnia quinque latera in nihilum abeunt et puncta A, B, C, D, E in unicum A coaleſcunt, in quod, ob $AP = p + r = 0$, etiam punctum contactus P incidit, radii autem R et r hoc caſu manent indeterminati. Et profecto, ſi pentagonum in unicum punctum redigitur, tum quilibet circulus per hoc punctum tranſiens ut circumſcriptus et quilibet alius ut inſcriptus ſpectari poteſt. Quod alterum valorem $r = \frac{pq}{p+q}$ attinet, cum ex eo oriatur sin. $\frac{A}{2} = \frac{q}{p+q}$ et cos. $B = \pm \frac{q}{p+q}$, erit vel $B = E = 90° - \frac{A}{2}$, vel $B = E = 90° + \frac{A}{2}$. Prior caſus dat $C = D = 180°$, ergo

$$AB = AE = 2R \cos. \tfrac{A}{2};$$
$$BC = DE = 2R \sin. A;$$
$$CD = -2R \sin. A;$$

diagonales vero $BD = 2R \sin. C = 0$ et $CE = 2R \sin. D = 0$. Puncta igitur B et D, item C et E, in unum coaleſcunt, latera BC, DE et DC in unum confunduntur et loco pentagoni oritur triangulum iſoſceles. Altero caſu $B = E = 90° + \frac{A}{2}$ erit $C = D = 180° - A$, unde latera

$$AB = AE = 2R \cos. \tfrac{A}{2};$$
$$BC = DE = 2R \sin. 180° = 0;$$
$$CD = 2R \sin. A.$$

Hic igitur puncta B et C in unum coaleſcunt, itemque D et E,

Tab. III Fig. 4. et polygonum abit in id ipſum triangulum quod caſus praecedens habuit, quippe in quo utique eſt $r = \frac{pq}{p+q}$. Nam

$$\text{angulus } BoQ = \frac{BAo + ABo}{2};$$
$$\text{angulus } oBQ = \frac{PBQ + PBo}{2};$$

at $BAo = PBQ$ et $ABo = PBo$, ergo $BoQ = oBQ$, ideoque $BQ = oQ$. Cum igitur ſit

$$AQ : BQ = oA : oR$$

erit $p + q : q = p : r$, unde fit $r = \frac{pq}{p+q}$.

Scholion 2.

§. 15. Simili modo quo diſtantiam centrorum circuli eidem pentagono ſymmetrice irregulari inſcripti et circumſcripti in problemate 5to determinavimus, nunc quoque problema pro Hexagono reſolvere licet; eo tantum diſcrimine, quod aequatio finalis inter p, q et r hoc caſu facilius ad commodiorem formam reduci ſe patitur, neque ad hoc tam taediosa diviſione opus ſit. Statim igitur iſtud problema aggrediar, praetermiſſis quaeſtionibus de Hexagono circulo ſive inſcripto ſive circumſcripto, quippe quas, mutatis mutandis, ſine ullo negotio, ad ductum quatuor priorum problematum, abſolvere licet. Unicam interea, in quam incidi, praeterire non poſſum proprietatem, novam, ni fallor, et egregiam Hexagoni circulo inſcripti, quam ſequenti Theoremate complectar.

Theorema.

§. 16. *In quocunque hexagono circulo inſcripto, ſi duo quaelibet latera oppoſita ducantur, utrumque in productum ſinuum*

ſinuum binorum angulorum ad latus oppoſitum ſitorum, differentia binorum horum productorum eſt eadem pro quolibet laterum oppoſitorum pari, aequatur ſcilicet differentiae productorum ex ternis lateribus alternis diviſae per quadratum circuli circumſcripti.

Demonſtratio.

Cum, ducta diagonali AD, in quadrilatero ABCD ſit Tab. III Fig. 5.
$AC . BD = AB . CD + BC . AD$, in quadrilatero ADEF vero $AE . DF = AF . DE + EF . AD$, habebimus

$$AD = \frac{AC . BD - AB . CD}{BC} = \frac{AE . DF - AF . DE}{EF}$$

unde fit

$$EF . AC . BD - BC . AE . DF = AB . CD . EF - BC . DE . AF$$

Eſt vero

$$AC = 2R \sin . B, \quad AE = 2R \sin . F$$
$$BD = 2R \sin . C; \quad DF = 2R \sin . E$$

quibus ſubſtitutis enaſcitur

$$EF \sin . B \sin . C - BC \sin . E \sin . F = \frac{AB . CD . EF - BC . DE . AF}{4RR}$$

Eodemque modo demonſtrare licet fore

$$AB \sin . D \sin . E - DE \sin . A \sin . B = \frac{AB . CD . EF - BC . DE . AF}{4RR}$$
$$CD \sin . A \sin . F - AF \sin . D \sin . C = \frac{AB . CD . EF - BC . DE . AF}{4RR}$$

Q. E. D.

Problema 7.

§. 17. *Invenire diſtantiam centrorum circuli Hexagono ſymmetrice irregulari tam inſcripti quam circumſcripti.* Tab. III Fig. 6.

Solutio.

Sit ABCDEF hexagonum ſymmetrice irregulare, a recta AD, per angulos oppoſitos A et D ducta, in duo qua-

Z 2 drila-

drilatera ſimilia et aequalia partitum. Sit O centrum circuli circumſcripti et o centrum circuli inſcripti, ita ut $AO = R$, $op = r$. Sit ut ſupra $Oo = d$, $Ao = d$, $Ao = R + d = p$, $Do = R - d = q$, eritque $\sin. \frac{A}{2} = \frac{r}{p}$, $\sin. \frac{D}{2} = \frac{r}{q}$, hincque $\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{pp - rr}}$ et $\tan. \frac{D}{2} = \frac{r}{\sqrt{qq - rr}}$, et ob $B + \frac{D}{2} = \pi$,

$$\text{tag. } B = -\text{tag. } \frac{D}{2} = -\frac{r}{\sqrt{qq - rr}}.$$

Jam vero eſt, ut ſupra § 6 pro pentagono invenimus,

$$AB = \frac{r \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{A}{2} . \sin. \frac{B}{2}} = \frac{p \sin. \frac{A+B}{2}}{\sin. \frac{B}{2}};$$

tum vero quoque $AB = 2R \cos. \frac{A}{2}$, unde fit

$$2R \sin. \frac{B}{2} \cos. \frac{A}{2} = p \sin. \frac{A+B}{2}$$

ex qua aequatione conficitur, ut ſupra § 10,

$$\text{tag. } \frac{B}{2} = \frac{R+d}{R-d} \text{ tag. } \frac{A}{2} = \frac{p}{q} \text{ tag. } \frac{A}{2}, \text{ ideoque}$$

$$\text{tag. } \frac{B}{2} = \frac{pr}{q\sqrt{pp - rr}}, \text{ ex quo valore fit}$$

$$\text{tag } B = \frac{2pqr\sqrt{pp-rr}}{ppqq - rr(pp+qq)} = -\frac{r}{\sqrt{qq-rr}}$$

Hinc, ſublatis irrationalitate et fractionibus, aequatio exoritur ſequens:

$$3p^4 q^4 - 2ppqqrr(pp+qq) = r^4 (pp-qq)^2$$

quae ſolutionem noſtri problematis complectitur.

Statuatur nunc, ut ſupra, $r = \frac{pq}{s}$, et noſtra aequatio in hanc transfunditur:

$$3s^4 - 2ss(pp+qq) = (pp-qq)^2.$$

Deinde ponamus, ut ante fecimus, $R = 1$, ita ut $p = 1 + d$, $q = 1 - d$, $pp + qq = 2 + 2dd$ et $pp - qq = 4d$, eritque aequatio

3 s⁴

$$3s^4 - 4ss(1 + dd) = 16dd$$

ex qua elicitur quadratum diſtantiae centrorum quaeſitae

$$dd = \frac{ss(3ss - 4)}{4(ss + 4)}$$

hacque inventa ſolutionem ſequentis problematis in promtu habemus.

Problema 8.

§. 18. *Dato circulo hexagonum ſymmetrice irregulare inſcribere, cui itidem circulum inſcribere liceat.*

Solutio.

Sumatur s pro lubitu, dummodo, ne fiat $dd < 0$, vel $dd > 1$; ejus valor intra limites $s > \sqrt{\frac{4}{3}}$ et $s < 2$ contineatur, et ex praecedente ſolutione habebitur diſtantia centrorum d, unde porro conficitur $p = 1 + d$, $q = 1 - d$, et $r = \frac{pq}{s}$, quibus inventis innoteſcit sin. $\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$ et sin. $\frac{D}{2} = \frac{r}{q}$. Ex cognitis autem angulis $\frac{A}{2}$ et $\frac{D}{2}$, deducuntur anguli $B = 180° - \frac{D}{2}$ et $C = 180° - \frac{A}{2}$, unde denique etiam latera determinari poterunt.

Exemplum 1.

§. 19. Sit $s = \frac{2}{\sqrt{3}}$, erit $d = 0$, $p = 1$, $q = 1$, $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, hinc sin. $\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et sin. $\frac{D}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ergo $\frac{A}{2} = 60°$, $B = 120°$, $C = 120°$, ideoque Hexagonum regulare.

Exemplum 2.

§. 20. Sit $s = \frac{4}{3}$, erit $dd = \frac{4}{39} = 0,10256$ et $d = 0,32026$, $p = 1,32026$, $q = 0,67974$, hinc $r = 0,67308$, unde $\frac{A}{2} = 30°, 39'$ atque $\frac{D}{2} = 81°, 58$, hinc $B = F = 98°, 2'$; C =

$C = E = 149°, 21'$, unde denique latera hexagoni deducuntur, ſcilicet:

$$AB = AF = 1,72059;$$
$$BC = FE = 0,76913;$$
$$CD = ED = 0,27950;$$

exiſtente radio circuli, cui hexagonum inſcribitur, $R = 1$.

Problema 9.

§. 21. *Dato circulo heptagonum ſymmetrice irregulare inſcribere, cui circulum inſcribere liceat.*

Solutio.

Tab. III Fig. 7. Sit, ut hactenus, O centrum et $AO = R$ radius circuli heptagono circumſcripti, o centrum et $oP = r$ radius circuli inſcripti, diſtantia centrorum $Oo = d$, tum vero $Ao = R + d = p$, $oQ = R - d = q$, ita ut ſit $R = \frac{p+q}{2}$ et $d = \frac{p-q}{2}$. Jam notetur eſſe angulos

$$OBA = OAB = \tfrac{A}{2};$$
$$OCB = OBC = B - \tfrac{A}{2},$$
$$ODC = OCD = C - B + \tfrac{A}{2};$$
$$ODP = D - C + B - \tfrac{A}{2};$$

At vero eſt $\frac{A}{2} + B + C + D = \frac{5\pi}{2}$, ideoque $B + D = \frac{5\pi}{2} - C - \frac{A}{2}$, et $ODP = \frac{5\pi}{2} - A - 2C$, ergo $\sin. ODP = \cos. (A + 2C)$. Cum igitur ſit $\sin. ODP = \frac{OP}{OD} = \frac{d-r}{R}$, habebimus

$$\cos. (A + 2C) = \frac{d+r}{R} = \frac{2r + p - q}{p+q}$$

ex quo ſequentes valores facile deducuntur:

$$\sin. (\tfrac{A}{2} + C) = \sqrt{\tfrac{q-r}{p+q}};$$
$$\cos. (\tfrac{A}{2} + C) = \sqrt{\tfrac{p+r}{p+q}},$$

tum

tum vero quoque erit

$$\sin.(B+D)=\cos.(\tfrac{A}{2}+C)=\sqrt{\frac{p+r}{p+q}}.$$

Jam notetur eſſe tag. $\frac{D}{2}=\frac{OP}{DP}$. At quoniam

$DP=DO\cos.ODP=R\sin.(A+2C)$, ſive etiam

$DP=2R\sin.(\tfrac{A}{2}+C)\cos.(\tfrac{A}{2}+C)=\frac{2R\sqrt{(q-r)(p+r)}}{p+q}$

ſive denique $DP=\sqrt{(q-r)(p-r)}$, erit

$$\text{tag.}\,\frac{D}{2}=\frac{r}{\sqrt{(p-r)(p+r)}},$$

ex quo porro valore conficitur

$$\sin.D=\frac{2r\sqrt{(q-r)(p+r)}}{pq-r(p-q)},$$
$$\cos.D=\frac{pq-r(p-q)-2rr}{pq-r(p-q)}.$$

Tandem eodem modo, quo ſupra § 10 uſi ſumus, demonſtrabitur fore

$$\cos.B=\frac{ppqq-rr(pp+qq)}{ppqq+rr(pp-qq)},$$
$$\sin.B=\frac{2pqr\sqrt{pp-rr}}{ppqq+rr(pp-qq)}$$

unde ſequens componitur expreſſio:

$$\sin.(B+D)=\frac{\left\{\begin{array}{l}+2pqr\sqrt{pp-rr}\,(pq-r(p-q)-2rr)\\+(ppqq-rr(pp+qq))\,2r\sqrt{(q-r)(p+r)}\end{array}\right\}}{(pq-r(p-q))(ppqq+rr(pp-qq))}$$

Ad hanc igitur pervenimus aequationem:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}+(pq-r(p-q)-2rr).2pqr\sqrt{pp-rr}\\+(ppqq-rr(pp+qq)).2r\sqrt{(q-r)(p+r)}\end{array}\right\}}{(pq-r(p-q))(ppqq+rr(pp-qq))}=\pm\sqrt{\frac{p+r}{p+q}}$$

quae per $\sqrt{p+r}$ diviſa, ſublatis fractionibus ſequenti modo ſe habebit:

$$\left\{\begin{array}{l}(pq-r(p-q)-2rr).2pqr\sqrt{(p-r)(p+q)}\\+(ppqq-rr(pp+qq)).2r\sqrt{(q-r)(p+q)}\end{array}\right\}=\pm(pq-r(p-q))(ppqq+rr(pp-qq))$$

Pona-

Ponatur, ut in ſuperioribus fecimus, $r = \frac{pq}{s}$ et facta diviſione der $\frac{p^3q^3}{s^3}$ aequatio noſtra in hanc concinniorem formam redigitur:

$$\left\{\begin{matrix} \pm(ss - s(p-q) - 2pq) \frac{\sqrt{p(p+q)(s-q)}}{s} \\ \pm(ss - pp - qq) \frac{\sqrt{q(p+q)(s-p)}}{s} \end{matrix}\right\} = \pm\left(\frac{s-p+q}{2}\right)(ss + pp - qq).$$

Sumto igitur radio $R = 1$, ob $p = 1 + d$, $q = 1 - d$, $pq = 1 - dd$, $p - q = 2d$, $p + q = 2$, $pp - qq = 4d$ et $pp + qq = 2 + 2dd$, nanciſcimur

$$\left\{\begin{matrix} \pm(ss - 2ds - 2(1-dd)) \frac{\sqrt{2(1+d)(s-1+d)}}{s} \\ \pm(ss - 2(1+dd)) \frac{\sqrt{2(1-d)(s-1-d)}}{s} \end{matrix}\right\} = \pm\left(\frac{s}{2} - d\right)(ss + 4d)$$

qua igitur aequatione non parum perplexa ſolutio noſtri problematis continetur.

Exemplum I.

§. 22. Sit $d = 0$, et aequatio noſtra fit $4(ss - 2)\sqrt{\frac{2s-2}{s}} = \pm s^3$, cui ſatisfacit propemodum valor $s = \frac{10}{9}$, unde per notas approximationis regulas facile deducitur valor vero proprior $s = 1,109916$, ex quo obtinetur $r = 0,900969$, hinc $\sin. \frac{A}{2} = r = 0,900969$, et (ob $tg. \frac{D}{2} = \frac{r}{\sqrt{(q-r)(p+r)}}$) $\sin. \frac{D}{2} = \frac{r}{\sqrt{pq - (p-q)r}} = r = 0,900969$, tum vero $\cos. B = 1 - 2rr = -0,623490$, unde colligitur $\frac{A}{2} = 64°, 17', 8\frac{1}{2}''$; $\frac{D}{2} = 64°, 17', 8\frac{1}{2}''$, $B = 128°, 34', 17''$ hincque etiam $C = 128°, 34', 17''$, ergo heptagonum regulare, ut poſitio $d = 0$ requirebat.

Exem-

Exemplum 2.

§. 23. Statuatur $s = 4d$, eritque aequatio:

$$(5dd-1)\sqrt{\frac{2(1+d).(5d-1)}{d}}+(7dd-1)\sqrt{\frac{2(1-d)(3d-1)}{d}}=\pm 4dd(4d+1),$$

cui proxime ſatisfit, ponendo $d = \frac{1}{3}$, ex quo valore approximando elicitur valor vero proprior $d = 0,3339$, unde fit, $p = 1,3339$, $q = 0,6661$ et $r = 0,6652$; tum vero $\frac{A}{2} = 29°, 55'$; $\frac{D}{2} = 86°, 25'$; $\frac{A}{2} + C = 181°, 13'$, ideoque $A = 59°, 50'$, $D = 172°, 50'$, $C = 151°, 18'$ et $B = 95°, 57'$. Hinc autem ipſa latera heptagoni evadunt

AB	=	AG	=	1,7335
BC	=	GF	=	0,8124
CD	=	FE	=	0,1650
DE	.	.	.	0,0849.

Problema 10.

§. 24. *Dato circulo octogonum ſymmetrice irregulare inſcribere, cui circulus inſcribi poſſit.*

Solutio.

Sint, ut hactenus, O et o centra circulorum circumſcripti et inſcripti, eorum diſtantia $Oo = d$, radii $AO =$ Tab. III Fig. 8.
$EO = R = 1$, $op = oq = r$, tum vero $Ao = 1 + d = p$, $Eo = 1 - d = q$, ubi pro caſu, ubi centrum o, ut in figura 8va evenit, ſupra centrum O cadit, diſtantia d fiet negativa, eritque $\sin.\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$ et $\sin.\frac{E}{2} = \frac{r}{q}$, hinc $\tan g.\frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{pp-rr}}$ et $\tan g.\frac{E}{2} = \frac{r}{\sqrt{qq-rr}}$. Supra autem (§ 10) jam demonſtravimus eſſe $\tan g.\frac{B}{2} = \frac{p}{q}\tan g.\frac{A}{2} = \frac{p}{q\sqrt{pp-rr}}$. Eodemque modo demonſtrari

ſtrari poteſt fore $\text{tag.}\,\frac{D}{2} = \frac{q}{p}\cdot\text{tag.}\,\frac{E}{2} = \frac{qr}{p\sqrt{qq-rr}}$. Cum enim ſit latus

$$DE = 2\cos.\tfrac{E}{2} = \frac{r\sin.\frac{D+E}{2}}{\sin.\frac{D}{2}\sin.\frac{E}{2}} = \frac{q\sin.\frac{D+E}{2}}{\sin.\frac{D}{2}},\ \text{erit}$$

$$2\sin.\tfrac{D}{2}\cos.\tfrac{E}{2} = q\sin.\tfrac{D+E}{2},\ \text{ſive}$$

$$\sin.\tfrac{D+E}{2} + \sin.\tfrac{D-E}{2} = q\sin.\tfrac{D+E}{2},\ \text{hincque ſit}$$

$$\sin.\tfrac{D-E}{2} = -d\sin.\tfrac{D+E}{2},\ \text{unde evolvendo nanciſcimur}$$

$$\sin.\tfrac{D}{2}\cos.\tfrac{E}{2} - \cos.\tfrac{D}{2}\sin.\tfrac{E}{2} = -d\sin.\tfrac{D}{2}\cos.\tfrac{E}{2} - d\cos.\tfrac{D}{2}\sin.\tfrac{E}{2}$$

et dividendo per $\cos.\frac{D}{2}\cos.\frac{E}{2}$

$$\text{tag.}\,\tfrac{D}{2} - \text{tag.}\,\tfrac{E}{2} = -d\,\text{tag.}\,\tfrac{D}{2} - d\,\text{tag.}\,\tfrac{E}{2},\ \text{hoc eſt}$$

$$(1+d)\,\text{tag.}\,\tfrac{D}{2} = (1-d)\,\text{tag.}\,\tfrac{E}{2},\ \text{unde ſit}$$

$$\text{tag.}\,\tfrac{D}{2} = \tfrac{q}{p}\,\text{tag.}\,\tfrac{E}{2}.$$

Ex his autem valoribus:

$$\text{tag.}\,\tfrac{A}{2} = \frac{pr}{q\sqrt{pp-rr}}\ \text{et}\ \text{tag.}\,\tfrac{D}{2} = \frac{qr}{p\sqrt{qq-rr}}\ \text{conficitur}$$

$$\text{tag.}\,\tfrac{B+D}{2} = \frac{ppr\sqrt{qq-rr} + qqr\sqrt{pp-rr}}{pq\sqrt{pp-rr}\cdot\sqrt{qq-rr} - pqrr}$$

Quoniam autem in omni octogono circulo inſcripto eſt ſumma angulorum alternorum $B + D + F + H = 540^\circ$, noſtro caſu erit $2B + 2D = 540^\circ$, ideoque $\frac{B+D}{2} = 135^\circ$ et $\text{tag.}\,\frac{B+D}{2} = -1$, ita ut hanc habeamus aequationem reſolvendam:

$$ppr\sqrt{qq-rr} + qqr\sqrt{pp-rr} = pqrr - \sqrt{(pp-rr)(qq-rr)}.$$

Ponamus jam, ut antehac fecimus, $r = \frac{pq}{s}$ et aequatio noſtra reducetur ad hanc formam:

$$p\sqrt{ss-pp} + q\sqrt{ss-qq} = pq - \sqrt{(ss-pp)(ss-qq)},$$

quam

quam etiam ita repraeſentare licet:

$$(q+\sqrt{ss-pp})\,(p+\sqrt{ss-qq})=2pq.$$

Cum autem ſit $\frac{p}{s}=\frac{r}{q}=\sin.\frac{E}{2}$, nec non $\frac{q}{s}=\frac{r}{p}=\sin.\frac{A'}{2}$, erit $\sqrt{ss-pp}=s\cos.\frac{E}{2}$ et $\sqrt{ss-qq}=s\cos.\frac{A}{2}$, quibus ſubſtitutis prodit

$$(\sin.\tfrac{A}{2}+\cos.\tfrac{E}{2})\,(\sin.\tfrac{E}{2}+\cos.\tfrac{A}{2})=2\sin.\tfrac{A'}{2}\sin.\tfrac{E}{2}$$

et facta evolutione ad hanc perducimur aequationem perquam ſimplicem:

$$\cos.\tfrac{A+E}{2}+\tfrac{1}{2}\sin.A+\tfrac{1}{2}\sin.E=0$$

quam tamen ad formam adhuc ſimpliciorem reducere licet, ponendo $\frac{A+E}{2}=\mu$ et $\frac{A-E}{2}=\nu$; tum enim fit $A=\mu+\nu$ et $E=\mu-\nu$, ideoque

$$\cos.\mu+\tfrac{1}{2}\sin.(\mu+\nu)+\tfrac{1}{2}\sin.(\mu-\nu)=0,\ \text{ſive}$$
$$\cos.\nu=-\cot.\mu.$$

Solutio igitur noſtri problematis ita ſe habet: Sumatur pro lubitu angulus ν, habebitur quoque μ, hinc $A=\mu+\nu$ et $E=\mu-\nu$; tum vero, ob $p+q=2=s\,(\sin.\frac{A}{2}+\sin.\frac{E}{2})$ erit $s=\dfrac{2}{\sin\frac{A}{2}+\sin.\frac{E}{2}}$, ac proinde $p=\dfrac{2\sin.\frac{E}{2}}{\sin.\frac{A}{2}+\sin.\frac{E}{2}}$ et

$$q=\frac{2\sin.\frac{A}{2}}{\sin.\frac{A}{2}+\sin.\frac{E}{2}},\ \text{hincque}\ d=\frac{p-q}{2}=\frac{\sin.\frac{E}{2}-\sin.\frac{A}{2}}{\sin.\frac{E}{2}+\sin.\frac{A}{2}}$$

et $r=p\sin.\frac{A}{2}=\dfrac{2\sin.\frac{A}{2}\sin.\frac{E}{2}}{\sin.\frac{A}{2}+\sin.\frac{E}{2}}$. Porro autem eſt

$$\text{tag.}\tfrac{B}{2}=\tfrac{p}{q}\,\text{tag.}\tfrac{A}{2}=\frac{\sin.\frac{E}{2}}{\cos.\frac{A}{2}}\ \text{et}\ \text{tg.}\tfrac{D}{2}=\tfrac{q}{p}\,\text{tg.}\tfrac{E}{2}=\frac{\sin.\frac{A}{2}}{\cos.\frac{E}{2}}.$$

Inventis autem hoc modo angulis A, B, D, E, ob $A + C + E + G = 540°$, ſive $A + 2C + E = 540°$, habebitur quoque $C = 270° - (\frac{A + E}{2})$ et denique latera:

$$AB = AH = 2 \cos. \tfrac{A}{2}$$
$$BC = HG = 2 \cos (B - \tfrac{A}{2})$$
$$CD = GF = 2 \cos. (D - \tfrac{E}{2})$$
$$DE = FE = 2 \cos. \tfrac{E}{2}.$$

Exemplum 1.

§. 25. Sit angulus $\nu = 0$, erit $\mu = 135°$; hinc $A = 135°$ et $E = 135°$; tum vero erit $s = \frac{2}{2 \sin. 67\frac{1}{2}°} = \text{cosec. } 67\frac{1}{2}°$ $= 1,08239$, deinde $p = 1$, $q = 1$, ergo $d = 0$ et $r = 0,92388$, porro tag. $\frac{B}{2}$ = tag. $\frac{A}{2}$ et tag $\frac{D}{2}$ = tag. $\frac{E}{2}$, hinc $B = 135°$ et $D = 135°$ et denique $C = 135°$, ideoque Octogonum erit regulare.

Exemplum 2.

§. 26. Sit $\nu = 60°$, eritque $\mu = 116°, 34'$, ergo $A = 176°, 34'$ et $E = 56°, 34'$; $s = 1,35742$, $p = 0,64319$, $q = 1,35681$, ergo $d = -0,35681$ et $r = 0,64290$; ubi ſignum negativum, diſtantiae centrorum d praefixum, indicat centrum o a centro O verſus A eſſe capiendum. Tum vero erit $\frac{B}{2} = 86°, 23'$ et $\frac{D}{2} = 48°, 37$, ergo $B = 172°, 46'$ et $D = 97°, 14'$, hinc $C = 153°, 26'$. Ipſa denique latera Octogoni quaeſiti erunt:

$$AB = AH = 0,0599$$
$$BC = HG = 0,1923$$

CD

$$CD = GF = 0,7184$$
$$DE = FE = 1,7612.$$

§. 27. Ulterius has diſquiſitiones non proſequor: ex ſolutionibus enim hic ſucceſſive pro pentagono, hexagono, heptagono et octogono traditis, jam abunde perſpicere licet, quemadmodum pro aliis polygonis ſymmetrice irregularibus calculus ſit inſtituendus, ut ad aequationem perveniatur diſtantiam quaeſitam centrorum *d*, una cum alia quantitate *s* intra datos limites pro lubitu accipienda, complectentem; unde, conceſſa aequationum algebraicarum reſolutione, diſtantia ipſa *d*, ejusque ope omnia reliqua elementa, ita determinari poſſint, ut polygono, circulo dato inſcripto, itidem circulus inſcribi queat.

DE

DE

EVOLUTIONE SECTIONUM CYLINDRI.

AUCTORE

F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita die 25. Octobr. 1798.

§. 1.

Commentationes Academiae Berolinenſis ad annos 1790 et 1791 pervolventi ſeſe mihi obtulit animadverſio celeberrimi *Burja*, ubi dicit, *ſectionis cylindri obliquae evolutionem in planum*, notatu quamvis dignam examini nondum eſſe objectam (*). Quod quidem non parum ſingulare cum mihi videretur, examine inſtituto inveni, curvam evolutione iſta oriundam proprietatibus quibusdam gaudere notatu haud indignis. Prius autem quam hoc negotium aggrediamur, non e re erit, Theorema illud ſatis quidem cognitum breviter demonſtrare, omnem Cylindri recti (qualem primo contemplabimur) ſectionem eſſe *ellipſin*, quia ellipſis hujus elementis in ſequentibus opus erit.

Tab. I. Fig. 6. §. 2. Sit itaque A L H G cylindrus rectus, cujus axis C T, radius baſis C A $= a$, ſitque F Y F′ plani cujuspiam inter-

(*) *pag.* 261. „Cette courbe mériteroit que quelque Géomètre l'examinât avec soin.“

interſectio cum cylindro, quod ab axe in puncto E ſecatur, e quo puncto ducta Ee normali ad planum FFY, per lineam Ee axemque cylindri ponatur planum $ALF'F$, quod igitur erit normale ad planum FYF'. Deinde per quodvis curvae FYF' punctum Y ducatur YX ad rectam FF' normalis, quae non minus ad planum $ALF'F$ normalis erit, quia FF' eſt interſectio hujus plani cum plano normali $FF'Y$. Ducta itaque XK ad axem perpendiculari, planum YXK normale erit cum ad planum $ALF'F$, quia per YX tranſit, tum ad axem, quoniam axis in plano ALF interſectioni ejus cum plano YXK normaliter inſiſtit. Eſt itaque planum YXK baſi parallelum, unde ejus cum cylindro interſectio HYG erit circulus radii a, et angulus YXK erit rectus, unde per circuli naturam eſt $YX^2 = a^2 - KX^2$. Angulum $FXG = F'XH$, quo ſitus plani ſecantis FFY determinatur, appellemus α. Tum vero aequatione ad curvam FYF' expreſſa per coordinatas orthogonales $EX = x$, $XY = y$, eſt $KX = x \cos. \alpha$, unde nanciſcimur aequationem

$$y^2 = a^2 - x^2 \cos^2 \alpha,$$

quae eſt ellipſis definitio, cujus centrum in E, cujusque axis transverſus eſt FF'. Poſitis igitur axibus transverſo et conjugato, $2p$ et $2q$, ut aequatio ad ellipſin ſit

$$y^2 = q^2 - \frac{q^2}{p^2} x^2,$$

ſequitur $\frac{q}{p} = \cos \alpha$, et $q = a$, $p = a \sec \alpha$, ideoque ſemidiſtantia focorum $\sqrt{(p^2 - q^2)} = a \operatorname{tg} \alpha$, et eccentricitas

$$\frac{\sqrt{(p^2 - q^2)}}{p} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sec \alpha} = \sin \alpha.$$

§. 2. Exploremus jam curvam quae oritur, quando haec ellipſis cum integra cylindri ſuperficie evolvitur in planum

planum cylindrum tangens ideoque axi parallelum. Primum quidem notaſſe juvabit, eandem curvam productum iri, ſive planum evolutionis ponatur per rectam LF′ per verticem ellipſis tranſeuntem, ſive per aliud quodpiam cylindri *latus*, h. e. rectam in ejus ſuperficie axi parallelam, e gr. YZ. Evoluto ſcilicet arcu elliptico FY in planum per YZ ad KY normale, curva ita genita minime mutabitur, plano hoc circumvoluto, donec cum plano per LH ad HK normali coincidat, quia curva ſemper cum hoc plano progredietur. Diſſecto itaque cylindro per latus AG, elementa ellipſis Ff ab initio in planum per rectam fg lineae FG infinite propinquam, deinde gradatim in alia atque alia plana evolvitur, quae evolutio quousque lubet continuari poteſt ſine ulla mutatione arcus Ff vel FY jam evoluti. Hinc ſimul patet, evolutam fore curvam in infinitum ſeſe extendentem ſeu innumeris ramis gaudentem, quoniam una revolutione cylindri peracta, eum ulterius circumvolvere continuo licet. Supponamus itaque, ellipſin in planum per LH ſeu per verticem ellipſis F cylindrum tangens eſſe evolutam, ſitque AMB haec ellipſis, cujus axis transverſus AB, inclinatio ad baſin ABI $= \alpha$.

§. 4. Per verticem ellipſis B ducto plano BNI ad axem, ideoque et ad planum evolutionis per LB normali, evolutio circuli BNI, cujus centrum in O, gignet rectam, quam pro axe abſciſſarum aſſumere convenit. Per quodvis itaque punctum M ellipſis ducto latere cylindri MN, quod cum ſit axi parallelum ideoque ad circulum BN normale, tanquam ordinata orthogonalis accipi poteſt, aequatio erit quaerenda ad curvam evolutione genitam inter coordinatas

BN

$BN = x$ et $NM = y$. Quem in finem ducamus e punctis M et N, normales MP, NQ, ad planum ALB, quae igitur erunt parallelae, atque puncta P, Q, erunt in rectis AB, IB, h. e. interſectionibus planorum AMB, INB, cum plano ALB ad utrumque normali. Quare cum lineae MP, NQ, ſint etiam aequales, diſtantia nempe lateris MN a plano parallelo ALB, quadrilaterum MPQN eſt parallelogrammum, unde ſequitur $PQ = MN = y$. Cum praeterea ſit NQ ad BI perpendicularis, habemus

$$OQ = ON \cos ION = -a \cos BON = -a \cos \tfrac{x}{a},$$

$$\text{et } BQ = a\left(1 - \cos \tfrac{x}{a}\right).$$

Aequatio quaeſita eſt igitur $PQ = BQ \tang \alpha$, h. e.

$$y = a \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \cos \tfrac{x}{a}\right).$$

§. 5. Curvam evolutione hac oriundam et e circulo exemtam ob oculos proponit *Figura ſeptima*, ubi eſt BL latus illud cylindri, per quod planum evolutionis tranſit, circulus BI in rectam BI abit, puncta M, N, A, I, (*Fig.* 6.) punctis M, N, A, I, (*Fig.* 7.) reſpondent, atque poſito $BN = x$, $NM = y$, aequatio fundamentalis eſt

$$y = a \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \cos \tfrac{x}{a}\right).$$

Evaneſcit igitur y caſu $x = 0$, $x = 2a\pi = BB'$, $x = 4a\pi = BB''$, et generatim caſu $\frac{x}{a} = 2n\pi$, denotante nempe π numerum 3,14. . . . et n numerum quemcunque integrum. Cum praeterea $\cos \frac{x}{a}$ fieri nequeat unitate major, y nunquam induet valorem negativum, *maximus* autem ejus valor erit $IA = I'A' = 2a \operatorname{tg} \alpha$, qui reſpondet valoribus abſciſſarum $x = a\pi = BI$, $x = 3a\pi = BI'$, et in genere $\frac{x}{a} = (2n+1)\pi$.

§. 6. Cuivis abſciſſae x unicus ordinatae valor competit; ſingulis autem ordinatis y innumerae reſpondent abſciſſae x, tum poſitivae tum negativae, ob $\cos\frac{x}{a} = \cos(2n\pi \pm \frac{x}{a})$ et $\cos(\frac{\pm x}{a}) = \cos(\frac{\mp x}{a})$. Curva igitur ad utramque partem in infinitum ſe extendit, innumerosque habet ramos aequales ac ſimiles, qui omnes intra parallelas BB, AA', comprehenſi ſunt, easque in punctis A, A', B, B' etc. tangunt. Prima nempe cylindri revolutione peracta (§. 3.) ramus BAB' conficitur, ſecunda revolutione ramus B'A'B'', et ſic porro: quod expreſſio analytica vel aequatio generalis exprimat oportet.

§. 7. Poſito $x = \frac{1}{2}a\pi = BR$, vel $x = \frac{3}{2}a\pi = BR'$, vel generaliter $\frac{x}{a} = (n + \frac{1}{2})\pi$, fit $y = a\,\mathrm{tg}\,\alpha = RS$, ideoque $RS = \frac{1}{2}IA$ (§. 5.) medius omnium ordinatarum valor eſt. Unde cum quoque ſit $BR = \frac{1}{2}BI$ (§. 5), ſequitur, rectas AB, AB', A'B', etc. per puncta S, S', S'', tranſire, quae puncta ductae per S parallelae cum rectis BI, LA, interſectiones cum curva ſunt: eſt enim $BR : BI = 1 : 2 = RS : IA$, $BR' : BI = RS' : AI$, et ſic porro. In genere a puncto S vel S' ad utramque partem coordinatae x, y, in eadem proportione creſcunt atque decreſcunt. Capto nempe $RN = RN' = a\xi$, h. e. $x = a(\frac{1}{2}\pi + \xi)$, ob $\cos(\frac{1}{2}\pi + \xi) = -\sin\xi$, erit $NM = a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(1 + \sin\xi)$ et $N'M' = a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(1 - \sin\xi)$, ideoque ob $RS = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $nM = a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\sin\xi = n'M'$, h. e. incrementa ordinatarum ſunt aequalia. Verum eſt etiam $nm = n'm'$, quoniam in triangulis rectangulis Snm, $Sn'm'$, anguli verticales nSm, $n'Sm'$, lineaeque Sn, Sn', aequales ſunt: unde ſequitur $nM - nm = n'M' - n'm'$, h. e. $Mm = M'm'$.

§. 8. Capto jam infinite parvo $NP = N'P'$, erit $\mu\nu = \mu'\nu'$ ob $RP = RP'$, uti modo demonſtravimus; praeterea vero

$m\nu$

$m\nu = m'\nu'$, ob rectas Nm, $P\nu$, $N'm'$, $P'\nu'$, parallelas; atque anguli ad m; ν, m', ν', ſub quibus recta AB ab his parallelis ſecatur, erunt aequales. Sunt itaque trapezia $Mm\nu\mu$, $Mm'\nu'\mu'$, aequalia, ideoque et integrae areae ſegmentorum SMAS, SM′BS, quorum illa ſunt elementa.

§. 9. Hinc ſimul alia ſequitur inſignis curvae noſtrae proprietas. Poſſunt nempe puncta S, S′, etc. ceu totidem curvae centra conſiderari, quia quaelibet curvae chorda per S tranſiens in puncto S biſecatur. Recta ſcilicet MS quoque per M′ tranſit, eſtque $SM = SM'$. Nam ob NM, RS, N′M′, parallelas, et $RN = RN'$, habemus in triangulis SMm, $SM'm'$, angulos ad S, et m, m', aequales, ac $Sm = Sm'$, unde ſequitur $SM = SM'$, et $Mm = M'm'$; h. e. punctum interſectionis rectae MS cum ordinata N′M′ in ipſum curvae punctum M′ cadit. Idem aequatio noſtra fundamentalis generaliter monſtrat. Ducta nempe quacunque recta per S″, quae curvae ramis in punctis X, X′, occurrat, demiſſis ordinatis XT, X′T′, atque poſito $R''T = a\xi$, erit $TX = y = a \operatorname{tg} \alpha\,(1 - \cos \frac{R'T}{a}) = a \operatorname{tg} \alpha\,(1 - \cos(\frac{1}{2}\pi + \xi)) = a \operatorname{tg} \alpha\,(1 + \sin \xi)$, et $VX = a \operatorname{tg} \alpha \sin \xi$. Quapropter cum in triangulis ſimilibus $S''VX$, $S''V'X'$, ſit $R''T : VX = R''T' : V'X'$, naſcitur $V'X' = \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \xi}{\xi} . R''T'$, et $T'X' = \operatorname{tg} \alpha\,(a - \frac{R''T' \sin \xi}{\xi})$. Praeterea habemus $T'X' = y' = a \operatorname{tg} \alpha\,(1 - \cos \frac{R'T}{a}) = a \operatorname{tg} \alpha\,(1 - \cos(\frac{R''T'}{a} - \frac{\pi}{2})) = a \operatorname{tg} \alpha \times (1 - \sin \frac{R''T'}{a})$. Quo valore cum priore comparato oritur $a \sin \frac{R''T'}{a} = \frac{R''T' \sin \xi}{\xi}$, h. e. $\sin \frac{R''T'}{a} : \frac{R''T}{a} = \sin \xi : \xi$; unde ſequitur $\frac{R''T'}{a} = \xi$, ſive $R''T' = a\xi = R''T$, $S''V' = S''V$, et $S''X' = S''X$. Omnis itaque chorda XX′ per punctum

S vel S′ vel S″ etc. tranſiens in S bifariam ſecatur: unde perſpicimus, omnes rectas per puncta S ductas curvae eſſe *diametros*, atque puncta S curvae *centra*. Eodem quoque modo ut ſupra demonſtrari poteſt, areas ſectorum S″A′XS″, S″B′X′S′, eſſe aequales.

§. 10. In quovis puncto F ducta curvae *tangente* FG et ordinata FH, erit poſito angulo $\frac{x}{a} = \Phi$, *ſubtangens* $HG = \frac{y \partial x}{\partial y} = \frac{a(1 - \cos\Phi)}{\sin\Phi} = a \,\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}\Phi$, ideoque $B'G = x - \frac{y\partial x}{\partial y} = a(\Phi - \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Phi)$. Angulo FGH, ſub quo *tangens* ad axem abſciſſarum inclinatur, poſito $= \gamma$, eſt $\mathrm{tang}\,\gamma = \frac{\partial y}{\partial x} = \mathrm{tg}\,\alpha \sin\Phi$, ergo γ ſemper minor angulo α qui eſt ejus limes. Ipſa *tangens* eſt $FG = \sqrt{(HG^2 + HF^2)} = a(1 - \cos\Phi)\sqrt{(\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{cosec}^2\Phi)}$, atque recta HK ad tangentem FG normalis $= HG \times \sin\gamma = \frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(1-\cos\Phi)}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\alpha \sin^2\Phi)}}$. Punctum curvae, ubi recta curvam tangens per initium abſciſſarum, h. e. unum alterumve punctorum B, B′, etc. tranſit, definitur aequatione $B'G = o$, h. e. $\Phi = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Phi$, cui aequationi ſatisfit valoribus $\Phi = 133^\circ\, 33'\, 48''$, $\Phi = 527^\circ\, 36'\, 16''$, etc. Sunt illae nempe tangentes BM, BM″, etc. per puncta M, M″, quae abſciſſis $BN = a(133^\circ\, 33'\, 48'')$ et $BN'' = BB' + a(167^\circ\, 36'\, 16'')$ reſpondent.

§. 11. Maximus rectae B′G valor (§. 10.) determinatur aequatione $\partial\Phi = \partial\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Phi$, ſeu $1 = \frac{\frac{1}{2}}{(\cos\frac{1}{2}\Phi)^2}$, proinde $(\cos\frac{1}{2}\Phi)^2 = \frac{1}{2}$, unde ſequitur $\frac{1}{2}\Phi = 45^\circ$, $\Phi = 90^\circ$, et $x = a\Phi = B'R''$, cui abſciſſae reſpondet punctum curvae S″. Puncto huic formulae ſuperiores (§. 10.) accommodantur ponendo $\Phi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, unde fit angulus $\gamma = \alpha$, ſubtangens $= a$, recta $B'G = a(\frac{\pi}{2} - 1)$, tangens $FG = a\sqrt{(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)} = a \sec\alpha$, atque

atque normalis HK $= a \sin \alpha$. Hiſce formulis exhibetur inſignis ac elegantiſſima curvae noſtrae proprietas. Eſt ſcilicet $a \sec z = p$ ellipſis evolutae ſemiaxis transverſus (§. 2.), $a = q$ ſemiaxis conjugatus, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{(p^2 - q^2)}}{p}$ eccentricitas, et $\cos \alpha = \frac{q}{p}$ ratio axium. Quare ducta per quodpiam punctorum S, S', S'', S''', tangente curvae S'''G', ordinata S'''R''', tumque e puncto R''' ad tangentem normali R'''K', triangulum rectangulum G'K'R''' omnia continebit ellipſis evolutae elementa. Eſt nempe S'''G' ſemiaxis major, R'''G' ſemiaxis minor, R'''K ſemidiſtantia focorum, sin K'G'R''' eccentricitas, et cos K'G'R''' ratio axium principalium $\frac{q}{p}$, ideoque G'K' ſemiparameter.

Quadratura curvae.

§. 12. Poſita area BSMNB $= S$, area BSMCB $= S'$, habemus

$$\partial S = y \partial x = a . \operatorname{tg}\alpha . \partial x (1 - \cos \tfrac{x}{a}),\ \partial S' = x \partial x \operatorname{tg} \alpha \sin \tfrac{x}{a},$$

conſequenter

$$S = a \operatorname{tg}\alpha (x - a \sin \tfrac{x}{a}),\ \text{et}\ S' = a \operatorname{tg}\alpha (a \sin \tfrac{x}{a} - x \cos \tfrac{x}{a}),$$

quod facilius reperitur, ſi meminerimus eſſe

$$S' = xy - S = a \operatorname{tg}\alpha (a \sin \tfrac{x}{a} - x \cos \tfrac{x}{a}),$$

unde vice verſa ſequitur, in genere eſſe

$$\int \Phi \partial \Phi \sin \Phi = \sin \Phi - \Phi \cos \Phi.$$

Poſito $\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}$, vel $x = BR$, obtinemus aream BRSM'B $= S = a^2 \operatorname{tg}\alpha (\frac{\pi}{2} - 1) = a \operatorname{tg}\alpha (x - a) = xy - ay$, et aream BM'SEB $= S' = a^2 \operatorname{tg}\alpha = ay$. Ducta itaque per punctum G', ubi tangens curvae S'''G' axi abſciſſarum occurrit,

recta

recta G′F′ ad lineam S‴ S normali, area B M‴ S‴ EB aequalis erit rectangulo R‴ F′, area vero B M‴ S‴ R‴ B aequalis rectangulo B F′ (§. 11.).

Caſu $\frac{x}{a} = \pi$ ſeu $x =$ BI, ſit area BM′ SMAIB $=$ S $= \pi a^2 \operatorname{tg} \alpha = a x \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} x y$, atque area BMALB $=$ S′ $= \frac{1}{2} x y$, ergo S′ $=$ S, unde ſequitur, ſegmenta BM′SB et AMSA eſſe aequalia, quod jam ſupra demonſtravimus (§. 8.). Cum ſit area BM′ N′B $=$ S $= a \operatorname{tg} \alpha (x - a \sin \frac{x}{a})$, et triangulum B$m'$N′ $= \frac{1}{2} x .$ N′m' $= \frac{1}{2} x . \frac{\text{RS}}{\text{BR}} x = \frac{x^2 \operatorname{tg} \alpha}{\pi}$, reſultat area BM′$m'$B $= \operatorname{tg} \alpha (\frac{x^2}{\pi} - a x + a^2 \sin \frac{x}{a})$, quae poſito $x =$ BR $= \frac{a\pi}{2}$, abit in aream ſegmenti BM′SB $= a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - \frac{\pi}{4}) = y (a - \frac{x}{2})$, cui ſegmentum AMSA eſt aequale. Biſecta itaque BR‴ in H′, et erecta H′h ad S‴ S normali, ſegmenta BM′ SB, AMSA, etc. ſingula ſunt aequalia rectangulo G′h, ob R‴ G′ $= a$ (§. 11.), R‴ H′ $= \frac{1}{2} x$.

§. 13. Cum area ſuperficiei cylindri BNMF (*Fig.* 6.) inter circulum BNI et ellipſin BMA comprehenſa evolutione non mutetur, expreſſiones modo inventae aream cylindri non minus definiunt. Poſito itaque $\frac{x}{a} = 2\pi$, integra cylindri ſuperficies circulo et ellipſe circumſcripta BIAB eſt $= 2 \pi a^2 \operatorname{tg} \alpha$ (§. 12.) $=$ BNI $\times$ IA, dimidium nempe ſuperficiei cylindri BLAI.

Sin autem area fruſti vel *unguli* cylindrici MWA inter circulum baſi parallelum MW et ellipſin comprehenſi deſideratur, poſito arcu BN $= a\beta$, ideoque NI $=$ MW $= a (\pi - \beta)$, aſſumamus (*Fig.* 7.) MW rectae BN parallelam pro axe, M pro initio abſciſſarum u, appellenturque v ordinatae normales ſuper MW. Quapropter ob BN $= a \beta$, ideoque

NM

$NM = a \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \beta)$, erit $x = a\beta + u$, $y = a \operatorname{tg} \alpha \times (1 - \cos \beta) + v$: quibus valoribus in aequatione $y = a \operatorname{tg} \alpha \times (1 - \cos \frac{x}{a})$ (§. 4.) ſubſtitutis, naſcitur aequatio

$$v = a \operatorname{tg} \alpha (\cos \beta - \cos (\beta + \tfrac{u}{a})).$$

Differentiale areae MAW eſt itaque $= v \partial u$, cujus integrale eſt $\int v \partial u = a \operatorname{tg} \alpha (u \cos \beta - a \sin (\beta + \frac{u}{a}) + a \sin \beta)$, ubi ſubſtituto $u = MW = a (\pi - \beta)$, prodit

$$\text{area } MAWM = a^2 \operatorname{tg} \alpha (\pi \cos \beta - \beta \cos \beta + \sin \beta).$$

Si MP (*Fig.* 6.) per axem D tranſit, MW ſeu NI et BN fiunt quadrantes circuli, punctum M in S cadit, eſtque $\beta = 90°$, BN = BR (*Fig.* 7.), et M cum puncto S coincidit, unde fit

$$v = a \operatorname{tg} \alpha \sin \tfrac{u}{a}, \quad \text{area } SMnS = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \tfrac{u}{a}),$$

ac poſito $u = SO = \frac{\pi}{2} a$, area $SMAO = a^2 \operatorname{tg} \alpha = a \,.\, OA$, h. e. $DV \times VA$ (*Fig.* 6.). Eſt igitur area unguli SAV aequalis rectangulo ACDV vel rectangulo R‴F′ (*Fig.* 7.).

§. 14. Supra (§. 12.) jam invenimus aream BM′SRB, ſeu BSR (*Fig.* 6.) $= a^2 \operatorname{tg} \alpha (\frac{\pi}{2} - 1)$, unde reſultat ſumma ungulorum $BSR + SAV = \frac{\pi}{2} a^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} BNI \times IV$. Eſt autem fruſtum RSVI quarta pars ſuperficiei cylindri, cujus altitudo $= IV$, proinde $RSVI = \frac{1}{2} BNI \times IV$, areaque integra $BNIAB = BNI \times IV$, quarta nempe pars ſuperficiei cylindri BLAI, quod jam ſupra reperimus (§. 13.).

Si ab area SMAO (*Fig.* 7.) $= a^2 \operatorname{tg} \alpha$ (§. 13.) ſubtrahitur triangulum $SAO = \frac{1}{2} SO \,.\, OA = \frac{\pi}{4} a^2 \operatorname{tg} \alpha$, reſtat ſegmentum $SMAS = a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - \frac{\pi}{4})$, ut ſupra (§. 12.). Area S′A′XVS″ eſt

recta G′F′ ad lineam S‴ S normali, area B M‴ S‴ E B aequalis erit rectangulo R‴ F′, area vero B M‴ S‴ R‴ B aequalis rectangulo B F′ (§. 11.).

Caſu $\frac{x}{a} = \pi$ ſeu $x =$ BI, ſit area BM′ SMAIB $=$ S $=$ πa^2 tg $\alpha = ax$ tg $\alpha = \frac{1}{2} xy$, atque area BMALB $=$ S′ $= \frac{1}{2} xy$, ergo S′ $=$ S, unde ſequitur, ſegmenta BM′SB et AMSA eſſe aequalia, quod jam ſupra demonſtravimus (§. 8.). Cum ſit area BM′N′B $=$ S $= a$ tg $\alpha (x - a \sin \frac{x}{a})$, et triangulum B$m'$N′ $= \frac{1}{2} x$. N′m' $= \frac{1}{2} x . \frac{RS}{BR} x = \frac{x^2 \text{tg} \alpha}{\pi}$, reſultat area BM′$m'$B $=$ tg $\alpha (\frac{x^2}{\pi} - ax + a^2 \sin \frac{x}{a})$, quae poſito $x =$ BR $= \frac{a\pi}{2}$, abit in aream ſegmenti BM′SB $= a^2$ tg $\alpha (1 - \frac{\pi}{4}) = y (a - \frac{x}{2})$, cui ſegmentum AMSA eſt aequale. Biſecta itaque BR‴ in H′, et erecta H′h ad S‴ S normali, ſegmenta BM′ SB, AMSA, etc. ſingula ſunt aequalia rectangulo G′h, ob R‴ G′ $= a$ (§. 11.), R‴ H′ $= \frac{1}{2} x$.

§. 13. Cum area ſuperficiei cylindri BNMF (*Fig. 6.*) inter circulum BNI et ellipſin BMA comprehenſa evolutione non mutetur, expreſſiones modo inventae aream cylindri non minus definiunt. Poſito itaque $\frac{x}{a} = 2\pi$, integra cylindri ſuperficies circulo et ellipſe circumſcripta BIAB eſt $= 2\pi a^2$ tg α (§. 12.) $=$ BNI × IA, dimidium nempe ſuperficiei cylindri BLAI.

Sin autem area fruſti vel *unguli* cylindrici MWA inter circulum baſi parallelum MW et ellipſin comprehenſi deſideratur, poſito arcu BN $= a\beta$, ideoque NI $=$ MW $= a (\pi - \beta)$, aſſumamus (*Fig. 7.*) MW rectae BN parallelam pro axe, M pro initio abſciſſarum u, appellenturque v ordinatae normales ſuper MW. Quapropter ob BN $= a \beta$, ideoque NM

NM $= a$ tg α (1 — cos β), erit $x = a\beta + u$, $y = a$ tg $\alpha \times$ (1 — cos β) $+ v$: quibus valoribus in aequatione $y = a$ tg $\alpha \times$ (1 — cos $\frac{x}{a}$) (§. 4.) ſubſtitutis, naſcitur aequatio

$$v = a \text{ tg } \alpha \left(\cos \beta - \cos \left(\beta + \frac{u}{a} \right) \right).$$

Differentiale areae MAW eſt itaque $= v \partial u$, cujus integrale eſt $\int v \partial u = a$ tg $\alpha (u \cos. \beta - a \sin (\beta + \frac{u}{a}) + a \sin \beta)$, ubi ſubſtituto $u =$ MW $= a (\pi - \beta)$, prodit

$$\text{area MAWM} = a^2 \text{ tg } \alpha (\pi \cos \beta - \beta \cos \beta + \sin \beta).$$

Si MP (*Fig.* 6.) per axem D tranſit, MW ſeu NI et BN fiunt quadrantes circuli, punctum M in S cadit, eſtque $\beta = 90°$, BN $=$ BR (*Fig.* 7.), et M cum puncto S coincidit, unde fit

$$v = a \text{ tg } \alpha \sin \frac{u}{a}, \quad \text{area SM}n\text{S} = a^2 \text{ tg} \alpha \left(1 - \cos \frac{u}{a}\right),$$

ac poſito $u =$ SO $= \frac{\pi}{2} a$, area SMAO $= a^2$ tg$\alpha = a$. OA, h. e. DV × VA (*Fig.* 6.). Eſt igitur area unguli SAV aequalis rectangulo ACDV vel rectangulo R‴F′ (*Fig.* 7.).

§. 14. Supra (§. 12.) jam invenimus aream BM′SRB, ſeu BSR (*Fig.* 6.) $= a^2$ tg $\alpha (\frac{\pi}{2} - 1)$, unde reſultat ſumma ungulorum BSR + SAV $= \frac{\pi}{2} a^2$ tg $\alpha = \frac{1}{2}$BNI × IV. Eſt autem fruſtum RSVI quarta pars ſuperficiei cylindri, cujus altitudo $=$ IV, proinde RSVI $= \frac{1}{2}$BNI × IV, areaque integra BNIAB $=$ BNI × IV, quarta nempe pars ſuperficiei cylindri BLAI, quod jam ſupra reperimus (§. 13.).

Si ab area SMAO (*Fig.* 7.) $= a^2$ tg α (§. 13.) ſubtrahitur triangulum SAO $= \frac{1}{2}$SO . OA $= \frac{\pi}{4} a^2$ tg α, reſtat ſegmentum SMAS $= a^2$ tg $\alpha (1 - \frac{\pi}{4})$, ut ſupra (§. 12.). Area S′A′XVS″ eſt

eſt $= a^2 \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \frac{u}{a})$ (§. 13.), et triangulum $S''XV = \frac{1}{2} u v = \frac{1}{2} a u \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{u}{a}$, unde oritur area ſegmenti $S''M'' A'XS'' = a \operatorname{tg} \alpha (a - a \cos \frac{u}{a} - \frac{1}{2} u \sin \frac{u}{a})$, et area ſectoris $S'' A' X S'' = a \operatorname{tg} \alpha (\frac{\pi}{4} a - a \cos \frac{u}{a} - \frac{1}{2} u \sin \frac{u}{a})$.

Rectificatio curvae.

§. 15. Arcus $BM'SM = s$ elementum definitur aequatione $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Eſt autem $\partial y = \partial x \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{x}{a}$ (§. 4.), $(\sin \frac{x}{a})^2 = \frac{y(2a \operatorname{tg} \alpha - y)}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$, unde fit $\partial x^2 = \frac{a^2 \partial y^2}{y(2a \operatorname{tg} \alpha - y)}$,

conſequenter

$$\partial s = \partial x \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \frac{x}{a})}, \text{ ſive}$$
$$\partial s = \partial y \sqrt{\frac{a^2 + 2 a y \operatorname{tg} \alpha - y^2}{y(2 a \operatorname{tg} \alpha - y)}}.$$

Expreſſio arcus expeditior erit aſſumtis coordinatis $Sn = u$, $nM = v$, ut ſit $v = a \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{u}{a}$ (§. 13.). Tunc enim erit

$$\partial v = \partial u \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{u}{a}, \ (\sin \frac{u}{a})^2 = \frac{v^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$
$$(\cos \frac{u}{a})^2 = \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - v^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ proinde } \partial u = \frac{a \partial v}{\sqrt{(a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - v^2)}}, \text{ atque}$$
$$\partial s = \partial v \sqrt{\frac{a^2 \sec^2 \alpha - v^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - v^2}},$$

cujus integratio rectificatione ellipſeos nititur. Aequatio ad ellipſin per coordinatas x, y, e centro in axe transverſo $= 2p$ et conjugato $= 2q$ captas eſt enim $p^2 y^2 = q^2 (p^2 - x^2)$, unde fit $\partial y = - \frac{q x \partial x}{p \sqrt{(p^2 - x^2)}}$, ideoque $\partial s = \frac{\partial x}{p} \sqrt{\frac{p^4 - (p^2 - q^2) x^2}{p^2 - x^2}}$, quae cum noſtra expreſſione prorſus convenit, ſi $q = a$, $p = a \sec \alpha$, et $x = \frac{v}{\sin \alpha} = \frac{p v}{\sqrt{(p^2 - q^2)}}$. Arcus itaque SM aequalis eſt arcui, qui in ellipſe axium $2a$ et $2a \sec \alpha$, abſciſſae a centro in axe majore captae $= \frac{v}{\sin \alpha}$ reſpondet.

Figu-

Figura ſexta Tab. I. clarius id oſtendet. Cum enim arcus elliptici BSA longitudo evolutione mutari nequeat, arcus qui hic quaeritur, eſt $s = SM$. Unde per S ducto plano SV baſi cylindri parallelo, atque recta SD ad planum LI normali, iſta recta nec non interſectio DV plani SV cum plano LI, per axem atque centrum ellipſis tranſibit. Ductis itaque MP, ηd, ad planum LI normalibus, quarum poſterior nd per rectam DV tranſire debet, habemus $Pd = Mn = v = PD \sin ADV$. Eſt autem DV ad axem normalis et rectae BI parallela, unde ſequitur $ADV = ABI = \alpha$, ideoque $v = PD \sin \alpha$. Nuncupatis igitur axibus ellipſis BMA majore ac minore $2p$ et $2q$, et abſciſſa DP arcui SM reſpondente $= x$, ordinata $PM = y$, eſt $p^2 y^2 = q^2 (p^2 - x^2)$, et $\partial s = \frac{\partial x}{p} \sqrt{\frac{p^4 - (p^2 - q^2) x^2}{p^2 - x^2}}$. Eſt autem $p = DA = a \sec \alpha$, $q = DS = a$, et $x = DP = \frac{v}{\sin \alpha}$, quibus valoribus ſubſtitutis formula ſuperior $\partial s = \partial v \sqrt{\frac{a^2 \sec^2 \alpha - v^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - v^2}}$ oritur. Non inutile igitur erit, expreſſionem hanc ulterius evolvere, quoniam ad rectificationem ellipſis perducit.

§. 16. Expreſſionis hujus integrale non niſi ſerie infinita exhiberi poſſe conſtat. Poſito nempe

$$\frac{v}{a} \cot \alpha = z, \quad \text{fit} \quad \partial s = a \partial z \sec \alpha . \sqrt{\frac{1 - z^2 \sin^2 \alpha}{1 - z^2}}.$$

Poſito vero $\sin \alpha = \delta$, eſt $\sqrt{(1 - z^2 \sin^2 \alpha)} =$

$$1 - \frac{\delta^2}{2} . z^2 - \frac{\delta^4}{2} . \frac{z^4}{4} - \frac{\delta^6}{2} . \frac{3 . z^6}{4 . 6} - \frac{\delta^8}{2} . \frac{3 . 5 . z^8}{4 . 6 . 8} - \frac{\delta^{10}}{2} . \frac{3 . 5 . 7 . z^{10}}{4 . 6 . 8 . 10} - \text{cet.}$$

Unde compendii cauſa ſubſtituto $\sqrt{(1 - z^2)} = Z$, fit

$$\frac{s}{a} \cos \alpha = \int \frac{\partial z}{Z} - \frac{\delta^2}{2} \int \frac{z^2 \partial z}{Z} - \frac{\delta^4}{2 . 4} \int \frac{z^4 \partial z}{Z} - \frac{3 . \delta^6}{2 . 4 . 6} \int \frac{z^6 \partial z}{Z} - \text{cet.}$$

Quare cum ſingula haec integralia cognita ſint, puta

$$\int \frac{\partial z}{Z} = \text{Arc. sin } z,$$

$$\int \frac{z^2 \partial z}{Z} = \frac{1}{2} \text{Arc. sin } z - \frac{1}{2} zZ,$$

$$\int \frac{z^4 \partial z}{Z} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \text{Arc. sin } z - \left(\frac{3 \cdot z}{2 \cdot 4} + \frac{z^3}{4}\right) Z,$$

$$\int \frac{z^6 \partial z}{Z} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \text{Arc. sin } z - \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot z}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5 \cdot z^3}{4 \cdot 6} + \frac{z^5}{6}\right) Z,$$

$$\int \frac{z^8 \partial z}{Z} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \text{Arc. sin } z - \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 7 \cdot z^3}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{7 \cdot z^5}{6 \cdot 8} + \frac{z^7}{8}\right) Z,$$

et ſic porro (*), obtinemus $\frac{s}{a} \cos \alpha =$

$$\text{Arc. sin } z \left[1 - \frac{\delta^2}{2^2} - \frac{3 \cdot \delta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{3^2 \cdot 5 \cdot \delta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} - \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot \delta^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot \delta^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^2}{2^2} \cdot zZ \left[1 + \frac{3 \cdot \delta^2}{4^2} + \frac{3^2 \cdot 5 \cdot \delta^4}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot \delta^6}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot \delta^8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^4}{4^2} \cdot \frac{z^3}{2} Z \left[1 + \frac{3 \cdot 5 \cdot \delta^2}{6^2} + \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 7}{6^2 \cdot 8^2} \delta^4 + \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9}{6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} \delta^6 + \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11}{6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} \delta^8 + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^6}{6^2} \cdot \frac{3 \cdot z^5}{2 \cdot 4} \cdot Z \left[1 + \frac{5 \cdot 7}{8^2} \delta^2 + \frac{5 \cdot 7^2 \cdot 9}{8^2 \cdot 10^2} \delta^4 + \frac{5 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11}{8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} \delta^6 + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^8}{8^2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot z^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot Z \left[1 + \frac{7 \cdot 9}{10^2} \delta^2 + \frac{7 \cdot 9^2 \cdot 11}{10^2 \cdot 12^2} \delta^4 + \frac{7 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13}{10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} \delta^6 + \text{cet.}\right]$$

$$+ \frac{\delta^{10}}{10^2} \cdot \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot z^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot Z \left[1 + \frac{9 \cdot 11}{12^2} \delta^2 + \frac{9 \cdot 11^2 \cdot 13}{12^2 \cdot 14^2} \delta^4 + \text{cet.}\right)$$

$$+ \text{etc. etc. etc.}$$

§. 17. Notatu maxime digna eſt lex, ſecundum quam quilibet coëfficiens e proxime antecedente formatur. Quod ſi enim aequationi hanc formam tribuimus

$$\frac{s}{a} \cos \alpha = (1 - A) \text{Arc sin } z + zZ \; B + Cz^2 + Dz^4 + Ez^6 + Fz^8 + \text{cet.}),$$

eſt $B = A = \frac{\delta^2}{2^2} + \frac{3 \cdot \delta^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{3^2 \cdot 5 \cdot \delta^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot \delta^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9 \cdot \delta^{10}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} + \text{cet.}$

Si praeterea ponimus primum coëfficientis B terminum $= b$, primum coëfficientis C terminum $= c$, et ſic porro, ut ſit $b = \frac{\delta^2}{2^2}$, $c = \frac{\delta^4}{2 \cdot 4}$, $d = \frac{3 \cdot \delta^6}{2 \cdot 4 \cdot 6^2}$, $e = \frac{3 \cdot 5 \cdot \delta^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8^2}$, $f = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \delta^{10}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10^2}$, etc. habe-

(*) *V. L. Euleri Calc. Integral. Vol. I. Cap. II. pag. 79.*

habemus

$$c = \frac{1.2}{4^2}.\delta^2 b,\ d = \frac{3.4}{6^2}\delta^2 c = \frac{1.2.3.4}{4^2.6^2}\delta^4 b,$$

$$e = \frac{5.6}{8^2}.\delta^2 d = \frac{1.2.3.4.5.6}{4^2.6^2.8^2}\delta^6 b,\ f = \frac{7.8}{10^2}\delta^2 e = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{4^2.6^2.8^2.10^2}\delta^8 b,$$

et ſic porro, ideoque

$$B = A,\ C = \tfrac{2}{3}(B-b),\ D = \tfrac{4}{5}(C-c),\ E = \tfrac{6}{7}(D-d),\ F = \tfrac{8}{9}(E-e),\ \text{etc.}$$

Formata itaque ſerie

$$B = \frac{\delta^2}{2^2} + \frac{3.\delta^4}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5.\delta^6}{2^2.4^2.6^2} + \frac{3^2.5^2.7.\delta^8}{2^2.4^2.6^2.8^2} + \text{cet.}$$

cujus terminos dicamus b, b', b'', b''', b^{IV}, etc. ut ſit

$$B = b + b' + b'' + b''' + b^{IV} + b^{V} + \text{cet.}$$

praeterea computentur numeri

$$c = \tfrac{2}{3}b',\ d = \tfrac{2.4}{3.5}b'',\ e = \tfrac{2.4.6}{3.5.7}b''',\ f = \tfrac{2.4.6.8}{3.5.7.9}b^{IV},\ \text{etc.}$$

ſive poſito

$$\tfrac{2}{3} = \beta,\ \tfrac{4}{5} = \gamma,\ \tfrac{6}{7} = \delta,\ \tfrac{8}{9} = \varepsilon,\ \tfrac{10}{11} = \zeta,\ \text{etc.}$$

ſupputentur numeri

$$c = \beta b',\ d = \beta\gamma b'',\ e = \beta\gamma\delta b''',\ f = \beta\gamma\delta\varepsilon b^{IV},\ \text{etc.}$$

Quibus praemiſſis erit

$$A = B = b + b' + b'' + b''' + b^{IV} + b^{V} + \text{cet. atque}$$

$$C = \beta(B - b),\ D = \gamma(C - c),\ E = \delta(D - d),\ F = \varepsilon(E - e),$$
$$G = \zeta(F - f),\ \text{etc.}$$

ideoque tandem

$$s = a \,\text{ſec}\,\alpha\,(1 - A)\ \text{Arc. sin.}\tfrac{v}{a}\cot\alpha$$
$$+ v\,\text{ſec}\,\alpha\cot\alpha.\sqrt{(1 - \tfrac{v^2}{a^2}\cot^2\alpha)}\ [B + C.\tfrac{v^2}{a^2}\cot^2\alpha + D.\tfrac{v^4}{a^4}\cot^4\alpha$$
$$+ E.\tfrac{v^6}{a^6}\cot^6\alpha + F\tfrac{v^8}{a^8}\cot^8\alpha + \text{cet.})$$

§. 18. Cum ſit (*Fig.* 6.) $v = Pd$, ideoque $v\cot\alpha = Dd$, ſemper erit $\frac{v}{a}\cot\alpha = \frac{Dd}{DV}$ unitate minor; unde cum etiam qui-

 libet

libet coëfficiens C, D, etc. minor ſit antecedente B, C, etc. ſeries $B + C\frac{v^2}{a^2}\cot^2\alpha +$ cet. ſemper converget, etiamſi $\frac{v}{a}\cot\alpha$ maximum induat valorem $\frac{DV}{DV} = 1$. Praeterea hocce caſu, vel quando $\frac{v}{a}\cot\alpha$ unitati valde appropinquat, $\sqrt{(1 - \frac{v^2}{a^2}\cot^2\alpha)}$ prae priore parte Arc. sin. $\frac{v}{a}\cot\alpha$ evaneſcit.

Poſito $v = OA = a\ \mathrm{tg}\,\alpha$ (*Fig.* 7.) ſeu $v = VA$ (*Fig.* 6.), arcus $s = SMA$ quarta eſt pars ellipſeos ejusque evolutae, unde ſi hac ſubſtitutione facta $\frac{v}{a} = \mathrm{tg}\,\alpha$ ſeu $\frac{v}{a}\cot\alpha = 1$, ſeriem s quater ſumimus, tandem obtinetur arcus ſeu longitudo totius ellipſis, vel evolutae

$$BSMA\ S'B' = 2\pi a\,(1 - A)\sec\alpha.$$

§. 19. Quod ſi expreſſionem arcus evoluti s, hic repertam ellipſi accommodare volumus, meminiſſe oportet, ſemiaxes q, p, ellipſis ad quam hic arcus pertinet, eſſe a et $a\sec\alpha$, abſciſſam a centro autem $x = \frac{v}{\sin\alpha}$, unde fit $\sec\alpha = \frac{p}{q}$, $\cos\alpha = \frac{q}{p}$; $v\cot\alpha = x\cos\alpha = \frac{q}{p}x$, $\frac{v}{a}\cot\alpha = \frac{x}{p}$, ideoque arcus

$$s = p\,(1 - B)\ \mathrm{Arc.\ sin}\ \frac{x}{p} + \frac{x}{p}\left(B + C\frac{x^2}{p^2} + D\frac{x^4}{p^4} + E\frac{x^6}{p^6} + F\frac{x^8}{p^8} + G\frac{x^{10}}{p^{10}} + \text{cet.}\right)\sqrt{(p^2 - x^2)},$$

et arcus integrae ellipſis $= 2\pi p\,(1 - A)$.

In computandis vero quantitatibus B, C, D, etc. meminiſſe oportet, eſſe hic $\delta^2 = \sin^2\alpha$ (§. 16.) $= \frac{p^2 - q^2}{p^2}$, unde ſequitur, δ eſſe eccentricitatem ellipſis.

SOLUTION
DE QUELQUES PROBLEMES REMARQUABLES DE L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

PAR

Mr. C. F. KAUSLER.

Préſenté à l'Académie le 29 Novembre 1798.

§. 1.

Dans le Tome X des nouveaux Actes de l'Académie, page 27 — 40 on trouve un excellent mémoire du grand Euler, intitulé: „De casibus, quibus hanc formulam $x^4 \pm K x^2 y^2 + y^4$, ad Quadratum reducere licet." Cet illuſtre auteur, auquel l'Analyſe de Diophante doit tant de belles découvertes, y donne une méthode pour trouver un nombre infini de valeurs de K (qu'on ſuppoſe un nombre entier), pour les quelles il eſt très-facile de déterminer les x et y qui rendent cette formule égale à un carré parfait. Ces valeurs de K ſont toutes compriſes dans l'expreſſion $K = (n^2 - 4) z^2 \pm n$, dans laquelle n et z repréſentent des nombres rationels quelconques, pourvûque la valeur de K qui en réſulte, ſoit un nombre entier. Cependant quelqu'ingénieuſe que ſoit cette méthode, la ſolution de M. Euler paroit être indirecte, ſes ſuppoſitions étant arbitraires et plûtot l'effet d'un heureux haſard: d'ailleurs on ne voit

pas

pas clairement que ces valeurs de K, contenues dans l'expreſſion qu'il trouve, ſoient les ſeules où la ſolution de l'équation propoſée devient poſſible. Indépendamment de cette difficulté que je n'ai crû pouvoir lever qu'en prenant une route abſolument différente de celle de ce grand Géomêtre, il y a encore une autre circonſtance qui merite une attention particulière. La voici: Si, comme nous allons le démontrer rigoureuſement dans les articles ſuivans, l'expreſſion $(n^2 - 4) z^2 \pm n$ renferme toutes les valeurs poſſibles de K, pour lesquelles l'équation $x^4 + K x^2 y^2 + y^4 = \square$ devient ſoluble; ce n'eſt pas dans la seule ſuppoſition que n et z ſont des nombres entiers, mais encore dans celle qu'ils ſont des fractions qui, ſubſtituées dans cette formule, la rendent égale à un nombre entier. Or la découverte de ces dernières préſenté de ſi grandes difficultés, que M. Euler, à la fin du mémoire mentionné, p. 46, en fait un Problême particulier, qu'il propoſe en ces termes: „Invenire methodum, cujus ope „omnes numeri integri aſſignari queant, qui ex formula „$(n^2 - 4) z^2 \pm n$ reſultare poſſint, ſi loco litterarum n et z „non ſolum numeri integri, ſed etiam fracti accipiantur."

Toutes ces conſidérations m'ont engagé à m'occuper de cette même queſtion, et mes recherches, ſi je ne me trompe, n'ont pas été tout-à-fait infructueuſes: C'eſt-ce qui me fait haſarder de les ſoumettre ici à l'examen des connoiſſeurs.

Probleme.

§. 2. Le nombre K étant un nombre entier quelconque, on cherche les valeurs de x et y, qui rendent l'expreſſion $x^4 + K x^2 y^2 + y^4$ égale à un carré.

Solu-

Solution.

Comme $x^4 + K x^2 y^2 + y^4 = \Box$; on aura, en diviſant de part et d'autre par le carré y^4

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + K\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \Box, \text{ ou bien, en mettant } \frac{x}{y} = z;$$

$$1 + Kz^2 + z^4 = \Box.$$

Cette équation du quatrième dégré eſt du nombre de celles, pour la ſolution desquelles la ſeule méthode, connue jusqu'ici, reſte en défaut. (Voyez les élémens d'Algèbre de M. Euler, Tome II, chapitre IX, §. 132, 133, etc.). Or, en examinant attentivement les raiſons, pourquoi la méthode générale de cet auteur, de transformer l'équation $f^2 + az + bz^2 + cz^3 + ez^4$ en carré, ne méne à rien lorsqu'elle eſt appliquée au cas particulier $a = c = 0$, qui eſt celui dont il s'agit ici, on trouve aiſément, que les ſuppoſitions qui ſervent de baſe dans la ſolution de l'équation générale, ne peuvent avoir lieu dans le cas particulier $f^2 + bz^2 + ez^4$; puisque cette dernière équation qu'on peut repréſenter ſous la forme $f^2 + b(z^2) + e(z^2)^2$, doit plutôt être miſe dans la claſſe de celles du ſecond dégré. En effet, s'il exiſte une méthode de trouver toutes les valeurs poſſibles de Z, qui changent l'équation $f^2 + bZ + eZ^2$ en carré, l'équation $f^2 + bz^2 + ez^4 = \Box$ pourra être réſolue auſſi: puisqu'on n'a qu'à prendre parmi toutes les valeurs de Z celles qui ſont des carrés z^2, s'il s'en trouve quelques-unes: et en cas qu'il ne s'en trouve point, on pourra être ſûr que la formule: $f^2 + bz^2 + ez^4$ ne peut jamais devenir un carré. Or, il n'eſt pas difficile de trouver une expreſſion, renfermant toutes les valeurs rationelles poſſibles de Z qui ſatisfont à la condition

dition $f^2+bZ+eZ^2=\square$; tout revient par conſéquent à choiſir, parmi ces valeurs de Z celles qui ſont en même tems des carrés. Mettons pour cela

$$f^2+bZ+eZ^2=P^2, \text{ et il y aura: }$$
$$Z(b+eZ)=(P+f)(P-f);$$

ou bien, en introduiſant la quantité rafionelle et indeterminée A:

$$Z(b+eZ)=A(P+f)\left(\frac{P-f}{A}\right),$$

et comme cette équation renferme ces trois indeterminées Z, A, et P; rien n'empêche de faire les deux ſuppoſitions ſuivantes:

$$b+eZ=A(P+f) \text{ et } Z=\frac{P-f}{A}$$

chaſſant donc P de ces équations, on obtient

$$Z=\frac{2fA-b}{e-A^2}$$

ou, puisque la quantité A peut être priſe indifféremment en plus ou moins:

$$Z=\frac{b\pm 2fA}{A^2-e}.$$

Ainſi chaque valeur de A donne deux valeurs de Z, qui ſubſtituées dans la formule $f^2+bZ+eZ^2$ la changent en carré. Or je dis que toutes les valeurs poſſibles de Z ſont contenues dans la formule $Z=\frac{b\pm 2fA}{A^2-e}$. Pour le prouver, il faut donc faire voir, qu'il n'y a aucune valeur rationelle de Z qui ſatisfaſſe à la condition $f^2+bZ+eZ^2=\square$ qui ne puiſſe être deduite de quelque valeur rationelle de A dans la formule $Z=\frac{b\pm 2fA}{A^2-e}$. Car ſi Z′ étoit une de ces valeurs, en mettant $\frac{b\pm 2fA}{A^2-e}=Z'$, on trouveroit pour A une

quan-

quantité irrationelle. Or $A = \frac{\pm f \pm \sqrt{(f^2 + bZ' + eZ'^2)}}{Z'}$, et $f^2 + bZ' + eZ'^2$ eſt un carré. Donc A eſt une quantité rationelle. Puisqu'il eſt donc clair qu'à chaque Z' qui ſatisfait à la condition $f^2 + bZ' + eZ'^2 = \square$, il repond un A rationel, on voit que la formule $Z = \frac{b \pm 2fA}{A^2 - e}$ contient tous les nombres rationels poſſibles, qui ſubſtitués dans la formule en queſtion, la rendent égale à un carré. Il ne reſte plus maintenant qu'à trouver parmi cette infinité de valeurs de Z provenant de la ſuppoſition A = à un nombre rationel quelconque, celles qui ſont en même tems des carrés. Pour cela je remarque que l'équation à réſoudre étant $1 + Kz^2 + z^4$, en peut ſimplifier ces recherches en faiſant $f = e = 1$, et $b = K$; ce qui donne:

$$Z = \frac{K \pm 2A}{A^2 - 1}.$$

On demande donc, quelles valeurs on doit donner à A pour que cette formule devienne un carré? Pour reſoudre ce probleme nous diſtingueions les deux cas 1) A = à un nombre entier, et 2) A = à une fraction.

Solution de l'équation $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1} = \square$ dans la ſuppoſition que A ſoit un nombre entier.

§. 3. Comme, dans cette ſuppoſition, la quantité $A^2 - 1$ ne peut jamais être un carré, la formule $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1}$ ne ſauroit être un carré, à moins que $K \pm 2A$ ne ſoit $= mp^2$, et $A^2 - 1 = mq^2$. De la première équation on obtient $A = \frac{mp^2 - K}{2}$, et cette valeur, ſubſtituée dans la ſeconde donne:

$$K^2 - 4 - 2mKp^2 + m^2p^4 = 4mq^2.$$

 Or

Or K, m, p et q ſont des nombres entiers: par conſéquent le terme $K^2 - 4$ doit être diviſible par m; c'eſt-à-dire il faut que m ſoit un des facteurs de $K^2 - 4$. Cela poſé, revenons aux deux équations $A = \frac{mp^2 \pm K}{2}$, et $A = \sqrt{(1 + mq^2)}$, dont chacune peut fournir une ſuite de nombres entiers. Pour obtenir ceux de la première, il ſuffit de mettre ſucceſſivement pour p tous les nombres entiers qui rendent la quantité $mp^2 - K$ diviſible par 2. Quant à ceux de la ſeconde, on emploira la méthode que M. La Grange a donnée dans ſes additions aux Élémens d'Algèbre de M. Euler Tome II. Chap. VII. §. 75, et qui conſiſte à chercher d'abord la plus petite valeur V de q, qui rend l'expreſſion $1 + mq^2$ égale à un carré T^2, et à deduire enſuite toutes les autres valeurs poſſibles de A et de q des formules

$$A = T^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} m T^{n-2} V^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} m^2 T^{n-4} V^4$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} m^3 T^{n-6} V^6 + \text{etc.}$$

$$\text{et} \quad q = n T^{n-1} V + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} m T^{n-3} V^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} m^2 T^{n-5} V^5 + \text{etc.}$$

en y mettant pour n tous les nombres naturels. Ainſi, s'il exiſte un nombre entier A qui rende la formule $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1}$ égale à un carré $\frac{p^2}{q^2}$; il faut que ce nombre ſoit commun aux deux ſéries dont nous venons de parler. Si donc, en les continuant l'une et l'autre, on parvient à un terme commun, auquel repondent les valeurs p et q, on aura $Z = \frac{p}{q}$. Mais ſi, après avoir parcouru tous les facteurs m de $K^2 - 4$ et calculé pour chacun d'eux les deux ſéries au de là d'un certain terme auquel repondent les valeurs P et Q, on n'en trouve

trouve aucun qui ſoit commun aux deux ſéries, c'eſt une preuve que, s'il exiſte un nombre entier A qui change la formule propoſée en carré, la valeur de Z qui en reſulte ſera exprimée par une fraction, dont le numérateur eſt néceſſairement plus grand que P, et le dénominateur plus grand que Q.

Comme les valeurs de A réſultant de l'éxpreſſion $\surd(1 + mq^2)$ croiſſent toujours fort vîte, on peut abréger les calculs précédens. Car après avoir trouvé un certain nombre de valeurs de A, il ſuffit d'égaler à chacune d'elles la premiere expreſſion $\frac{mp^2 - K}{2}$; et de voir ſi $\frac{2A + K}{m}$ eſt égal à un carré p^2. De cette manière on ſera dispenſé de calculer la ſerie des nombres reſultant de $\frac{mp^2 - K}{2}$.

§. 4. Cette méthode de trouver les nombres entiers A, ainſi que celle que nous allons donner dans l'article ſuivant pour les valeurs fractionaires de cette quantité, eſt imparfaite; puisqu'elle ne donne point de terme fixe par lequel on puiſſe juger de la poſſibilité ou de l'impoſſibilité de la ſolution de l'équation $Z = \frac{\delta \pm \surd A}{A - 1}$: car pour reconnoître cette dernière il eſt des cas, où l'on feroit obligé de prolonger les deux ſéries à l'infini Auſſi je ne la détaille ici que pour faire voir les difficultés que préſente une ſolution directe, et pour juſtifier la ſolution indirecte à laquelle on eſt obligé d'avoir recours, et qui ſera le principal objet de ce mémoire. Au reſte ſi Z eſt une fraction, dont le numérateur et le dénominateur ſont des nombres aſſez petits, comme le ſont tous ceux de la table calculée par M. Euler dans le mémoire mentionné, cette méthode donne toujours

des ſolutions fort ſimples, comme on peut s'en convaincre par les exemples ajoutés cy-après.

II. Solution de l'équation $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1} = \square$ dans la ſuppoſition que A ſoit une fraction.

§. 5. Si $A = \frac{u}{v}$ (u et v étant des nombres premiers entr'eux), il y aura:

$$\frac{K \pm \frac{2u}{v}}{\frac{u^u}{v^2} - 1} = v\left(\frac{Kv \pm 2u}{u^2 - v^2}\right) = \square,$$

et cette équation ne peut ſubſiſter que dans les deux cas ſuivans: 1) ſi $v = 2$, et
2) ſi $v = \square = r^2$.

1) Si $v = 2$, on aura

$$4\frac{(K \pm u)}{u^2 - 4} = \square; \text{ par conſéquent } \frac{K \pm u}{u^2 - 4} = \square.$$

Or v et u ſont premiers entr'eux, donc u doit être impair; et puisqu'il n'y a point de nombre entier u, dont le carré diminué de 4 ſoit égal à un carré; on ne peut faire ici que la ſeule ſuppoſition: $K \pm u = mp^2$, et $u^2 - 4 = mq^2$. Parconſéquent $K^2 - 4 - 2mKp^2 + m^2p^4 = mq^2$. Il faut donc, comme dans la ſolution précédente, que m ſoit un des facteurs de $K^2 - 4$. Ainſi les équations $u = \sqrt{(4 + mq^2)}$ et $\frac{K \pm u}{m} = \square = p^2$ ſemblables à celles du cas précédant, peuvent être traitées de la même manière, et conduiront à des réſultats ſemblables. On remarquera ſeulement que u étant un nombre impair, le cas dont il eſt queſtion ici, ne peut s'appliquer qu'aux facteurs impairs de $K^2 - 4$, et que par la même raiſon, q doit être également un nombre impair. Enfin Z ſera $= 2\sqrt{\frac{(K \pm u)}{u^2 - 4}} = \frac{2p}{q}$.

2) Si

2) Si $v = r^2$, on aura:

$r^2 \frac{(Kr^2 \pm 2u)}{u^2 - r^4}$ et par conſéquent auſſi $\frac{Kr^2 \pm 2u}{u^2 - r^4} = \square$.

Cette équation admet les deux ſuppoſitions ſuivantes:

$Kr^2 \pm 2u = p^2$, et $u^2 - r^4 = q^2$; et

$Kr^2 \pm 2u = mp^2$, et $u^2 - r^4 = mq^2$.

Commençons par la premiére, en faiſant $Kr^2 \pm 2u = p^2$, et $u^2 - r^4 = q^2$. Or il eſt facile de démontrer que, pour que cette dernière équation puiſſe avoir lieu, u ſera $= (\frac{B^2+1}{B^2-1}) r^2$, où B eſt un nombre arbitraire quelconque. Or u et r ſont des nombres entiers et premiers entr'eux; il faut donc que $r^2 = B^2 - 1$, mais comme cette équation eſt impoſſible, ſi B eſt un nombre entier, faiſons $B = \frac{m}{n}$; par conſéquent u ſera $= \frac{(m^2 + n^2) r^2}{m^2 - n^2}$, où l'on voit, qu'il faut néceſſairement que le dénominateur $m^2 - n^2$ ſoit $= r^2$, ce qui donne $u = m^2 + n^2$ et $Z = \frac{rp}{q}$. On prendra donc pour m et n ſucceſſivement tous les nombres entiers tels que $m^2 - n^2 = \square = r^2$, et on verra ſi permi ces valeurs qui vont toutes en augmentant, il s'en trouve, qui ſatisfont en même tems à la première équation $Kr^2 \pm 2(m^2 + n^2) = \square = p^2$. De cette manière on pourra toujours ſe convaincre, ſi, ſur cette route, il exiſte des valeurs de Z audeſſous d'un certain terme.

Enfin, ſi $Kr^2 \pm 2u = mp^2$, et $u^2 - 4 = mq^2$; on prouvera, comme dans les cas précédens, que le nombre m ne peut être qu'un des facteurs de $K^2 - 4$. Cela poſé on aura: $(u + r^2)(u - r^2) = Dmq \cdot \frac{q}{D}$, par conſéquent en mettant $u + r^2 = mDq$, et $u - r^2 = \frac{q}{D}$, q ſera $= \frac{2r^2D}{D^2 - m}$, et $\frac{q}{r^2} = \frac{2D}{D^2 - m}$. Or q et r étant des nombres entiers et premiers entr'eux, on

on a deux moyens de ſatisfaire à cette dernière équation ſelon qu'on prend pour D un nombre entier ou une fraction. Dans le premier cas, on cherchera pour chaque facteur m, un ou pluſieurs D, tels que $D^2 - m$, ou $m - D^2 = \square$, examen qui n'a pas la moindre difficulté. Si aucun des facteurs de $K^2 - 4$ ne donne un D en nombres entiers, on abandonnera cette formule pour s'attacher enſuite à l'examen du dernier cas: D = à une fraction. Mais ſi on trouve une ou pluſieurs valeurs de D en nombres entiers, on fera $D^2 - m$, ou $m - D^2 = r^2$ et $q = 2D$, ce qui donne $u = r^2 + \frac{q}{D} = r^2 \pm 2$: où il reſte encore à voir, ſi ces valeurs ſont telles que $\frac{Kr^2 \pm 2u}{m} = \square = p^2$, ou non? Dans le premier cas le probleme eſt réſolu et $Z = \frac{rp}{q}$; dans l'autre on procédera à la dernière ſuppoſition D = à une fraction. Soit donc $D = \frac{u}{\omega}$, et $\frac{q}{r^2}$ ſera $= \frac{2u\omega}{u^2 - m\omega^2}$. Ainſi, en faiſant $q = 2u\omega$ et $r^2 = u^2 - m\omega^2$, le probleme eſt reduit à chercher deux nombres ω et r, qui ſoient premiers entr'eux et tels que $r^2 + m\omega^2 = \square = u^2$. Mais cette queſtion n'a pas la moindre difficulté; car en employant la méthode dont nous nous ſommes ſervis jusqu'ici, on trouve $\frac{\omega}{r} = \frac{2t\gamma}{\gamma^2 - mt^2}$, où γ et t ſont des nombres arbitraires quelconques; ainſi on fera $\omega = 2t\gamma$, et $r = \gamma^2 - mt^2$. En mettant donc pour γ et t tous les nombres naturels, on trouve des valeurs de r et q qui vont toujours en augmentant; et il ne reſte plus qu'à voir, s'il y en a parmi elles qui ſatisfont auſſi à l'équation $\frac{Kr^2 \pm 2u}{m} = \square = p^2$. Voilà donc toutes les routes ſur lesquelles on doit chercher les valeurs z, dans l'équation $1 + Kz^2 + z^4 = \square$, et ſur une ou pluſieurs desquelles elles doivent néceſſairement ſe trouver, ſi cette équation eſt ſoluble.

Eclai-

Eclairciſſons maintenant cette méthode par quelques exemples.

Exemple I.

§. 6. On cherche une valeur rationelle de Z qui change l'équation $1 + 13\,Z^2 + Z^4$ en carré.
Ici $K = 13$; donc $K^2 - 4 = 3 \cdot 5 \cdot 11$; par conſéquent les valeurs de m ſont: 3, 5, 11, 15, 33, 55, et 165. Prenons la plus petite de ces valeurs en faiſant $m = 3$. Ainſi $A = \surd(1 + 3q^2)$. Or la plus petite valeur V de q qui ſatisfait à cette équation eſt $= 1$, et $T = \surd(1 + 3\,V^2) = 2$; on aura donc en général:

$$A = 2^n + n\frac{(n-1)}{2}\,3 \cdot 2^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,3^2 \cdot 2^{n-4} + \text{etc. et}$$

$$q = n \cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot 3 \cdot 2^{n-3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} \cdot 3^2 \cdot 2^{n-5} + \text{etc.}$$

et en mettant ſucceſſivement pour n les nombres 1, 2, 3 etc. on obtient ces deux ſuites:

$A = 2,\ 7,\ 26,\ 97.$ etc.
$q = 1,\ 4,\ 15,\ 56$ etc.

Maintenant il faut voir encore, ſi parmi ces valeurs de A il s'en trouve une qui ſoit auſſi compriſe dans la formule $\frac{mp^2 - K}{2}$, c'eſt-à-dire: dans l'expreſſion $\frac{3p^2 - 13}{2}$; où il eſt clair qu'on ne peut prendre pour p que des nombres impairs; ce qui donne les ſeries ſuivantes:

$\frac{3p^2 - 13}{2} = -\ 5,\ 7,\ 31,\ 67$ etc. et
$p = 1,\ 3,\ 5,\ 7.$ etc.

où l'on voit, que le terme 7 eſt commun aux deux ſéries qui contiennent les valeurs de A: par conſéquent on aura $Z = \frac{p}{q} = \frac{3}{4}$, et cette valeur change l'équation
$1 + 13\,Z^2 + Z^4$ en $(\frac{47}{16})^2$.

Au lieu de calculer la ſuite des valeurs de $\frac{3p^2-13}{q}$, on auroit pû mettre auſſi cette formule égale à toutes les valeurs de A, tirées de l'expreſſion $\sqrt{(1+3q^2)}$, ce qui eut donné autant d'équations pour p qu'on a calculé de termes dans la ſérie repréſentant A. Si parmi ces p, il s'en trouve un qui ſoit rationel, le problème eſt réſolu: ſi non, on continuera la ſérie des valeurs de A, ou on prendra un autre facteur de $K^2 - 4$, pour l'aſſujetir à un examen ſemblable. Mais ſi tous ces facteurs ne mènent à rien; c'eſt une preuve, que ſi l'équation propoſée eſt ſoluble, ce ſera ou par des A entiers plus grands que ceux qui ſont les derniers termes des ſéries calculées, ou par des A qui ſont des fractions.

Exemple II.

§. 7. La formule qu'on doit reduire en carré, eſt celle-ci $1 + 57 Z^2 + Z^4$.

On a donc ici $K = 57$; et $K^2 - 4 = 5.11.59$; par conſéquent les valeurs de m ſont 5, 11, 55, 59, 295, 649, 3245. Mais de toutes ces valeurs il n'en reſulte aucune pour Z, dont le numérateur et le dénominateur ſoient audeſſous de cent. Puisque donc la ſuppoſition A = à un nombre entier, ſi toute fois elle ſatisfait à la demande, ne donne que des valeurs exprimées par beaucoup de chiffres, il nous reſte encore à parcourir les cas, où A eſt une fraction. Nous aurons donc (§. 5. N. 1); les deux équations $u = \sqrt{(4 + mq^2)}$ et $\frac{k+u}{m} = p^2$; où q ne peut être qu'un nombre impair. Prenons encore pour m la plus petite valeur 5. Donc $q = 1$; mais ce nombre ne donne aucune valeur rationelle pour p, non plus que $q = 3$. Enfin en cherchant des valeurs toujours

jours plus grandes, on trouve $q = 55$, à qui repond $p = 6$. par conſéquent $K = 2 . \frac{p}{q} = \frac{12}{55}$, qui eſt la même valeur que celle que M. Euler a trouvée pour ce cas.

En général, ſi p eſt un nombre impair, K étant impair, les formules $\frac{mp^2 - K}{2}$ et $\sqrt{(1 + mq^2)}$ ſatisferont toujours à la demande, et ſi p eſt pair, c'eſt aux autres qu'il faudra recourir.

§. 8. L'imperfection de notre méthode qui ne nous éclaircit pas ſur les cas où la ſolution devient impoſſible, nous fait recourir à un autre moyen de réſoudre l'équation propoſée, qui quoiqu'il ſoit indirecte, eſt pourtant le ſeul qui nous reſte. Ce moyen conſiſte, à chercher au lieu de Z, toutes les valeurs poſſibles de K qui admettent une ſolution, et à déterminer enſuite les Z qui leur repondent. Les autres K qui ſe trouveront exclus, feront ceux pour lesquels la ſolution devient impoſſible.

§. 9. Reprenons pour cet effet les équations $K \pm 2A = mp^2$, et $A^2 - 1 = mq^2$, trouvées pour le cas A = à un nombre entier, où m eſt un nombre entier non-carré quelconque, et p et q des nombres entiers. Or la ſeconde de ces équations donne $A = \sqrt{(1 + mq^2)}$, et cette valeur ſubſtituée dans la première la change en $K = mp^2 \pm 2\sqrt{(1 + mq^2)}$. En prenant donc pour m un nombre non-carré quelcooque, on trouve par la méthode dont nous avons fait mention plus haut, un nombre infini de valeurs de q en nombres entiers qui rendent l'expreſſion $\sqrt{(1 + mq^2)}$ rationelle; et comme p peut-être pris à volonté; chaque valeur de q donnera une infinité de valeurs différentes de K, pour les quel-

quelles la ſolution de l'équation propoſée eſt très-facile, Z étant $\frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}$.

Cette expreſſion de K eſt la même que celle que M. Euler a trouvée §. 7. de ſon mémoire, par une méthode très-différente de celle dont je me ſuis ſervi ici.

Donnons une autre forme à cette valeur de K, en y mettant pour m ſa valeur $\frac{A^2-1}{q^2}$, ce qui donne $K = (A^2 - 1)\left(\frac{p}{q}\right)^2 \pm 2A$; ou bien en faiſant $2A = n$, et $\frac{p}{q} = 2Z$; $K = (n^2 - 4)Z^2 \pm n$, et cette expreſſion, auſſi bien que la première, renferme une infinité de valeur de K. Or A et par conſéquent auſſi n repréſente ici un nombre entier tandisque Z peut-être indifiérement un nombre entier ou une fraction. Le problème eſt donc réduit à chercher toutes les valeurs de n (qu'on ſuppoſe ici être un nombre entier) et de Z, qui ſoyent telles que $(n^2 - 4)Z^2 \pm n$ devienne un nombre entier.

Examinons maintenant auſſi le cas: A = à une fraction et poſons $\frac{K \pm 2A}{A^2 - 1} = t^2$ (où t peut être entier ou une fraction) et il y aura $K = (A^2 - 1)t^2 \pm 2A$. Soit encore la fraction $A = \frac{n}{2}$ (n étant un nombre impair ou une fraction quelconque); par conſéquent $K = (n^2 - 4)\left(\frac{t}{2}\right)^2 \pm n = (n^2 - 4)Z^2 \pm n$, ſi $\frac{t}{2} = Z$. Cette expreſſion de K eſt parfaitement la même que celle du cas précédant, avec cette différence ſeulement que la quantité n repréſente ici auſſi une fraction.

Soit donc qu'on regarde A comme nombre entier, ou comme fraction, les valeurs de K, pour les quelles l'équation $1 + Kz^2 + z^4 = \square$ devient ſoluble, ſont toutes contenues dans l'expreſſion $K = (n^2 - 4)Z^2 \pm n$, pourvûque n et Z ſigni-

ſignifient non ſeulement des nombres entiers, mais encore des fractions. Et d'après ce que nous avons demontré plus haut, il ne ſauroit y avoir d'autres valeurs de K, pour lesquelles la ſolution devient poſſible, que celles renfermées dans cette formule. Tout revient par conſéquent à chercher tous les n et Z rationels qui rendent l'expreſſion $(n^2 - 4)Z^2 \pm n$ égale à un nombre entier: et voilà le problême dont nous avons fait mention au commencement de ce mémoire et que nous allons reſoudre dans les articles ſuivans.

Probleme.

§. 10. Trouver tous les nombres entiers contenus dans la formule: $K = (n^2 - 4) Z^2 + n$, ſi n et Z ſignifient non ſeulement des nombres entiers, mais encore des fractions.

Solution.

Il eſt clair, qu'on ne peut faire que les quatre ſuppoſitions ſuivantes:

1) n et Z des nombres entiers.

2) n un nombre entier et Z une fraction.

3) n une fraction et Z un nombre entier.

4) n et Z des fractions.

I.) Le premier cas n'a pas la moindre difficulté, et pour le reſoudre il ſuffit de ſubſtituer ſucceſſivement pour n et Z tous les nombres naturels, combinés de toutes les manières poſſibles. C'eſt ainſi qu'on obtient pour K les valeurs ſuivantes au deſſous de 100.

2, 8, 16, 17, 23, 26, 38, 42, 44, 48, 52, 68, 77, 79, 83, 86, 89,

 aux-

auxquelles on pourroit encore ajouter tous les nombres provenant de la ſuppoſition $n = 2N$, et $Z = \frac{1}{2}T$, et contenus dans la formule $(N^2 - 1) T^2 + 2N$; mais ils ſe trouveront auſſi compris dans les cas ſuivans.

II.) En ſuppoſant ſecondement que n ſoit un nombre entier et Z une fraction, il eſt encore très-facile de trouver tous les K poſſibles. Car ſi $Z = \frac{p}{q}$, on aura $K = \frac{(n^2-4)p^2}{q^2} \pm n$. Donc puisque n et K ſont des nombres entiers, et p et q premiers entr'eux, $n^2 - 4$ ſera diviſible par q^2; c'eſt-à-dire: il faut que $\frac{(n+2)(n-2)}{q^2}$ ſoit égal à un nombre entier. De là reſultent les deux cas ſuivans:

1) $\frac{n+2}{q^2} = \beta$, par conſéquent $n - 2 = \beta q^2 - 4$, et
$K = \beta(\beta q^2 - 4) \pm (\beta q^2 - 2)$.

2) $\frac{n-2}{q^2} = \beta$; donc $n = \beta q^2 + 2$, et $K = \beta(\beta q^2 + 4) \pm (\beta q^2 + 2)$
où β et q peuvent être des nombres entiers quelconques.

À ces valeurs de K on peut encore ajouter toutes celles qui, pour le cas $q = 2Q$, proviennent de la ſuppoſition $\beta = \frac{\beta'}{2}$ et qui ſeront compriſes dans ces deux expreſſions:

$$K = \beta'(\beta' Q^2 - 2) \pm 2(\beta' Q^2 - 1) \text{ et}$$
$$K = \beta'(\beta' Q^2 + 2) \pm 2(\beta' Q^2 + 1).$$

Ces formules donnent les nouvelles valeurs ſuivantes:
7, 12, 13, 14, 19, 24, 31, 33, 34, 39, 43, 49, 56, 62, 64, 66, 78, 92, 94, 98.

III.) Si n eſt une fraction, et Z un nombre entier ou une fraction, on a $Z^2 = \frac{K \pm n}{n^2 - 4}$. Diſtinguons d'abord les deux

cas

cas du ſigne ſuperieur et du ſigne inférieur, en examinant premièrement la formule $Z^2 = \frac{K^2 - n}{n^2 - 4}$.

Comme n eſt une fraction, nous mettrons cette quantité $= \frac{p}{q}$; (p et q étant des nombres entiers et premiers entr'eux); par conſéquent $Z^2 = q \frac{(Kq + p)}{p^2 - 4q^2}$. Il faut donc que q ſoit un nombre carré $= v^2$, ainſi $Z^2 = v^2 \frac{(Kv^2 + p)}{p^2 - 4v^4}$, et $\frac{Kv^2 + p}{p^2 - 4v^4} = \square$. Or p étant plus grand que $2v^2$, on pourra mettre $p = 2v^2 + w$, où v et w ſont premiers entr'eux; donc $\frac{(K + 2)v^2 + w}{w(4v^2 + w)} = \square$. Cette équation ne peut ſubſiſter que dans les deux cas ſuivans:

1) ſi w eſt un carré W^2; alors il faudra que $\frac{(K + 2)v^2 + W^2}{4v^2 + W^2} = \square$,

2) ſi w eſt un facteur de $K + 2$. Suppoſons $\frac{K+2}{w} = w'$, en ce cas il y aura $\frac{w'v^2 + 1}{4v^2 + w} = \square$.

Chacun de ces deux cas admet encore deux ſuppoſitions; Car ou le numérateur et le dénominateur peuvent être l'un et l'autre des carrés, ou des carrés multipliés par un facteur commun, ce qui fait en tout quatre cas, que nous déſignerons par α, β, γ et δ.

α) Soit premièrement $(K + 2)v^2 + W^2 = \square = T^2$ et $4v^2 + W^2 = \square = V^2$.

Or la première équation peut être repréſentée auſſi ſous la forme $(K - 2)v^2 + 4v^2 + W^2 = T^2$, et en y ſubſtituant au lieu de $4v^2 + W^2$ ſa valeur V^2 de la ſeconde équation, on obtient $(K - 2)v^2 + V^2 = T^2$. Les deux conditions auxquelles il faudra donc ſatisfaire, ſont $4v^2 + W^2 = V^2$, et

$(K - 2)$

$(K-2)v^2+V^2=T^2$: et voici comment on doit s'y prendre pour cet effet:

Ayant pris pour v un nombre entier quelconque, il ſera aiſé de trouver un ou pluſieurs W premiers à v et tels que $4v^2+W^2=\square=V^2$. (voyez les exemples ci-après). Ces valeurs étant connues, on aura par la ſeconde condition $K=\frac{(T+V)(T-V)}{v^2}+2$. Il faut donc que $T+V$, ou $T-V$ ſoient diviſibles par v^2, et ſi m eſt le quotient de l'un et l'autre cas, on aura en général $K=m(mv^2\pm 2V)+2$; nouvelle expreſſion de K qui renferme un nombre infini de valeurs.

Exemples.

Soit $v=2$; par conſéquent $4v^2=16$. Or $16=2.8$. Donc $W=\frac{8-2}{2}=3$, De là $V=5$, et $K=m(4m\pm 10)+2$, où m peut-être chaque nombre entier. Ainſi en mettant ſucceſſivement pour cette quantité les nombres naturels, on obtient les valeurs ſuivantes de K: 16, 38, 8, 68, 106, 26 etc. On peut auſſi faire $m=\frac{M}{2}$, alors K ſera $=M(M\pm 5)+2$ d'où reſultent les valeurs 8, 16, 26, 38, 52, 68, 86, mais qui ſont dejà toutes connues par les formules précédentes.

Si $v=3$, on aura $4v^2=2.18$, donc $W=\frac{18-2}{2}=8$, et $V=10$, par conſéquent $K=m(9m\pm 20)+2$. Cette formule donne les valeurs ſuivantes de K: 31, 78, 23, 66 etc.

Soit $v=4$, et $4v^2$ ſera $=64=2.32$, donc $W=\frac{32-2}{2}=15$, $V=17$, et $K=m(16m\pm 34)+2$; où l'on peut mettre auſſi $m=\frac{M}{2}$, ce qui donne $K=M(4M\pm 17)+2$; d'où reſultent les valeurs 23, 52, 89, 17, 44, 79. etc.

Pre-

Prenons $v = 5$, par conſéquen[illegible] $= 100 = 2 . 50$, donc $W = \frac{50-2}{2} = 24$, $V = 26$, et [illegible] $= m(25m \pm 52) + 2$. Cette formule donne les valeurs 79, 71 etc. parmi lesquelles la valeur 71 eſt nouvelle.

Enfin mettons $v = 6$, et on aura $4v^2 = 144 = 2 . 72 = 8 . 18$. Donc

1) $W = \frac{72-2}{2} = 35$, $V = 37$ et $K = m(36m \pm 74) + 2$, ou en faiſant $m = \frac{M}{2}$; $K = M(9M \pm 37) + 2$, et

2) $W = \frac{18-8}{2} = 5$, $V = 13$, et $K = m(36m \pm 26) + 2$ $= M(9M \pm 13) + 2$.

La première formule donne les valeur: 48, 42, et la ſeconde celles-ci: 24, 64, 12, 44, 94.

β) Examinons maintenant le cas: $(K + 2)v^2 + W^2 = mT^2$, et $4v^2 + W^2 = mV^2$; et ſi l'on y ſubſtitue pour $4v^2 + W^2$ ſa valeur mV^2, on obtient $K = m\left(\frac{T^2 - V^2}{v^2}\right) + 2$, laquelle équation combinée avec $4v^2 + W^2 = mV^2$ nous fournit la ſolution ſuivante:

Qu'on prenne un nombre non-carré m (la remarque ci-après ſera voir que ce m doit toujours être de la forme $4g + 1$, ou $2(4g + 1)$), et un carré V^2 quelconque et qu'on décompoſe, s'il eſt poſſible, la quantité mV^2 en deux carrés W^2 et $(2v)^2$. Ces valeurs étant trouvées, on les ſubſtituera dans l'équation $K = m\left(\frac{T^2 - V^2}{v^2}\right) + 2$; où il faut que $T^2 - V^2$ ſoit diviſible par v^2. En faiſant donc $\frac{T + V}{v^2} = r$, ou $\frac{T - V}{v^2} = r$, on obtient en général $K = mr(rv^2 \pm 2V) + 2$, le ſigne ſupérieur étant pour le premier, et le ſigne inférieur pour le ſecond cas.

Si

Si l'on met $m = 1$, la formule ſe change en $r(rv^2 \pm V) + 2$ qui eſt celle du cas précédant.

Exemples.

Soit $m = 2$ et $V = 2$, donc $2V^2 = 8$, par conſéquent $v = 1$, $W = 2$; donc $K = 2r(r \pm 4) + 2$.

Si $m = 5$, et $V = 10$, on aura $W = 4$, et $v = 11$. Ainſi $K = 5r(121r \pm 20) + 2$.

1. Remarque. Diſons ici un mot de la manière de trouver W et w et prenons la valeur $m = 5$ pour exemple. Comme V eſt arbitraire, on peut le ſuppoſer $= 2V'$, il faudra donc que W ſoit auſſi un nombre pair $= 2W'$, et $5V^2 = W^2 + 4v^2$ ſe changera en $5V'^2 = W'^2 + v^2$. où l'on voit qu'il s'agit de trouver un nombre de la forme $5V'^2$ qui puiſſe être décompoſé en deux carrés W^2 et v^2 premiers entr'eux. Or le coëfficiant 5 étant $= 4 + 1$, on pourroit prendre $V' = 1$, $W' = 1$, et $v = 2$; mais en ce cas les nombres v et V ne feroient pas premiers entr'eux, comme ils le doivent être: On continuera donc de mettre ſucceſſivement au lieu de V' les valeurs 2, 3, 4 etc. jusqu'à ce qu'on trouve un nombre qu'on puiſſe décompoſer en deux carrés. C'eſt ainſi qu'en faiſant $V' = 2$, on obtient $5V'^2 = 20 = 4 + 16$; mais comme v et V ont encore une meſure commune, nous rejétterons auſſi ce cas. Les valeurs $V' = 3$ et $V' = 4$ ne menent à rien non plus, puisque les nombres 45 et 80 qui en reſultent ne peuvent être décompoſés en deux carrés. Mais en faiſant $V' = 5$, on trouve $5V'^2 = 125 = 2^2 + 11^2$, et voilà les valeurs de l'exemple précédant.

2. Re-

2. Remarque. Quant aux valeurs de m, nous allons prouver à préſent, qu'il faut toujours qu'elles ſoient de la forme $4g+1$ ou $2(4g+1)$. Suppoſons d'abord que m ſoit impair et de la forme $2n+1$. En ce cas nous aurons $(2n+1)V^2 = W^2+4v^2$. Or V peut être pair ou impair. Soit 1) $V = 2V'$. Donc W doit être également un nombre pair $= 2W'$. Par conſéquent $(2n+1)V'^2 = W'^2+v^2$. Or ſi l'on ſuppoſoit ici $V' =$ à un nombre pair; W' et v devroient l'être auſſi, donc v et V auroient non ſeulement une meſure commune, ce qui eſt contre la ſuppoſition; mais on retomberoit encore ſur une formule ſemblable à celle de laquelle on eſt parti et de cette manière on ne finiroit jamais. Prenons donc $V' = 2V''+1$; en ce cas il faut que W' ſoit pair et v impair, et en mettant $W' = 2W''$ et $v = 2v'+1$, il y aura:

$$4.(2n+1)V'(V''+1)+2n = 4(W''^2+v'(v'+1)).$$

Ainſi n doit être diviſible par 2, et par conſéquent m ſera de la forme $4g+1$. Si 2) V eſt impair; il eſt clair que W doit l'être auſſi. Mettons donc $W = 2W'+1$, et $V = 2V'+1$ et il y aura:

$$4.(2n+1)V'(V'+1)+2n = 4(W'(W'+1)+v^2)$$

donc n doit encore être diviſible par 2; et par conſéquent m ſera de la forme $4g+1$.

Prouvons auſſi, que ſi m eſt pair, il faut qu'il ſoit de la forme $2(4g+1)$. Soit donc $m = 2n$, et la formule $mV^2 = W^2+4v^2$ deviendra $2nV^2 = W^2+4v^2$; il faut donc que W ſoit auſſi un nombre pair $= 2W'$, et comme m, par la manière dont cette quantité a été

introduite au calcul, n'eſt ni un carré, ni compoſée d'un facteur carré, n ſera de la forme $2g+1$, et par conſéquent V doit être neceſſairement un nombre pair $= 2V'$, ainſi $2(2g+1)V'^2 = W'^2 + v^2$. Cette formule ne peut ſubſiſter à moins que les deux quantités W et v ne ſoient à la fois paires, ou impaires. Le premier cas ne peut avoir lieu, puiſque V devroit être pair auſſi, et que V et v auroient une meſure commune, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Outre cela, en faiſant $V' = 2V''$, $W' = 2W''$ et $v = 2v'$, on parviendroit à une formule ſemblable à $mV'^2 = W'^2 + v$, où il faudroit recommencer les mêmes ſuppoſitions. Mettons donc $W' = 2W'' + 1$, et $v = 2v' + 1$: ce qui donne:

$$2(2g+1)V'^2 = 4W''(W''+1) + 4v'(v'+1) + 2;$$

où l'on voit que V' ne peut être qu'un nombre impair $= 2V''+1$; par conſéquent

$$4.(2g+1)V''(V''+1) + 2g = 2W''(W''+1) + 2v'(v'+1).$$

Donc g doit être diviſible par 2, et m ſera de la forme $2(4g+1)$.

Paſſons maintenant au troiſième et au quatrième cas, en examinant l'équation $\frac{W'v^2+1}{4v^2+W} = \square$; $\frac{K^2}{W}$ étant $= W'$; où nous diſtinguerons encore les deux cas:

$$W'v^2 + 1 = \square \text{ et } 4v^2 + W = \square \text{ et}$$

$$W'v^2 + 1 = mT^2 \text{ et } 4v^2 + W = mV^2.$$

Soit

γ) $W'v^2 + 1 = T^2$, et $4v^2 + W = V^2$. Or la derniere de ces deux équations donne $W = V^2 - 4v^2$, et la premiere $W' = \frac{T^2-1}{v^2} = \frac{(T+1)(T-1)}{v^2}$ et en mettant $\frac{T+1}{v^2}$ ou $\frac{T-1}{v^2}$

$\frac{I-I}{v^2} = r$, on obtient $W' = r(rv^2 \pm 2)$; par conſéquent $K = WW' - 2 = r(V^2 - 4v^2)(rv^2 \pm 2) - 2$; où r, V et v peuvent être des nombres entiers quelconques. Si

δ) $W'v^2 + 1 = mT^2$ et $4v^2 + W = mV^2$, on a $W' = \frac{mT^2 - 1}{v^2}$, et $W = mV^2 - 4v^2$, par conſéquent

$$K = \frac{(mT^2 - 1)(mV^2 - 4v^2)}{v^2} - 2.$$

D'où l'on voit que K ſera un nombre entier dans les deux cas ſuivans:

a) Si $\frac{mT^2 - 1}{v^2}$ eſt un nombre entier

b) ſi mV^2 eſt diviſible par v^2.

Or le dernier cas ne ſauroit avoir lieu, puisque m eſt un nombre non-carré et que V et v ſont premiers entr'eux. Ainſi il ne reſte plus que le premier à examiner. Faiſons pour cela $\frac{mT^2 - 1}{v^2} = h$, et il y aura $mT^2 - hv^2 = 1$. Cette formule qui contient quatre quantités indéterminées, peut-être reſolue facilement; car en prenant T et v à volonté, on trouve par la methode connue de l'analyſe indeterminée, une infinité de valeurs pour m et h. De là il s'en ſuit que $K = h(mV^2 - 4v^2) - 2$, où V eſt encore un nombre indéterminé quelconque, pourvû qu'il ſoit premier à v.

Exemples.

Suppoſons $T = 5$, et $v = 3$; ainſi on aura $25m - 9h = 1$. Donc $h = 25u + 11$, et $m = 9u + 4$, où la quantité u eſt arbitraire; en la mettant $= 0$, on trouve les plus petites valeurs de h et m, qui ſont 11 et 4. Donc $K = 11(4V^2 - 36) - 2$, ou ſi $V = \frac{1}{2}V'$; $K = 11(V'^2 - 36) - 2$.

Ff 2 Si

Si $T = 3$, et $v = 5$, on trouve $h = 9t - 4$; $m = 25t - 11$ et par conſéquent les plus petites valeurs ſont 5 et 14. Donc $K = 5(14V^2 - 100) - 2$.

Après avoir examiné l'équation $Z^2 = \frac{K+n}{n^2-4}$, il ne nous reſte plus qu'à traiter celle-ci: $Z^2 = \frac{K-n}{n^2-4}$ d'une manière ſemblable. Mettons donc $n = \frac{p}{q}$, et cette expreſſion deviendra: $Z^2 = q\frac{(Kq-p)}{p^2-4q^2}$; par conſéquent q doit être un carré v^2; donc $Z^2 = v^2\frac{(Kv^2-p)}{p^2-4v^4}$. Or p étant ici $> 2v^2$ et $< Kv^2$, nous pouvons le mettre $= 2v^2 + W$ où les nombres v et W ſont premiers entr'eux; alors il faudra que $\frac{(K-2)v^2-W}{W(4v^2+W)} = \square$; ce qui donne encore quatre cas ſemblables à ceux que nous avons déjà traités α, β, γ et δ; la différence n'étant que dans le ſigne du ſecond membre du numérateur qui eſt ici negatif. Cependant on ſe tromperoit fort de croire, que les ſolutions précédentes puiſſent être appliquées auſſi à ces nouveaux cas, et que pour déduire les uns des autres on n'ait qu'à y changer le ſigne plus en moins. Car on remarquera, que les ſolutions précédentes ſont toutes fondées ſur la condition eſſentielle que le nombre n étoit poſitif; et en y changeant le ſigne de ce dernier en *moins*, les calculs précédens fondés ſur cette condition ne ſauroient plus avoir lieu. La ſuppoſition $n =$ à un nombre négatif mérite donc un examen particulier.

Examinons pour cet effet les quatre cas de l'équation $\frac{(K-2)v^2-W}{W(4v^2+W)} = \square$ et mettons.

1) $(K-2)v^2 - W^2 = T^2$, et $4v^2 + W^2 = V^2$. Donc $W^2 = V^2 - 4v^2$, et cette valeur ſubſtituée dans la première équation

tion la change en $(K - 2)\,v^2 - V^2 + 4v^2 = T^2$; d'où $K = \frac{T^2 + V^2}{v^2} - 2$. On a donc à ſatisfaire aux deux conditions: $4v^2 + W^2 = V^2$, et $\frac{T^2 + V^2}{v^2} =$ à un nombre entier: ce qui pourra ſe faire ainſi: On prendra pour v un nombre entier quelconque, et on cherchera un ou pluſieurs nombres W, premiers à v et tels que $4v^2 + W^2 = \square = V^2$, ce qui eſt toujours poſſible. Ces nombres étant trouvés, il reſte encore à examiner ſi l'expreſſion $\frac{T^2 + V^2}{v^2}$ peut devenir égale à un nombre entier, ou non?. On ſe ſervira pour cela d'une méthode auſſi ſimple qu'ingénieuſe que Mr. La Grange a donnée pour ce cas, et qui ſe trouve dans les mémoires de l'Académie de Berlin, année 1768: voyez le mémoire intitulé: nouvelle méthode de réſoudre les problemes indéterminés p. 181 etc. Et ſi la plus petite valeur de T qui ſatisfait à la condition $\frac{T^2 + V^2}{v^2} =$ à un nombre entier, s'appelle t, on pourra mettre en général $T = t + v^2 n$, n étant un nombre entier quelconque; par conſéquent K ſera: $\frac{t^2 + V^2}{v^2} + 2tn + v^2 n^2 - 2$.

S'il étoit impoſſible de trouver pour un certain v et V un nombre entier T qui rende $T^2 + V^2$ diviſible par v^2, on prendroit une autre valeur pour v^2, pour la ſoumettre au même examen.

Exemples.

Prenons $v = 5$: donc $4v^2$ ſera $= 100 = 2 \cdot 50$. Par conſéquent $W = \frac{50 - 2}{2} = 24$; et $V = 26$. Maintenant il s'agit de voir, s'il eſt poſſible de trouver un T qui rende la quantité $T^2 + 676$ diviſible par 25. Or $\frac{T^2 + 676}{25} = 27 + \frac{T^2 + 1}{25}$;

Il

Il faut donc que $\frac{T^2+1}{5}$ ſoit un nombre entier, et T^2+1 doit d'abord être diviſible par 5. Or Mr. La Grange démontre dans le mémoire mentionné, que, s'il exiſte des T qui rempliſſent cette condition, il y en a au moins un audeſſous de $\frac{5}{2}$. En mettant donc pour T les nombres 1 et 2, on trouve que $T=2$ rend la quantité T^2+1 diviſible par 5. Ainſi on peut mettre en général $T=2+5t$, et $\frac{T^2+1}{5}$ ſera $=1+4t+5t^2$. Ce quotient doit être de nouveau diviſible par 5; c'eſt-à-dire $1+4t$ doit l'être. Mettons $\frac{1+4t}{5}=u$; donc $t=u+\frac{u-1}{4}$; et $\frac{u-1}{4}=$ à un nombre entier g; par conſéquent $u=4g+1$, ce qui donne $t=5g+1$ et $T=7+25g$, de là on obtient $K=27+14g+25.g^2$, où g peut-être un nombre entier quelconque.

Si $v=13$; on aura $4v^2=676=2.338$. Ainſi $W=\frac{338-2}{2}=168$, et $V=170$. Donc

$$\frac{T^2+V^2}{v^2}=\frac{T^2+28900}{13.13}=171+\frac{T^2+1}{13.13};$$

Par conſéquent T^2+1 doit être d'abord diviſible par 13. Or s'il exiſte des valeurs de T qui ſatisfont à cette condition, il y en aura au moins une audeſſous de $\frac{13}{2}$. En mettant donc ſucceſſivement pour T les nombres 1, 2, 3 jusqu'à 6, on trouve que $T=5$ change la quantité $\frac{T^2+1}{13}$ en 2. Ainſi il y aura en général $T=5+13t$, et $\frac{T^2+1}{13}$ ſera $=2+10t+13t^2$, lequel quotient doit être de nouveau diviſible par 13; c'eſt-à-dire $2+10t$ doit l'être. Donc $t=13f-8$ et $T=169f-99$; où f peut-être un nombre entier quelconque: De cette expreſſion naît celle de $K=227-2574f+13f^2$.

Soit

Soit $v = 6$, donc $4v^2 = 144 = 8 . 18 = 4 . 36 = 2 . 72$. Ainſi on obtiendra trois valeurs différentes pour W et V. D'abord il y a $W = \frac{18-8}{2} = 5$, et $V = 13$. Enſuite on aura auſſi $W = \frac{36-4}{2} = 16$; mais que nous rejetterons, puisque v et W ne ſont pas premiers entr'eux; et enfin il y a $W = \frac{72-2}{2} = 35$, et $V = 37$. Mettons $V = 13$, et $\frac{T^2 - 169}{30}$, c'eſt-à-dire $\frac{T^2+25}{36}$ devra être un nombre entier. Il faut donc que $T^2 + 25$ ſoit diviſible par 6. Donc au moins une valeur de T ſera $< \frac{6}{2}$: mais ſi l'on eſſaïe pour T les valeurs 1, 2 et 3, aucune ne ſatisfait à cette condition: par conſéquent il n'y en a point non plus audeſſus de $\frac{6}{2}$, et l'expreſſion $T^2 + 25$ ne pourra jamais être rendue diviſible ni par 6, ni encore moins par 36. Il en eſt de même de la ſeconde valeur $V = 37$. Donc la valeur $v = 6$ ne donne aucune expreſſion pour K, non plus que les valeurs 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12. La ſuppoſition $v = 10$ donne la même formule pour K que la ſuppoſition $v = 5$.

Paſſons au ſecond cas de l'équation $\frac{(K-2)v^2 - W^2}{4v^2 + W^2} = \square$, en faiſant

2) $(K - 2)\ v^2 - W^2 = mT^2$, et $4v^2 + W^2 = mV^2$. Cette dernière équation donne $W^2 = mV^2 - 4v^2$, et cette valeur ſubſtituée dans la première la change en $(K + 2)\,v^2 = m\,(V^2 + T^2)$, par conſéquent: $K = m\,(\frac{V^2 + T^2}{v^2}) - 2$, laquelle équation combinée avec $mV^2 = W^2 + (2v)^2$ nous conduit à la ſolution ſuivante: On prendra deux nombres m et V^2, dont on puiſſe décompoſer le produit mV^2 en deux carrés W^2 et $(2v)^2$, tels que W et v ſoient premiers entr'eux; ce qui n'a point de difficulté. Ces nombres étant trou-

trouvés, on examinera par la méthode détaillée dans les exemples du cas précédent, s'il exiſte un nombre entier T qui rende la quantité $T^2 + V^2$ diviſible par v^2. S'il s'en trouve une, on en déduira une infinité d'autres, qui donneront autant de valeurs différentes pour $K = m\left(\frac{T^2 + V^2}{v^2}\right) - 2$. Mais s'il ne s'en trouve point, on procédera à une autre valeur de m ou de V.

On remarquera que nous avons déjà démontré plus haut que l'équation $mV^2 = W^2 + (2v)^2$ ne peut ſubſiſter dans l'hypotheſe que W et v ſoient des nombres premiers entr'eux, à moins que m ne ſoit de la forme $4g + 1$ ou $2(4g + 1)$.

Exemples.

Soit $m = 17$, $V = 2V'$, et $W = 2W'$; par conſéquent il y aura: $17V'^2 = v^2 + W'^2$. Prenons ici $V' = 5$, donc $17V'^2 = 425 = 13^2 + 16^2$. Ainſi $v = 13$, et $W' = 16$. Il ne s'agit plus maintenant que de trouver un T, tel que $\frac{T^2 + V^2}{v^2}$, c'eſt-à-dire $\frac{T^2 + 100}{13 \cdot 13}$ ſoit un nombre entier. On verra donc d'abord s'il y a une valeur $T < \frac{13}{2}$ qui rende la quantité $T^2 + 100$ diviſible par 13. Or en eſſayant pour T les nombres 1, 2, on trouve que $T = 2$ ſatisfait à cette condition; par conſéquent on peut mettre en général $T = 2 + 13t$; donc $\frac{T^2 + 100}{13 \cdot 13} = \frac{8 + 4t + 13t^2}{13}$; où l'on voit que $8 + 4t + 13t^2$, ou plutot $4(2 + t)$ doit être de nouveau diviſible par 13: Donc $\frac{t + 2}{13} = h$, et $t = 13h - 2$; par conſequent $T = 13^2 h - 24$, ce qui donne $\frac{T^2 + 100}{13^2} = 4 - 48h + 13^2 h^2$, et $K = 17(4 - 48h + 13^2 h^2) - 2$ où h peut-être chaque nombre entier.

Soit

Soit $m = 53$. et $V = 5$ Donc $m V^2 = 53 \cdot 25 = 1325$ $= 4 \cdot 17^2 + 13^2 = 4v^2 + W^2$; par conſéquent $v = 17$, et $W = 13$. Ainſi $\frac{T^2+25}{17 \cdot 17} =$ à un nombre entier. Donc $T^2 + 25$ doit être diviſible par 17. et pour voir ſi cela eſt poſſible, il ſuffit d'eſſayer pour T tous les nombres audeſſous de $\frac{17}{2}$. Or $T = 3$ ſatisfait à cette condition; par conſéquent auſſi la valeur générale $T = 3 + 17t$; donc $\frac{T^2+25}{17 \cdot 17} = 2 \frac{(1+3t)}{17} + t^2$. Ainſi $1 + 3t$ doit être de nouveau diviſible par 17: et pour cela il faut que t ſoit de la forme $17h - 6$: par conſéquent $T = 17^2 h - 99$ et $K = 53 (34 - 2 \cdot 99 h + 17^2 h^2) - 2$.

3) Le troiſième cas de l'équation $\frac{(K-2)v^2-W}{(K-2)(4v^2+W)} = \square$ que nous avons à examiner, eſt celui-ci: $W' v^2 - 1 = T^2$, et $4v^2 + W = V^2$; W' étant $= \frac{K-2}{W}$. Or $W' = \frac{T^2+1}{v^2}$, et $W = V^2 - 4v^2$, donc $K - 2 = W W' = \frac{(T^2+1)(V^2-4v^2)}{v^2}$ et $K = \frac{(T^2+1)(V^2-4v^2)}{v^2} + 2$. Par conſéquent $T^2 + 1$ doit être diviſible par v^2. Soit $\frac{T^2+1}{v^2} = n$, n étant un nombre entier quelconque, et il y aura: $T^2 - n v^2 = -1$. En prenant donc pour n tel nombre non-carré qu'on voudra, la méthode que M. la Grange enſigne dans ſon excellente traduction des Elemens d'Algèbre de Mr. Euler (voyèz les additions Chap. II, §. 23 — 41) donnera toutes les valeurs poſſibles de T et de v, ſi cette équation eſt ſoluble en nombres entiers. Connoiſſant ces valeurs, on aura $K = n(V^2 - 4v^2) + 2$, où V peut-être pris à volonté.

Exemples.

Si $m = 2$, on trouve pour T les valeurs: 1, 7, 41 etc. auxquelles repondent les valeurs ſuivantes de v: 1, 5, 29 etc. d'où naiſſent pour K les expreſſions:

$$K = 2\,(V + 2)\,(V - 2) + 2.$$
$$K = 2\,(V + 10)\,(V - 10) + 2.$$
$$K = 2\,(V + 58)\,(V - 58) + 2 \text{ etc.}$$

Soit $m = 3$; ici la méthode de Mr. la Grange fait voir qu'il eſt impoſſible de réſoudre l'équation $T^2 - 3\,v^2 = -1$.

Mais en mettant $m = 5$, on obtient pour T les valeurs: 2, 38, 378 etc. et pour v celles-ci: 1, 17, 169 etc. par conſéquent

$$K = 5\,(V + 2)\,(V - 2) + 2.$$
$$K = 5\,(V + 34)\,(V - 34) + 2;$$
$$K = 5\,(V + 338)\,(V - 338) + 2 \text{ etc.}$$

4) Enfin le dernier cas de l'équation $\frac{(K-2)\,v^2 - w}{w\,(+v^2 - w)} = \square$ eſt: $W'\,v^2 - 1 = m\,T^2$, et $4\,v^2 + W = m\,V^2$, W' étant comme dans le cas précédent $= \frac{h-2}{w}$. On trouve donc

$$K = W'\,W + 2 = \frac{(m\,T^2 + 1)\,(m\,V^2 - 4\,v^2)}{v^2} + 2.$$

Ainſi $m\,T^2 + 1$ doit être diviſible par v^2. Mettons $\frac{m\,T^2 + 1}{v^2} = n$; et nous aurons $n\,v^2 - m\,T^2 = 1$. En prenant donc ſucceſſivement pour v et T tous les nombres entiers combinés de toutes les manières poſſibles, chaque valeur de v et T en fournira une infinité pour m et n et par conſéquent auſſi pour

pour K qui eſt $= n(m V^2 - 4v^2) + 2$, où V peut encore être pris à volonté.

Exemple.

Si $v = 7$, et $T = 11$, on aura $49\,n - 121\,m = 1$; cette équation réſolue ſuivant la méthode connue de l'Analyſe indéterminée, donne pour m et n les valeurs générales: $49f + 17$ et $121f + 42$. Les plus petites de ces valeurs ſont $m = 17$ et $n = 42$, d'où nait l'expreſſion:

$$K = 42(17\,V^2 - 196) + 2.$$

§. 11. Voilà donc la ſolution complette du probleme de M. Euler, puiſque les formules des articles précédens, dégagées de toutes les fractions, renferment toutes les valeurs de K pour leſquelles il eſt poſſible de changer l'expreſſion $1 + K z^2 + z^4$ en carré. Les autres valeurs de K, qui ne peuvent être déduites d'aucune de ces formules, forment une claſſe particulière de nombres, pour leſquels il eſt abſolument impoſſible de trouver des z rationels. Ainſi, pour déterminer tous les nombres entiers K qui rendent la formule propoſée ſoluble, et qui ſont contenus entre les termes 1 et M, il eſt néceſſaire de parcourir toutes les expreſſions de K, trouvées ci-deſſus, en ſubſtituant ſucceſſivement dans chacune d'elles tous les nombres indiqués dans les articles précédens, jusqu'à ce qu'on parvienne à un réſultat ou valeur de $K =$ ou $> M$. (ce qui doit toujours arriver, puisque ces valeurs reſultant de ces différentes expreſſions vont toujours en augmentant). De cette manière on obtient une ſuite de valeurs de K qui admettent toutes une ſolution de l'équation donnée, tandis que les au-

tres nombres qui ne ſeront point compris dans cette ſuite, formeront les cas irréductibles. Telle eſt donc la nature de cette queſtion, qu'elle ne peut être reſolue par une ſeule équation, mais qu'il en faut examiner toutes celles que nous avons données et qui embraſſent tous les cas poſſibles. Au reſte pour s'épargner la peine, de faire pour chaque K donné les mêmes calculs par une répétition continuelle, il ſeroit bon de calculer une fois pour toujours toutes ces valeurs jusqu'à un certain terme et d'en faire une Table pareille à celle de M. Euler, en y joignant les valeurs de Z qui leur repondent, et qu'on n'aura pas de peine à trouver, ayant $Z^2 = \frac{K \pm 2A}{A^2 - 1}$.

NOVA

NOVA DEMONSTRATIO THEOREMATIS,

NEC SUMMAM, NEC DIFFERENTIAM DUORUM BIQUADRATORUM BIQUADRATUM ESSE POSSE.

AUCTORE

C. F. KAUSLER.

Conventui exhibit. d. 4. Octobr. 1799.

Celebratiſſimum penes mathematicos eſt illud Fermatii theorema: nec ſummam, nec differentiam duorum numerorum poteſtatis n, numerum ejusdem poteſtatis eſſe poſſe, excepto unico caſu $n = 2$; demonſtratio autem generalis a nemine adhuc tentata fuit. Magnus hic Geometra ſe ejusmodi demonſtrationem inveniſſe quidem affirmat, quae vero publici juris nunquam facta eſt. Equidem credo, ſi unquam exſtiterit, eam nihil aliud, niſi inductionem fuiſſe. Noſtro faeculo Celeberr. Eulerus, qui et hanc Analyſeos partem pulcherrimis inventis exornavit, in Elementis ſuis Algebrae Tom. II, haec theoremata ſpecialia demonſtravit: „Nec ſummam nec differentiam duorum Cuborum Cubum, ſeu Biquadratorum Quadratum eſſe poſſe.“ At methodus qua utitur, difficillime ad altiores poteſtates extenditur. Quare ſpero, tentamen, quod cultoribus hujus ſcientiae examinandum nunc propono, nec ſuperfluum neque injucundum fore. Ita enim, ut mihi quidem perſuadeo, nihil amplius deſideran-

randum relinquitur, et ſperandum eſt, hac via ad demonſtrationem generalem pulcherrimi illius theorematis perveniri poſſe. Antequam autem ad ipſam demonſtrationem accedamus, nonnulla praemittenda ſunt, quae pertractationem non parum adjuvabunt.

I. Theorema.

Impoſſibile eſt tales invenire valores integros pro x et y, qui reddant formulas x^2+y^2 et x^2-y^2 ſimul quadrato aequales; vel ſi prima eſt quadratum, ſecunda quadratum nunquam eſſe poteit, et vice verſa.

Demonſtratio.

In analyſi demonſtratur, infinitos dari numeros integros quadratos x^2 et y^2, quorum ſumma aut differentia quadrato aequales ſunt; omnes autem iſtos valores ipſius x et y aequationi $x^2+y^2=\square$ ſatisfacientes, ad aequationem $x^2-y^2=\square$ ſolvendam minime idoneos eſſe, et vice verſa, ſequenti modo patebit: Conſidero numeros x et y tanquam inter ſe primos, nam ſi haberent factorem communem t; tam ſumma x^2+y^2, quam differentia x^2-y^2 per t^2 dividi poſſet, et quotientes X^2+Y^2 et X^2 Y^2 priori ſummae et differentiae plane ſimiles eſſent, X et Y denotantibus numeros inter ſe primos. Hiſce poſitis,

I.) quaeramus expreſſiones generales, omnes ipſius x et y valores integros et inter ſe primos involventes qui reddant $x^2+y^2=\square$. Sit itaque $x^2+y^2=z^2$; et erit $x^2=(z+y)(z-y)$. Haec autem aequatio non niſi ſequentibus ſubſiſtere poteſt caſibus:

1) Si

1) ſi $z + y = P^2$ et $z - y = Q^2$, vel

2) ſi $z + y = mP^2$, et $z - y = mQ^2$.

Si prius, ſcilicet ſi $z + y = P^2$, et $z - y = Q^2$: habebimus $z = \frac{P^2 + Q^2}{2}$, $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$, et $x = PQ$; ubi P et Q denotant numeros impares quoscunque inter ſe primos; ſic enim fiet, ut tam z quam y, ideoque et x ſint numeri integri et inter ſe primi. Si autem $z + y = mP^2$, et $z - y = mQ^2$; erit $z = m\left(\frac{P^2 + Q^2}{2}\right)$, $y = m\left(\frac{P^2 - Q^2}{2}\right)$, et $x = mPQ$. Jam cum x et y primi inter ſe eſſe debeant; factor m non niſi 2 eſſe poterit, unde hi valores oriuntur: $z = P^2 + Q^2$, $y = P^2 - Q^2$; $x = 2PQ$, ubi P et Q ſignificant numeros quoscunque, quorum differentia vel ſumma ſit impar, ſcilicet quorum alter ſit par, alter vero impar.

II.) Eodem modo demonſtrari poteſt, in aequatione $x^2 - y^2 = \square$, eſſe vel: 3) $x = p^2 + q^2$ et $y = p^2 - q^2$, ubi p et q numeri quicunque inter ſe primi ſunt vel 4) $x = \frac{p^2 + q^2}{2}$ et $y = \frac{p^2 - q^2}{2}$; p et q denotantibus numeros impares et inter ſe primos.

Omnes autem valores poſsibiles ipſius x et y, aequationem $x^2 + y^2 = \square$ ſolventes, neceſſario in formulis 1 et 2, illos vero pro $x^2 - y^2 = \square$ in 3 et 4 contineri, ex natura rei patet.

Supereſt nunc, ut probemus, valores pro x et y formulis 3 et 4 contentos illis, qui ex 1 et 2 derivantur, nunquam aequales eſſe poſſe.

Quodſi enim valores $p = p'$ et $q = q'$ ex formulis $x = p^2 + q^2$ et $y = p^2 - q^2$ deducti et aequationi $x^2 - y^2 = \square$ ſatisfacientes conditioni $x^2 + y^2 = \square$ quoque ſatisfacerent; neceſ-

neceſſe eſſet, ut ſimul vel in $x = 2PQ$, et $y = P^2 - Q^2$, vel in $x = PQ$, et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$ continerentur. Si prius, erit $y = p'^2 - q'^2 = P^2 - Q^2$, et $x = p'^2 + q'^2 = 2PQ$. Sed in aequatione $x^2 - y^2 = \square$ valori $y = p'^2 - q'^2$ reſpondet valor $x = p'^2 + q'^2$. Jam ſi $p'^2 - q'^2$ ſimul $= P^2 - Q^2$, eidem y valorem $x = P^2 + Q^2$ reſpondere neceſſe eſt, atque ita erit $P^2 + Q^2 = 2PQ$, unde ſequitur eſſe $P - Q = o$, ſive $P = Q$, quod eſt contra ſuppoſitionem. Si vero poſterius, ſcilicet, ſi valores $x = p'^2 + q'^2$ et $y = p'^2 - q'^2$, aequationem $x^2 - y^2 = \square$ ſolventes, aequationi $x^2 + y^2 = \square$ quoque ſatisfacerent, et ex formulis $x = PQ$, et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$ derivari poſſent; haberemus $y = p'^2 - q'^2 = \frac{P^2 - Q^2}{2}$. Sunt autem numerorum p' et q', ut ex iis quae ſupra diximus patet, alter par, alter impar; idcirco $y = p'^2 - q'^2$ impar; P et Q vero numeri impares eſſe debent; ideoque $\frac{P^2 - Q^2}{2} = y$ erit numerus par. Ergo numerus par numero impari aequalis eſſet, quod impoſſibile eſt. Unde concludimus, valores x et y, aequationem $x^2 - y^2 = \square$ ſolventes, et ex formulis $x = p^2 + q^2$, et $y = p^2 - q^2$ derivatos, aequationi $x^2 + y^2 = \square$ non convenire, quia nec in expreſſione $x = 2PQ$, et $y = P^2 - Q^2$, nec in $x = PQ$ et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$ continentur. Eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, valores $x = \frac{p^2 + q^2}{2}$ et $y = \frac{p^2 - q^2}{2}$ aequationi $x^2 - y^2 = \square$ ſatisfacientes, aequationi $x^2 + y^2 = \square$ ſolvendae minime inſervire, quia nec in formulis $x = PQ$, et $y = \frac{P^2 - Q^2}{2}$, nec in formulis $x = 2PQ$ et $y = P^2 - Q^2$ continentur. Expreſſiones autem 1); 2); 3); 4) omnes valores poſſibiles ipſius x et y includunt. Ergo theorema propoſitum univerſaliter demonſtratum eſt.

II.

II. Theorema.

Nec ſumma nec differentia duorum biquadratorum biquadratum eſſe poteſt.

Demonſtratio.

Sint x^4 et y^4 numeri biquadratici quicunque, et probandum nobis erit, nullo modo $x^4 \pm y^4 = z^4$ fieri poſſe. Sufficiet autem unum tantum horum caſuum probare; nam ſi impoſſibile eſt eſſe $x^4 - y^4 = z^4$; impoſſibile quoque erit, $y^4 + z^4 = x^4$ fore. Ceterum numeros x, y, z tanquam integros et inter ſe primos ſpectare licebit: ſi enim eſſent fracti, ſcilicet $x = \frac{p}{q}$, et $y = \frac{m}{n}$; formula $x^4 \pm y^4$ abiret in hanc: $\frac{p^4 \cdot {}^4 \pm q^4 m^4}{q^4 n^4} = z^4$, proinde et $p^4 n^4 \pm q^4 m^4$, ſcilicet $P^4 \pm Q^4$ (poſitis $pn = P$, et $qm = Q$) biquadrato aequale eſſe deberet, qui caſus ad ſuppoſitionem primam redit. Si autem x et y factorem haberent communem; evidens eſt, totam aequationem per hunc factorem dividi, atque ita quotientem ad primam formulam $x^4 \pm y^4 = z^4$ reduci poſſe.

Ponamus igitur, x et y eſſe numeros integros et inter ſe primos, ac nunc demonſtrandum eſt, aequationem $x^4 + y^4 = z^4$ nequaquam ſubſiſtere poſſe, id quod ſequenti modo patebit:

Si $x^4 + y^4 = z^4$; erit $x^4 = (z^2 + y^2)(z^2 - y^2)$, ideoque x productum ex factoribus biquadraticis eſſe debebit. Sint hi factores m et n, et aequatio $x^4 = (z^2 + y^2)(z^2 - y^2) = m^4 n^4$ per ſequentes tantum ſuppoſitiones explicari poterit:

1°) $z^2 + y^2 = m^4 n^4$ et $z^2 - y^2 = 1$.
2°) $z^2 + y^2 = m^3 n^3$ et $z^2 - y^2 = mn$.
3°) $z^2 + y^2 = m^2 n^2$ et $z^2 - y^2 = m^2 n^2$.
4°) $z^2 + y^2 = mn$ et $z^2 - y^2 = m^3 n^3$
5°) $z^2 + y^2 = m^4$ et $z^2 - y^2 = n^4$.
6°) $z^2 + y^2 = m^3$ et $z^2 - y^2 = mn^4$.
7°) $z^2 + y^2 = m^2$ et $z^2 - y^2 = m^2 n^4$.
8°) $z^2 + y^2 = m$ et $z^2 - y^2 = m^3 n^4$.
9°) $z^2 + y^2 = 1$ et $z^2 - y^2 = m^4 n^4$.
10°) $z^2 + y^2 = m^3 n^4$ et $z^2 - y^2 = m$.
11°) $z^2 + y^2 = m^2 n^4$ et $z^2 - y^2 = m^2$.
12°) $z^2 + y^2 = mn^4$ et $z^2 - y^2 = m^3$
13°) $z^2 + y^2 = mn^2$ et $z^2 - y^2 = m^3 n^2$.
14°) $z^2 + y^2 = mn^3$ et $z^2 - y^2 = m^3 n$.
15°) $z^2 + y^2 = m^2 n$ et $z^2 - y^2 = m^2 n^3$.
16°) $z^2 + y^2 = m^4 n$ et $z^2 - y^2 = n^3$.
17°) $z^2 + y^2 = m^3 n$ et $z^2 - y^2 = mn^3$.
18°) $z^2 + y^2 = m^4 n^2$ et $z^2 - y^2 = n^2$.
19°) $z^2 + y^2 = m^3 n^2$ et $z^2 - y^2 = mn^2$.

Omnes autem hae ſuppoſitiones partim ad abſurdum, partim ad impoſſibile ducunt, quod ita demonſtrabo:

Suppoſitio

1ma) eſt impoſſibilis, ex theoremate praemiſſo, et quia non dantur duo quadrata in numeris integris, quorum differentia ſit $= 1$.

2da) eſt impoſſibilis, quia $z^2 - y^2$ non eſt radix cubica ſummae $z^2 + y^2$; ſcilicet $z^2 + y^2$ non eſt $= z^6 - 3z^4 y^2 + 3z^2 y^4 - y^6$. Nam $z^6 > z^2$; porro $z > y$, ergo et $z^2 > y^2$, et

et $z^2(y^2-1)>y^2(y^2-1)$; proinde $3z^2(y^2-1)>3y^2(y^2-1)$, ſive $>3y^4-3y^2$; per conſequens $3z^2(y^2-1)-y^4>2y^4-3y^2$ Eſt vero $2y^4-3y^2>y$, ergo et $3z^2(y^2-1)-y^4$ multo majus quam y; ideoque $y^2(3z^2(y^2-1)-y^4)>y^3$, et proinde multo majus quam y^2 erit. Vidimus itaque z^6 eſſe $>z^2$, et $-3y^2z^2+3y^4z^2-y^6>y^2$; ergo $z^6-3z^4y^2+3z^2y^4-y^6$ multo majus quam z^2+y^2 eſſe debet.

3^{tia}) eſt impoſſibilis, quia ſumma z^2+y^2 differentiae z^2-y^2 nunquam aequalis eſſe poteſt, niſi caſu $y=0$.

4ta) eſt abſurda; nam ſumma non eſt minor differentia eorundem numerorum, ac $mn<m^3n^3$.

5ta) eſt impoſſibilis, quia ex theoremate praecedente patet, expreſſiones z^2+y^2 et z^2-y^2 ſimul quadrata et proinde biquadrata non eſſe poſſe.

6ta) eſt impoſſibilis; quodſi enim $z^2+y^2=m^3$, et $z^2-y^2=mn^4$ eſſent; haberemus quoque, $z^2+y^2+z^2-y^2$ ſive $2z^2=m(m^2+n^4)$, et m vel 2 vel factor ipſius z eſſe deberet. Si prius; erit $y^2=m^2-n^4=4-n^4$, ergo $n=1$, et y irrationale. Si autem poſterius; perſpicuum eſt, numerum m (ob $2y^2=m(m^2-n^4)$) factorem eſſe quantitatis y, quod eſt contra hypotheſin, cum z et y ſint numeri inter ſe primi.

7ma) eſt abſurda, cum ſumma minor non eſſe poſſit differentia eorundem numerorum.

8va) eſt abſurda ob eandem rationem.

9na) eſt abſurda ob rationem N. 7. allegatam.

10ma) eſt impoſſibilis, et hic caſus ad caſum 6^{tum} reduci poteſt.

11ma) eſt impoſſibilis, ſecundum theorema praemiſſum.

 12)

12ma) eſt impoſſibilis, quia hic caſus ad caſum 6 redit.
13^{tia}) eſt abſurda ob rationem n. 7.
14ta) eſt impoſſibilis, vid. cas. 6.
15ta) eſt abſurda, vid. ſuppoſit: 7.
16ta) eſt impoſſibilis ob rationem n. 6. allegatam.
17ma) eſt impoſſibilis ob eandem cauſam.
18va) eſt impoſſibilis; vid. theorema praemiſſum.
19na) eſt impoſſibilis, ob rationem caſu 6. allegatam.

Cum autem hae ſuppoſitiones omnes caſus poſſibiles involvant; evidenter patet, non dari duos numeros integros et inter ſe primos, quorum biquadrata invicem addita ſeu detracta biquadratum faciant, et ex iis, quae initio demonſtrata ſunt, ſequitur, nec dari numeros fractos hac proprietate gaudentes.

NOVA

NOVA DEMONSTRATIO THEOREMATIS:

NEC SUMMAM,

NEC DIFFERENTIAM DUORUM CUBORUM CUBUM

ESSE POSSE.

AUCTORE

C. F. KAUSLER.

Conventui exhibita d. 7. Novembr. 1799.

I. Theorema.

Impoſſibile eſt, expreſſiones $x - y$ et $x^2 + xy + y^2$ ſimul cubos ſieri poſſe, ſi x et y numeri integri eſſe ſupponantur.

Demonſtratio.

Si hae expreſſiones cubis aequales eſſent; haberentur aequationes: $x - y = m^3$, et $x^2 + xy + y^2 = z^3$; ex priori ſequeretur $x = m^3 + y$, qui valor in poſteriori ſubſtitutus, eam in: $3y^2 + 3m^3y + m^6 = z^3$ transmutat. Haec autem aequatio quadratica nobis praebet valorem: $y + \frac{m^3}{2} = \frac{\sqrt{(12z^3 - 3m^6)}}{6}$, et perſpicuum eſt, expreſſionem ſub ſigno radicali rationalem fieri debere. Ponamus igitur: $12z^3 - 3m^6 = Q^2$, ubi Q per 3 diviſibile eſſe neceſſe eſt. Sit $Q = 3R$; erit $z^3 = \frac{3R^2 + (m^3)^2}{4}$. Jam cum z numerum integrum ſignificet; ſumma $3R^2 + (m^3)^2$ per 4 diviſibilis erit, quod fit 1°) ſi tam R quam m numeros pares ſignificent, et 2°) ſi hae

hae quantitates impares accipiantur. Si prius, ſcilicet ſi $R = 2P$ et $m = 2M$; aequatio $z^3 = \frac{3R^2 \quad (m^3)^2}{4}$ abit in hanc: $z^3 = 3P^2 + (4M^3)^2$ et quaeſtio eo deducta eſt, an dentur tales valores integri numerorum P et M, ut formula $3P^2 + 4(4M^3)^2$ cubo aequalis fiat? Ad eam ſolvendam, egregiam ſolutionem Celeber. Euleri, quam in Elementis ſuis Algebrae Tom. II. Capit. XII. de transformatione formulae $ax^2 + cy^2$ in quadrata et in poteſtates altiores dedit, in ſubſidium vocemus. Demonſtrat enim loco citato §. 188 formulam $ax^2 + cy^2$ fieri Cubum poſitis $x = ap^3 - 3cpq^2$ et $y = 3ap^2q - cq^3$, p et q denotantibus numeros integros quoscunque, et ex methodo, qua utitur, patet, has formulas omnes valores poſſibiles numerorum x et y huic conditioni ſatisfacientes neceſſario includere. Quodſi nunc adplicemus haec ad formulam $3P^2 + (4M^3)^2 = z^3$; habebimus $a = 1$ et $c = 3$, proinde x vel $4M^3 = p^3 - 9pq^2$, et y vel $P = 3p^2q - 3q^3$. Ex aequatione $M^3 = \frac{p^3 - 9pq^2}{4} = \frac{p(p^2 - 9q^2)}{4}$ ſequitur, numerum 4 eſſe factorem vel numeri p vel quantitatis $p^2 - 9q^2$. Si 4 eſt factor ipſius p; ponamus $p = 4n$, et erit $M^3 = n(16n^2 - 9q^2)$, unde concludimus, n eſſe factorem numeri M. Sit itaque $M = nN$, et aequatio noſtra evadet: $n^2N^3 + 9q^2 = 16n^2$, haec vero aequatio impoſſibilis eſt pro omnibus valoribus numeri N, qui majores ſunt numero 2. Quod valores autem $N = 1$ et $N = 2$ attinet; pariter perſpicuum eſt, hanc aequationem ſubſiſtere non poſſe cum priori caſu quadratum $9q^2$ numero $15n^2$ aequale eſſe nequeat, poſteriori vero caſu $9q^2 = 8n^2$ eſſe deberet, quod ex eadem ratione impoſſibile eſt.

Si numerus 4 factor quantitatis $p^2 - 9q^2$ eſt; p factor ipſius M eſſe debebit. Poſito itaque $M = pN$, aequatio

$M^3 =$

$4M^3 = p(p^2 - 9q^2)$ mutabitur in hanc: $4p^2 N^3 + 9q^2 = p^2$, cujus impoſſibilitas per ſe patet, cum N ſit numerus integer et poſitivus.

Tranſeamus nunc ad formulam $z^3 = \frac{3R^2 + (m3)^2}{4}$ ſub hypotheſi, quod numeri integri R et m ſint impares. Hoc caſu habebimus $8z^3 = 6R^2 + 2(m^3)^2$, vel $(2z)^3 = 6R^2 + 2(m^3)^2$, et ſolutio Euleri, cujus mentionem fecimus, ad hanc expreſſionem adplicata, dabit valores $x = R = 6p(p^2 - q^2)$ et $y = m^3 = 2q(9p^2 - q^2)$. Cum vero hi valores numerorum R et m (qui omnes ſolutiones poſſibiles includunt), ſint numeri pares; ſuppoſitio prima ſubſiſtere nequit, nec dantur numeri impares R et m qui reddant formulam $\frac{3R^2 + (m3)^2}{4}$ cubo aequalem. Ergo et impoſſibile eſt, expreſſiones $x - y$ et $x^2 + xy + y^2$ ſimul cubo aequales fieri poſſe.

II. Theorema.

Numeri formae $T(T+1)$ ſimul in expreſſione $9W^3 + 9W^2 + 3W$ contineri non poſſunt, poſitis T et W numeris quibuscunque integris et poſitivis.

Demonſtratio.

Quaevis harum expreſſionum ſeriem numerorum integrorum in infinitum creſcentium praebet, ſi loco T et W omnes numeri naturali progreſſione progredientes in iis ſubſtituantur. Nullum autem terminum primae ſeriei ſimul terminum ſecundae eſſe poſſe, id eſt, formulas $T(T+1)$ et $9W^3 + 9W^2 + 3W$ nunquam inter ſe aequales eſſe, ſi T et W ſignificent numeros integros poſitivos, nunc demonſtrabimus:

Quodſi

Quodſi $T(T+1) = 9W^3 + 9W^2 + 3W = 3W(3W^2 + 3W + 1)$ eſſet; haec aequalitas non niſi per ſequentes explicari poſſet caſus: aut enim eſſet

1°) quantitas $3W$ vel factor ipſius T, vel

2°) factor ſummae $T+1$, vel

3°) numerus 3 eſſet factor numeri T, et W factor numeri $T+1$, vel tandem

4°) numerus W factor quantitatis T et numerus 3 factor ſummae $T+1$.

Si 1°) Quantitas $3W$ eſſet factor numeri T; haberemus $T = 3WV$, ſignificante V numerum quendam integrum et poſitivum; proinde $T(T+1)$ eſſet $= 3WV(3WV+1)$; haec vero expreſſio formulae $3W(3W^2+3W+1)$ aequalis eſſe deberet, unde ſequitur: $V(3WV+1) = 3W(W+1)+1$, vel $V-1 = 3W(W+1-V^2)$, et quantitatem $V-1$ per $3W$ diviſibilem eſſe neceſſe eſt. Sit jam $V-1 = 3WR$, hincque $V = 3WR+1$, et aequatio $V-1 = 3W(W+1-V^2)$ abit in: $3WR = 3W(W+1-V^2)$, ſeu $R = W+1-(3WR+1)^2$, unde $(3WR+1)^2 + R = W+1$; hanc vero aequationem impoſſibilem eſſe, per ſe patet.

2°) Si $3W$ eſſet factor numeri $T+1$, vel ſi $T+1 = 3WV$, aequatio $T(T+1) = 3W(3W^2+3W+1)$ abiret in hanc: $3WV(3WV-1) = 3W(3W^2+3W+1)$, vel in: $3WV^2 - 3W^2 - 3W = V+1$, et numerus $V+1$ per $3W$ diviſibilis eſſe deberet. Sit $V+1 = 3WR$ hincque $V = 3WR-1$, et erit $V^2 - W - 1 = R$; proinde ob $V = 3WR-1$ erit $(3WR-1)^2 - W - 1 = R$; ideoque $9W^2R^2 - 6WR = W+R$; unde patet, R per W eſſe diviſibile. Poſito itaque $R = WU$, haec

haec aequatio induit formam $3\,UW\,(3\,UW^2-2)=1+U$ cujus impoſſibilitas perſpicua eſt. Quicunque enim valor in numeris integris numeris U et W tribuatur, terminus $3\,UW\,(3\,UW^2-2)$ ſemper major erit termino $1+U$.

3°) Si autem 3 eſſet factor numeri T, et W factor numeri $T+1$, ſcilicet ſi eſſet $T=3V$, et $T+1=3V+1=WR$; haberemus $3\,VWR=3\,W\,(3\,W^2+3\,W+1)$, ex quo ſequitur $VR=3\,W^2+3\,W+1$. Sed $3\,V+1=WR$, ergo $V=\frac{WR-1}{3}$, et $VR=\frac{WR^2-R}{3}$; proinde $\frac{WR^2-R}{3}=3\,W^2+3\,W+1$, et $R^2W-9\,W^2-9\,W=R+3$, et $R+3$ per $3\,W$ erit diviſibile. Sit $R+3=WU$; tunc aequatio praecedens abit in: $(WU-3)^2-9\,W-9=U$, vel in: $W^2U^2-6\,WU-9\,W=U$ et W factorem ipſius U eſſe oportet. Poſito itaque $U=MW$, aequationem $MW\,(MW^2-6)-9=M$ nanciſcimur. Ergo 9 per M diviſibile, et M vel 3, vel 9 eſſe debet. Si prius, ſcilicet ſi $M=3$; aequatio noſtra erit $3\,W\,(W^2-2)=1$, cujus abſurditas evidens eſt; ſi autem poſterius, ſive $M=9$; habebimus aequationem $3\,W\,(3\,W^2-2)-1=1$, quae pariter abſurda eſt, cum $3\,W\,(3\,W^2-2)-1$ ſemper major ſit unitate.

4°) Si denique W eſſet factor numeri T, et 3 factor numeri $T+1$, ſcilicet ſi $T=WR$ et $T+1$ vel $WR+1=3\,U$; aequatio $T\,(T+1)=3\,W\,(3\,W^2+3\,W+1)$ mutaretur in: $RU=3\,W\,(W+1)+1$, vel in $RU-1=3\,W\,(W+1)$. Eſt vero $U=\frac{WR+1}{3}$, et $RU=\frac{WR^2+R}{3}$ ergo $WR^2+R-3=9\,W\,(W+1)$, et $R-3$ per W diviſibile eſſe debebit. Poſito itaque $R-3=WV$, erit $R^2+V=9\,(V+1)$. Cum autem R ſit $=WV+3$, haec aequatio abit in $W^2V^2+6\,WV+V=9\,W$;

 et

Quodſi $T(T+1) = 9W^3 + 9W^2 + 3W = 3W(3W^2+3W+1)$ eſſet; haec aequalitas non niſi per ſequentes explicari poſſet caſus: aut enim eſſet

1°) quantitas $3W$ vel factor ipſius T, vel
2°) factor ſummae $T+1$, vel
3°) numerus 3 eſſet factor numeri T, et W factor numeri $T+1$, vel tandem
4°) numerus W factor quantitatis T et numerus 3 factor ſummae $T+1$.

Si 1°) Quantitas $3W$ eſſet factor numeri T; haberemus $T = 3WV$, ſignificante V numerum quendam integrum et poſitivum; proinde $T(T+1)$ eſſet $= 3WV(3WV+1)$; haec vero expreſſio formulae $3W(3W^2+3W+1)$ aequalis eſſe deberet, unde ſequitur: $V(3WV+1) = 3W(W+1)+1$, vel $V-1 = 3W(W+1-V^2)$, et quantitatem $V-1$ per $3W$ diviſibilem eſſe neceſſe eſt. Sit jam $V-1 = 3WR$. hincque $V = 3WR+1$, et aequatio $V-1 = 3W(W+1-V^2$ abit in: $3WR = 3W(W+1-V^2)$, ſeu $R = W+1-(3WR+1)^2$, unde $(3WR+1)^2 + R = W+1$; hanc vero aequationem impoſſibilem eſſe, per ſe patet.

2°) Si $3W$ eſſet factor numeri $T+1$, vel ſi $T+1=3WV$ aequatio $T(T+1) = 3W(3W^2+3W+1)$ abiret in hanc $3WV(3WV-1) = 3W(3W^2+3W+1)$, vel in: $3WV^2 - 3W^2 - 3W = V+1$, et numerus $V+1$ per $3W$ diviſibilis e[ſſe] deberet. Sit $V+1 = 3WR$ hincque $V = 3WR-1$, et e[rit] $V^2 - W - 1 = R$; proinde ob $V = 3WR-1$ erit $(3WR-$ $-W-1 = R$; ideoque $9W^2R^2 - 6WR = W+R$; [un]de patet, R per W eſſe diviſibile. Poſito itaque $R = W$ h

haec aequatio induit formam $3UW(3UW^2 - 2) = 1 + U$ [illegible] cujus impoſſibilitas perſpicua eſt. Quicumque enim valores in numeris integris numeris U et W tribuantur, terminus $3UW(3UW^2 - 2)$ ſemper major erit termino [illegible].

3°) Si autem 3 eſſet factor numeri T, et W factor numeri T + 1, ſcilicet ſi eſſet $T = 3V$, et $T + 1 = 3V + 1 = WR$; haberemus $3VWR = 3W(3W^2 + 3W + 1)$, ex quo ſequitur $VR = 3W^2 + 3W + 1$. Sed $3V + 1 = WR$, ergo $V = \frac{WR - 1}{3}$, et $VR = $ [illegible]; [illegible] $= 3W^2 +$ $3W - 1$, et [illegible]

[illegible]

et, V per W diviſibile eſt. Sit $V = NW$ eritque $W^3 N^2 + 6WN + N = 9$. Hujus vero aequationis impoſſibilitas exinde intelligitur, quod poſitis $N = W = 1$, quantitas $W^3 N^2 + 6WN + N$ erit $= 8$, et per conſequens minor termino 9; multo autem major evadit, ſi pro numeris N et W majores valores ponantur.

Ex his concludimus, numeros formae $T(T+1)$ nunquam in formula $9W^3 + 9W^2 + 3W$ contineri poſſe, atque ita aequationem $T(T+1) = 9W^3 + 9W^2 + 3W$ impoſſibilem eſſe, ſi T et W numeros integros et poſitivos denotent.

III. Theorema.

Nec ſumma nec differentia duorum cuborum cubus eſſe poteſt.

Demonſtratio.

Sufficiet demonſtrare, differentiam duorum cuborum cubum non eſſe poſſe; nam ſi impoſſibile eſt; eſſe $x^3 - y^3 = z^3$, nullo etiam modo $x^3 = y^3 + z^3$ fieri poterit. Hoc quoque theorema, ſi x, y et z ſint numeri integri, faciliime ad numeros fractos extenditur. Nam ſi $\frac{p^3}{q^3} - \frac{m^3}{n^3}$ eſſet $=$ cubo, multiplicato utroque latere per cubum $q^3 n^3$, etiam $p^3 n^3 - q^3 m^3$, vel (poſitis $pn = P$, et $m = Q$) $P^3 - Q^3$ cubum eſſe oportebit, quod eſt contra theorema nunc demonſtrandum. Sint igitur x et y ejusmodi numeri integri, ut differentia cuborum $x^3 - y^3$ aequalis ſit cubo z^3, et erit quoque: $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = z^3$. Eſt autem z aut numerus primus, aut non. Si eſt numerus primus, erit vel:

A) $x - y = 1$, et $x^2 + xy + y^2 = z^3$; vel

B) $x - y = z$, et $x^2 + xy + y^2 = z^2$.

Si

Si autem z non eſt numerus primus; loco z ponatur mZ; (m et Z ſignificantibus numeros integros, qui multiplicati producant radicem cubicam z) et erit vel:

C) $x-y=1$, et $x^2+xy+y^2=m^3Z^3$, qui caſus ad A reducitur, vel

D) $x-y=mZ$, et $x^2+xy+y^2=m^2Z^2$, qui eſt caſus B, vel

E) $x-y=m^2Z$, et $x^2+xy+y^2=mZ^2$, vel

F) $x-y=m^3Z$, et $x^2+xy+y^2=Z^2$, vel

G) $x-y=m$; et $x^2+xy+y^2=m^2Z^3$.

H) $x-y=Z$; et $x^2+xy+y^2=m^3Z^2$, qui caſus ad praecedentem redit, permutatis inter ſe m et Z.

I) $x-y=Z^2$; et $x^2+xy+y^2=m^3Z$.

K) $x-y=Z^3$; et $x^2+xy+y^2=m^3$.

L) $x-y=m^2$; et $x^2+xy+y^2=mZ^3$, qui caſus ad caſum I reducitur.

M) $x-y=m^3$, et $x^2+xy+y^2=Z^3$, qui eſt caſus K.

Omnes vero hoſce caſus partim ad abſurdum, partim ad impoſſibile ducere, ita demonſtrabo:

1°) Si in B, E, F valores ipſius x, ſcilicet $y+z$, $y+m^2Z$, et $y+m^3Z$ in expreſſionibus $x^2+xy+y^2=z^2$, $x^2+xy+y^2=mZ^2$ et $x^2+xy+y^2=Z^2$ ſubſtituantur; hae expreſſiones abeunt in $3y^2+3yz+z^2=z^3$; $3y^2+3ym^2Z+m^4Z^2=mZ^2$, et $3y^2+3ym^3Z+m^6Z^2=Z^2$, quarum abſurditas per ſe patet, cum y, z, Z et m ſint numeri integri et poſitivi.

 2) Eo-

2°) Eodem modo, ſi in A, G et H loco x valores $y+1$, $y+m$ et $y+Z$ ſubſtituantur; formulae $x^2+xy+y^2=z^3$; $x^2+xy+y^2=m^2Z^3$; et $x^2+xy+y^2=m^3Z^2$ mutantur in $3y^2+3y+3=z^3$; $3y^2+3ym+m^2Z^3$ et $3y^2+3Zy+Z^2=m^3Z^2$, ex quibus deducitur: $y=\frac{-3+\sqrt{(12z^3-3)}}{6}$; $y=\frac{-3m+m\sqrt{(12Z^3-3)}}{8}$ et $y=\frac{-3Z+Z\sqrt{(12m^3-3)}}{6}$; expreſſiones autem $\sqrt{(12z^3-3)}$ vel $\sqrt{(12Z^3-3)}$ ſive $\sqrt{(12m^3-3)}$, nullo modo rationales fieri poſſe in numeris integris, niſi caſu z, vel Z vel $m=1$ ſequenti modo patebit. Si enim $12z^3-3=p^2$ ſtatuatur; p per 3 diviſibile eſſe neceſſe eſt. Sit ergo $p=3P$, unde erit $4z^3-1=3P^2$. Eſt autem $4z^3-1$ numerus impar, ergo et P debet eſſe numerus impar, formae $2T+1$; ex quo ſequitur $z^3=3T(T+1)+1$. Sit $z=1+V$, et erit $3V+3T^2+V^3=3T(T+1)$ et numerus V per 3 diviſibilis. Si itaque loco V ſubſtituatur valor $3W$, haec aequatio abit in $T(T+1)=9W^3+9W^2+3W$, quae vero impoſſibilis eſt ex theoremate II, ideoque ſi retrogrediamur; formula $12.z^3-3$ nunquam $=p^2$ poni poterit, niſi in caſu W. et $T=0$, ſive $z=1$.

3) Formulae C, K et M impoſſibiles ſunt. vid. Theor. I.

4) Supereſt caſus I vel L, qui ſequenti modo ad caſus A, G vel H in N. 2 reduci poteſt. Valor $x=y+m$ in aequatione $x^2+xy+y^2=mZ^3$ ſubſtitutus, illam in $3y^2+3m^2y+m^4=mZ^3$ transmutat, unde oritur $y+\frac{m^2}{2}=\frac{1}{6}\sqrt{(12mZ^3-3m^4)}$. Et perſpicuum eſt, quantitatem $\sqrt{(12mZ^3-3m^4)}$ rationalem fieri debere. Ponamus $12mZ^3-3m^4=Q^2$, et Q per $3m$ diviſibile eſſe oportet. Sit $Q=3mR$; aequatio noſtra evadet $4Z^3-m^3=3mR^2$,

et Z.

et Z per m erit diviſibile. Facto igitur $Z = mZ'$, obtinebimus $m^2(4(Z')^3 - 1) = 3R^2$, et $\frac{4(Z')^3 - 1}{3}$ erit quadratum. Proinde et $12(Z')^3 - 3$ quadrato aequale eſſe debet; quod, ut ſupra oſtendimus, non fit niſi caſu $Z' = 1$. Hoc autem caſu erit $Z = m$, et $y = 0$.

Cum vero ſuppoſitiones praecedentes omnes caſus poſſibiles involvant; certi eſſe poſſumus, nullo modo $x - y)(x^2 + xy + y^2) = z^3$ fieri poſſe, poſitis x, y, et z numeris integris et poſitivis, unde etiam ſequitur, neque in numeris integris neque fractis dari duos cubos, quorum differentia vel ſumma cubo aequalis ſit.

P H Y S I C A.

METHODUS NOVA POTASSINUM CARBONICUM PLENE SATURATUM OBTINENDI,

ADJECTIS NOVIS OBSERVATIONIBUS POTASSINI ACIDO CARBONICO IMPERFECTE SATIATI NATURAM SPECTANTIBUS.

AUCTORE

T. LOWITZ.

Conventui exhibita die 8. Jun. 1797.

§. 1.

Potaſſinum, uti quidem ſal hoc lixivioſum e vegetabilium cineribus et e tartaro crudo combuſto elixatione, depuratione et inſpiſſatione obtinetur, acido carbonico ex parte quidem, nunquam vero perfecte ſatiatum eſſe, neminem chemicorum fugit. Hinc, quando ſale hoc perfecte ſatiato nobis opus eſt, ex propoſito et ſingularibus quibusdam artificiis illud praeparemus, oportet.

§. 2. Conſtat porro, alcalia carbonico acido plane ſatiata permultis in operationibus chemicis longe aliter ſeſe gerere, et toto coelo diverſos effectus, quam quidem eadem acido hoc partialiter tantum ſatiata, edere. Variis quidem in operationibus perinde omnino eſſe videtur, per-

fectene an imperfecte tantum ſatiato potaſſino carbonico utamur. Sunt tamen ejusmodi quoque experimenta, quae neceſſario vel hujus vel illius uſum peculiari quaſi jure ſuo ſibi vindicant, ita ut egregie falleremur, ſi duo haec ſalia, primo quidem intuitu inter ſe ſimilia, reapſe autem a ſe invicem valde diſcrepantia, uni eidemque ſcopo nullo diſcrimine impendere vellemus; quae igitur duo ſalia, ut faſtidioſa circumſcriptione ſuperſedere liceret, ita in hac diſſertatione diſtinguere conſtitui, ut id quod acido carbonico arte perfecte ſaturatum eſſet, *Potaſſini carbonici* nomine appellarem; dum contra illud, quod partialiter tantum acido memorato nuptum eſſet et conſueta depuratione e cineribus clavellatis nec non e combuſto tartaro elicitur, *Potaſſinum vulgare* vocarem.

§. 3. Primariae, quibus duo haec ſalia a ſe invicem diſcrepant, qualitates ſequentes ſunt:

1) Potaſſinum vulgare, ſiccum, vaſis apertis repoſitum, brevi tempore, humore aëris attracto, in liquorem deliqueſcit:

2) Perexigua, ſuo nempe ponderi aequali, aquae copia facillime ſolvitur:

3) Sapore gaudet valde nauſeoſo, lixivioſo ſic dicto:

4) Alcoholi vini phlegmatico aquam eripit, in ſingularem cum eadem abiens liquorem alcoholis fundum occupantem:

5) Hydrargyrum, in acido nitri ſolutum, flavo ſub colore praecipitat:

6) Ple-

ↄ) Plerumque in cryſtallos concreſcit magnas pyramides obliquas duplicatas referentes, quarum baſis figura rhomboidea eſt:

Potaſſinum carbonicum.

1) Aëri libero expoſitum nec liqueſcit neque fateſcit, ſed permanens omnino deprehenditur:

2) Aqua ut ſolvatur, quatuor ſui ponderis ejusdem partes poſtulat:

3) Saporem ejus quod attinet, tantum abeſt, ut illum nauſeoſum potaſſini vulgaris imitetur, ut potius haud ingratus eſſe videatur:

4) Alcoholi phlegmatico partes aquoſas non eripit:

5) Mercurium in acido nitri ſolutum, albo, non flavo, ſub colore praecipitat:

6) Cryſtallos plerumque format, priſmata ſex laterum referentes, breviora et compreſſa illa; fit quoque, ut etiam aliter figuratae ſint, ſemper tamen diverſiſſimas ab illis potaſſini vulgaris.

§. 4. Primariae, eaeque a ſe invicem diverſae, quibus hodienum Potaſſinum carbonicum praeparari ſolet, methodi ſunt ſequentes:

1) Potaſſini vulgaris ſolutio, in apertis vaſibus iisque ſatis latis libero aëris acceſſui expoſita acido carbonico, quod ex aëre atmosphaerico attrahit, perfecte ſaturetur, quo fit, ut tandem ſua ſponte in cryſtallos ſibi proprias concreſcat. Methodus haec, quamvis ſimpliciſſima eſſe videatur, eo tamen laborat incommodo,

 quod

quod temporis intervallum, usque dum plenaria ſaturatio locum obtineat, nimis longum requiratur.

2) Tempore quidem non nihil breviori eadem methodo perfecta iſta ſaturatio obtinetur, potaſſini vulgaris ſolutio ſi ejusmodi in locis reponitur, quae acido carbonico, e materiis fermentationi vinoſae ſubjectis, evoluto abundant.

3) Cartheuſerus potaſſinum carbonicum obtinuit, dum ſuper potaſſinum vulgare retortae immiſſum ſpiritum ſalis armoniaci aquoſum deſtillatione abſtraxiſſet, quae methodus et mihi optime aliquoties ſucceſſit.

4) Centum potaſſini cauſtici partes cum 263 partibus natri carbonici recens cryſtalliſati in 300 aquae partibus ſolutae, interveniente leni ebullitione, in potaſſinum carbonicum commutantur:

5) Eodem modo potaſſinum, mediantibus 168 magneſiae carbonicae partibus, cryſtallos format *). In quibus quidem tribus poſterioribus caſibus acidum carbonicum, ob majorem ſuam cum potaſſino affinitatem, priſtina ſua connubia cum ammoniaco, natro et magneſia deſerit et ad potaſſinum tranſit:

§. 5. Expoſitae in paragrapho antecedente methodi eo omnes nituntur, quod potaſſinum vulgare uberiore acidi carbonici acceſſu, ſive mediato illo ſive immediato, ad perfectum ſaturationis ſtatum perducitur. Mihi vero viam ab illis methodis prorſus diverſam invenire licuit, qua quippe Potaſſinum carbonicum in vulgari contentum, abundantem in eo partem alcalinam removendo, elicitur.

§. 6.

*) Bergmanni Opuſc. phyſic. chem. Vol. I. p. 43. ſeq.

§. 6. Potaſſinum vulgare quum non ſit niſi ſal neutrum imperfectum, potaſſinum nempe carbonicum alcali qua dam copia ſuperſaturatum; et cum alcali purum aqua facillime. Potaſſinum vero carbonicum difficilius ſolvatur: prona utique conjectura eſt, Potaſſinum carbonicum uno et ſimplici cryſtalliſationis adminiculo ab abundante parte alcalina ſegregari poſſe, quod ſi revera ita ſeſe haberet, facillima certe via pateſceret, potaſſinum carbonicum ejusque largiores adeo quantitates obtinendi. Aſt experimentorum eventus, de quo propriis et ex propoſito circa hanc rem inſtitutis tentaminibus convictus ſum, conjecturam iſtam prorſus omnino refellit. Potaſſini nempe vulgaris ſolutio, leniſſimo igne ad cryſtalliſationis usque cuticulam evaporata, magnas quidem eas et pulchras cryſtallos gignit, quas chemicorum nonnulli, potaſſinum carbonicum eſſe, crediderunt; quas autem reapſe, quantumvis repetitis vicibus denuo ſolvantur et ad formandas cryſtallos evaporentur, non niſi ipſum potaſſinum vulgare eſſe, invenire mihi licuit.

§. 7. Phoenomenon hoc, quod, fallor an a chemicorum nemine hodienum obſervatum eſt? tanti mihi quidem momenti et memoratu adeo dignum videtur, ut, antequam modum meum, potaſſinum carbonicum e potaſſino vulgari eliciendi, exponam, operae pretium eſſe exiſtimem, brevibus praemittere, quid de ipſa eſſentiali Potaſſini vulgaris natura, propriis meis obſervationibus et experimentis edoctus, ſentiam.

Salia compoſita dum praeparantur, ſi partium conſtituentium unius vel alterius copia ea, quae perfectae utriusque ſaturationi debetur, major addatur: Solutio vel alcalina

lina parte vel acida, ſuperſaturata eſſe dicitur; atque hujus quidem ſuperſaturationis binae quaſi ſpecies ſedulo diſtingui debent, quarum unam, me judice, mechanicam et fortuitam quaſi, alteram vero chemicam appellare convenit.

§. 8. *Superſaturationem mechanicam* appello eam, in qua ſuperabundans ſive alcalina ſive acida pars ipſi ſali compoſito adeo leviuſcule adhaeret, ut absque ullo ſingulari artificio chemico, vel cryſtalliſationis ope, vel charta humefacta, vel alcoholis adminiculo, modo ipſum ſal compoſitum ſpiritu vini non ſolvatur, ita ſegregari poſſit, ut ipſum ſal compoſitum perfecte ſaturatum reſtituatur. Ita e. g. ſi potaſſini nitrici ſolutioni aliquam acidi nitrici vel potaſſini cauſtici copiam ſuperadderes; nitrum, hac ſuperſaturatione non obſtante, peracta debita evaporatione, in cryſtallos ſibi proprias concreſceret, ſuperadditam vel potaſſini vel acidi partem ſuperſaturantem in ſuperſtite liquore relinquens; vel ſi, cryſtalliſationis loco, nitrum e ſolutione hac mechanice ſuperſaturata alcohole praecipitares, addita illa vel potaſſini vel acidi pars nitrum deferens, ſuperſtite in liquore remaneret.

§. 9. *Superſaturationem* vero *chemicam* eam appello, in qua pars ſuperſaturans, vel alcalina vel acida, ipſi ſali compoſito longe fortiori et intimiore vinculo nectitur, ut nec alcoholis, nec cryſtalliſationis, neque etiam chartae madefactae auxilio ſegregari ab eo poſſit; quo et id accedit, quod cryſtalli hoc ſuperſaturationis genere obtinendae non forma tantum ſed variis etiam aliis qualitatibus a ſalibus ex iisdem quidem partibus conſtitutivis, ſed perfecta ſaturatione

tione conſtatis, toto coelo diſcrepant. Hujuſce modi ſuperſaturationis chemicae exempla in tartaro crudo, in ſale acetoſellae, in natro ſulphurico, potaſſino ſulphurico, ammoniaco tartarico, acido ſuperſaturatis, in alumine, in mercurio ſublimato et in Borace obvia nobis ſeſe offerunt.

§. 10. Atque haec omnia (§§. 6—9) ſi probe perpenduntur; mea quidem ſententia, nullum omnino relinquitur dubium, potaſſinum vulgare, acido carbonico imperfecte ſaturatum, chemicam potius ſuperſaturationem eamque alcalinam, quam ſtatum quaſi fortuitum, quae hodienum eſt chemicorum quorundam ſententia, prodere, hancque ob cauſſam ſalium ſuperſaturatorum claſſi adſcribendum eſſe; hac enim admiſſa hypotheſi omnia eaque ſequentia ſuperſaturationis chemicae criteria in ſale hoc noſtro quam pulcherrime conveniunt:

1) Potaſſinum vulgare proprias ſibi cryſtallos format, ab illis potaſſini carbonici et cauſtici plane diſcrepantes:
2) Qualitatibus ab illis potaſſini carbonici omnino diverſis praeditum eſt:
3) Pars ejusdem alcalina ſuperſaturans neque cryſtalliſationis (§. 6.) neque alcoholis auxilio a potaſſino carbonico, in potaſſino vulgare contento, ſegregari poteſt:
4) Potaſſinum vulgare, quamvis inſigni ſatis alcali ſuperſaturantis copia abundet, cauſticitatis tamen plane nihil oſtendit; dum contra cetera ſalia neutra ſuperſaturationis chemicae impatientia, ſi ſolutioni eorum tantillum lixivii cauſtici addatur, cauſticitatem haud dubiis indiciis produnt.

§. 11.

§. 11. Salia chemice ſuperſaturata, conſtat, in duo genera dividi poſſe. quorum unum acido, alterum lixivioſo ſale ſuperſaturata ſalia complectitur. Priorem illam ſalium claſſem acido ſcilicet ſuperſaturatorum quod attinet; variae ejusdem, quas §. 9. enumeravimus, ſpecies jam cognitae ſunt: altera vero claſſis, in qua nimirum alcalina baſis partem conſtituit ſuperſaturantem, hodienum quantum equidem memini, uno Borace abſolvitur; cui jam nunc Potaſſinum vulgare ceu alteram ſpeciem jure meritoque inferi debere, iis, quae ſupra expoſui, argumentis convictus, affirmare nullus dubito.

§. 12. Quemadmodum certa cujuscunque acidi vel alcali copia ad perfectam ſuam neutraliſationem determinatam alterius ſalis ſimplicis quantitatem requirit; ita ſimili omnino modo ſalia compoſita ſuperſaturationis chemicae capacia, ut ad perfectae ſuperſaturationis ſtatum perveniant, non niſi determinatam ſalis ſuperſaturantis copiam recipiunt. Quae quum ita ſint, ſalia chemice perfecte ſuperſaturata, ſi ſalis ſuperſaturantis major copia ſuperaddatur, ad duplicis quaſi ſuperſaturationis, et chemicae et mechanicae, ſtatum redigi, nemo chemicorum negabit. Hocce in caſu ſalis ejusmodi dupliciter ſuperſaturati pars illa ſuperabundans et ſuperſaturationem fortuitam efficiens vel cryſtalliſationis vel alcoholis beneficio, ſalvo ejusdem ſalis chemico ſuperſaturationis ſtatu, ſegregari poteſt, utpote quae ſali chemice ſuperſaturati jam non niſi mechanice, neutiquam vero chemice, adhaeret. Sic e. g. Potaſſinum tartaricum (Tartarus tartariſatus), quod ſal neutrum exhibet, potaſſino et acido tartarico conſtans, perfecte ſatiatum, per uberiorem eumque

que accurate determinatum acidi tartarici acceſſum ſuperſaturationis chemicae jam ſtatum ſubiens, totum in cremorem tartari convertitur; qui aqua aegerrime ſolubilis e ſolutione mox ad fundum delabitur. Quo facto, quicquid acidi tartarici, omnibus debita aquae copia antea ſolutis, ſuperadditur, id jam neutiquam chemice copulatur; nam inſtituta debita evaporatione, verus iterum tartarus concreſcit, poſtremam illam ſuperadditam acidi copiam omnem in liquore poſt cryſtalliſationem ſuperſtite relinquens. Egregium quoque aſſerti hujus noſtri explicandi exemplum Borax ſuppeditat, utpote qui ſal exhibet tanto baſis ſuae, natri nimirum, exceſſu chemice ſuperſaturatum, ut ad perfectum neutraliſationis ſtatum aequale fere acidi boracinici pondus poſtulet. Haec autem natri abundantia, quum natro boracinico chemice adhaereat, nec cryſtalliſatione, nec filtro humectato, neque alcohole, tolli poteſt. Si vero boracis ſolutioni vel tantillum natri puri ſuperadditur; Borax praeter eam, quam dixi, chemicam jam mechanicam quoque ſuperſaturationem ſubit; quo fit, ut ſuperaddita iſta natri pars vel cryſtalliſationis vel alcoholis ope a borace ſegregari queat.

§. 13. Ex iis, quae paragrapho antecedente diximus, luculenter patet, ſalis cujuscunque chemice ſuperſaturati partem eam, quae non niſi mechanicam ſuperſaturationem efficit, ceu heterogeneum ſalis chemice ſuperſaturati inquinamentum conſiderandam eſſe. At alia quoque ex parte ſalia chemice ſuperſaturata labe quadam laborare poſſunt, idque modo ei quem diximus, contrario, quippe quae ex defectu determinatae copiae materiae ſuperſaturantis originem

repetit. Hoc enim in caſu ſal ſuperſaturatum, ſalis compoſiti nondum ſuperſaturati quantitatem iſti, quem dixi, defectui proportionalem contineat, neceſſe eſt; cui quidem vitio, ſi ſal chemice perfectiſſime ſuperſaturatum deſideretur, iisdem depurandi mediis, quibus mechanica ſuperſaturatio corrigi ſolet, cryſtalliſationis praecipue adminiculo, medela afferri poteſt.

§. 14. Omnia haecce, quae paragrapho 12 et 13 de ſalium ſuperſaturatione chemica, tam perfecta illa quam imperfecta et mechanica, allegavimus momenta in potaſſino quoque ejusdemque ad acidum carbonicum relatione egregie comprobantur:

1) Potaſſinum carbonicum ſal eſt compoſitum, ſuperſaturationi cum baſi ſua valde obnoxium (§. 10. n. 1—4):

2) Etiamſi ſub vegetabilium materiarum et tartari crudi combuſtione quantitas acidi carbonici producitur plenariae praeſentis potaſſini ſaturationi ſatis ſuperque ſufficiens; maxima tamen ejusdem pars, ob intimum ſuum cum calorico conſortium, aëris ſub forma in auras abit; quo ipſo id efficitur, ut potaſſinum e relictis poſt comburationem cineribus elixatum, non niſi imperfecte acido noſtro nuptum, vel quod idem eſt, baſi ſua alcalina ſuperſaturatum, hoc eſt, potaſſini vulgaris ſub forma, deprehendatur.

3) Quum pro vario caloris gradu combuſtioni impenſo neceſſario quoque alia atque alia acidi carbonici copia in auras abeat; potaſſinum quoque, peracta elixatione alia atque alia acidi hujus copia ſociatum reperiatur, neceſſe eſt, hancque ob cauſam potaſſinum

vul-

vulgare, niſi arte et data opera, rariſſime perfecto ſub ſuperſaturationis chemicae ſtatu obtinetur:

4) Fortiori ſcilicet calcinatione, ob uberiorem acidi carbonici jacturam potaſſinum vulgare alcalina parte mechanice jam jam ſuperſaturatum prodit.

5) Si vero vegetabilium corporum incineratio, quantum quidem fieri poteſt, leniſſimo peragatur igne, potaſſinum vulgare, ob minorem acidi carbonici jacturam, alcalina parte imperfecte adeoque nimis parum chemice ſuperſaturatum obtinetur.

§. 15. Potaſſinum vulgare, utpote ſal compoſitum chemice ſuperſaturatum, cum ſub cryſtalliſatione ſua partem illam alcalinam, quae ſuperſaturationem chemicam revera efficit, neutiquam amittat (§. 6); ex ejusdem cryſtalliſatione commodiſſimum medium repeti poteſt, utrique ejusdem labi medelam afferendi, quae ex ignis gradu combuſtioni vegetabilium impenſo nimis vel magno vel parvo proficiſcitur (§. 14. n. 4. et 5). Priori ſcilicet in caſu (n. 4.) ſuperabundans pars alcalina, mechanicam potaſſini vulgaris ſuperſaturationem quae efficit, peracta cryſtalliſatione, in ſuperſtite ultima muriae parte lixivii cauſtici ſub forma remanebit. Altero vero in caſu, (n. 5.) ob inſufficientem partis ſuperſaturantis copiam, potaſſinum carbonicum ſub primo cryſtalliſationis initio una cum aliqua potaſſini vulgaris parte cryſtallos format (conf. infra §. 21), ita ut in ſuperſtite jam liquore, purum potaſſinum vulgare remanere, neceſſe ſit.

§. 16. Atque his omnibus (§§. 7—15), quibus, potaſſinum vulgare ſal eſſe baſi ſua alcalina chemice ſuperſatu-

 ratum,

ratum, demonſtravi, expoſitis, de qua quidem materia peculiari in diſſertatione plura dicere animus mihi eſt; ad id progredior, quod caput hujus diſſertationis eſt, methodum, qua potaſſinum carbonicum in potaſſino vulgari contentum a parte, qua chemice ſuperſaturatur, alcalina liberari poteſt, expoſiturus.

Potaſſini vulgaris ſolutio aequali vel duplici aquae quantitate parata acido quodam debiliore e. g. aceto deſtillato vel cremore tartari, quin etiam fortioribus acidis, uti ſulphurico, nitrico etc. larga aquae copia dilutis, ſi ſaturetur, ſub operationis hujus initio, non obſtante acido carbonico in potaſſino illo contento, ſolutio iſta ſatis inſignem acidorum dictorum quantitatem abſque ullo efferveſcentiae indicio recipit. Terram, quae audit foliata tartari, pro uſu pharmacevtico praeparanti, obſervare mihi ſemper licuit, efferveſcentiam prius non oriri niſi addita jam dimidia circiter parte totius quantitatis aceti, plenariae ſaturationi debitae; quod phoenomenon etſi dudum cognitum, tamen hodienum quoque erroneo modo a chemicis explicatur, opinantibus nimirum, iſtam efferveſcentiae moram aquae in ſolutione abundanti, utpote quae liberatum a potaſſino acidum carbonicum reſorberet, adſcribendam eſſe. Quae explicatio quam parum valeat, ex eo jam pateſcit, quod dictum phoenomenon, uti multiplici experientia edoctus ſum, tunc quoque locum habet, quando potaſſini vulgaris cum acidis illis dilutis ſaturatio accedente ipſa ſolutionis ebullitione ſuper igne ſuſcipitur; enim vero hoc in caſu, conſtat nullam plane acidi carbonici in aqua abſorbtionem locum habere, cum aqua acido carbonico frigida impraegnata,

et

et igni expoſita ſubtiliſſimum hoc acidum ſub ipſo ebullitionis initio prorſus omne aëris ſub forma in auras emittat. Denique ſententia iſta eo quoque potiſſimum argumento refellitur, quo conſtat, ſi inverſo ordine potaſſinum acidis addatur, effervesſcentiam ſub ipſo additionis initio absque mora et ſine ullo adeo caloris adminiculo ſubſequi. Veram igitur tardae iſtius effervesſcentiae cauſam, jam inde a quinque annis compertum habeo, ex eo repeti debere, quod acida potaſſino vulgari addita, primum eam alcali partem, quae ſuperabundat, aggrediantur, hacque parte jam ſaturata, et acidis etiamnum additis, nunc demum ipſa effervesſcentia ſubſequatur.

§. 17. Haec igitur, quae praecedente §pho expoſui, potiſſimum ea ſunt, quae, potaſſinum carbonicum e potaſſino vulgari ſegregandi, commodiſſimam eamque novam mihi viam patefecerunt, et quae ſequenti operatione abſolvitur:

Potaſſini vulgaris depurati quantitas quaecunque aequali vel duplici aquae frigidae copia ſolvatur et filtretur. Solutioni huic frigidae, mox et continue ſpatulo ligneo in gyrum actae, pededentim acetum deſtillatum adfundatur; haecque omnia eousque continuentur, donec effervesſcentiae primum indicium ſe prodat, quo viſo, jam nihil aceti ſuperaddatur, liquor autem filtretur et leni igne ad cuticulam usque evaporetur. Omnibus probe refrigeratis, concretae in liquore potaſſini carbonici cryſtalli ſacculo conoideo linteo a liquore ſuperſtite ſeparentur, et qui cryſtallulis in ſacco contentis etiamnum inhaeret, liquore manibus, quantum fieri poteſt, omni expreſſo, lixivium denuo leni calore ad cryſtalliſationis usque punctum evaporetur, eodemque plane

modo

modo ſuperſtes poſt ſingulas cryſtalliſationes liquor toties tractetur, donec nullas jam cryſtallos gignat. Inficias quidem ire non licet, quae ulterioribus cryſtalliſationibus obtinentur, cryſtallos aliqua quoque potaſſini vulgaris portione inquinatas eſſe ſolere; quo tamen non obſtante, cunctae cryſtalli dicto modo collectae juſta aquae frigidae copia, ut depurentur, junctim ſolvantur, et filtratae, leniſſimo calore denuo ad cryſtalliſationem revocentur; quae per alternas ſolutiones et cryſtalliſationes depuratio tribus vicibus repetita, puriſſimum albiſſimumque et in aëre libero nunquam non integrum potaſſinum carbonicum ſuppeditat.

His omnibus abſolutis, liquores, a prioribus cryſtalliſationibus et a binis vel ternis cryſtallorum depurationibus reſidui et mixti, ſi aceto deſtillato plene ſaturentur, conſueto procedendi modo potaſſinum aceticum ſive terram ſic dictam foliatam tartari largientur.

Notanda.

1) Potaſſini vulgaris, antequam acidum aceticum adfunditur, praevia in aqua ſolutione ideo hac in operatione opus eſt, quo acidi carbonici minor jactura fiat, acetum enim ſi ſali ſicco immediate adderetur, acidi illius aliqua pars in auras non abire non potuiſſet. Eademque de cauſſa acetum quantum fieri poteſt, non niſi paullatim, tenuiſſimi rivuli ad inſtar, idque perpetua ſub ſolutionis agitatione, addi debet: Quibus cautelis omnibus rite obſervatis, nulla fere acidi carbonici jactura pertimeſcenda eſt, donec materiae ſuperſaturantis pars alcalina aceto propemodum ſaturata fuerit, quod quidem momentum ex primis efferveſcentiae primordiis cognoſcitur.

2)

2) Ea acidi carbonici pars, cui potaſſinum carbonicum plenum ſaturationis ſuae ſtatum debet, potaſſino tam laxe adhaeret, ut ſola, inprimis continuata, ebullitione ſenſim ſenſimque tota in auras diſſiperetur, quam ob cauſſam ſolutionis hujus ſalinae evaporationem leniſſimo calore fieri oportet, neglectaque hac cautela, potaſſini carbonici magna pars in potaſſinum vulgare iterum converteretur.

3) Ipſius operationis ratio cuivis obvia eſt, aceticum nimirum acidum adfuſionis ipſius initio ſuperſaturantem tantummodo partem alcalinam aggreditur, quo ipſo fit, ut nulla hoc tempore efferveſcentia concitetur (§. 16). Hacce jam parte ſaturata, quod ex efferveſcentia tum demum oriunda cognoſcitur, et qua oriente nihil jam acidi ſuperaddi oportet, duo in liquore continebuntur ſalia neutra, potaſſinum videlicet aceticum et carbonicum, quorum poſterius, ob inſignem, qua pollet, cryſtalliſandi facultatem, evaporando et refrigerando facili negotio ſeparari poteſt a priori, quod utpote ſal deliqueſcens, poſt ſingulas cryſtallorum formationes in ſuperſtite liquore, a formatis potaſſini carbonici cryſtallis decantando, remanebit.

4) Obtinenda hac methodo ex certa potaſſini vulgaris copia potaſſini carbonici quantitas quanta futura ſit, adcurate definiri non poteſt; ſiquidem pro vario ignis gradu evaporationi adhibito, alia atque alia ipſius acidi carbonici copia expellitur. E duabus quidem libris potaſſini vulgaris ſeptem circiter potaſſini carbonici uncias obtinere mihi licuit.

§. 18. Simili prorſus ratione potaſſinum carbonicum e potaſſino vulgari ſegregari quoque poteſt, ſi pars ſuperabundans

dans alcalina acido ſulphurico, in locum aceti ſubſtituto ex aqua antea probe diluto, methodo, quam expoſui, prorſus eadem ſaturetur; quo in caſu, inſtituta debita evaporatione, potaſſinum ſulphuricum primum, continuata poſtea evaporatione ipſum demum potaſſinum carbonicum in cryſtallos concreſcunt. In ultima denique ſuperſtite muriae parte ſemper aliqua quoque potaſſini vulgaris copia etiamnum deprehenditur.

§. 19. Potaſſinum carbonicum denique eo quoque modo elicere mihi contigit, dum ebullienti ſuper igne potaſſini vulgaris ſolutioni ſulphuris pulveriſati tantam copiam adderem, ut jam nihil ejus amplius ſolveretur, quo facto, ſolutionem evaporando, cryſtalliſando obtentasque cryſtallos depurando, purum conſecutus ſum potaſſinum carbonicum. Hoc in experimento perinde, ac in praecedente, non niſi ſuperabundans potaſſini vulgaris pars alcalina ſulphur aggreditur, potaſſinum ſulphuratum vel Hepar ſulphuris ſic dictum cum eodem conſtituens; ipſum autem potaſſinum carbonicum, cujus via humida nulla plane vis in ſulphur eſt, cryſtalliſationis et depurationis adminiculo a hepate ſulphuris, utpote quod in ſuperſtite poſt cryſtalliſationem liquore remanet, ſeparari poteſt.

§. 20. Monendum mihi eſt, priorem illam methodum, acetico nimirum acido adminiculante potaſſinum carbonicum e potaſſino vulgare eliciendi, poſterioribus duabus praeferendam eſſe idque ſequentes inprimis ob cauſſas:

1) Quia in officinis pharmaceuticis ubi potaſſinum aceticum ſaepiuſcule in uſus medicos praeparatur, iſtius, quam

dixi,

dixi, methodi ope potaſſinum quoque carbonicum, uno quaſi eodemque labore obtineri poteſt.

2) Quia potaſſinum carbonicum, aceti ope quod obtinetur, ab adhaerente ipſi potaſſino acetico per crebriores alternasque ſolutiones et cryſtalliſationes longe faciliùs quam quidem idem, acidi ſulphurici vel ſulphuris ope quod obtinetur, a potaſſino ſulphurico depurari poteſt.

§. 21. Supereſt denique alia quoque occaſio in laboratoriis chemicis obvia, qua potaſſinum carbonicum commode obtineri poſſe obſervavi, cujus hic mentionem facere non erit alienum. Hanc ſcilicet occaſionem ſpiritus, ut ajunt, et olei tartari foetidi e tartaro crudo deſtillatio ſuppeditat, qua quippe in operatione, quod poſt deſtillationem in retorta carbonis ſub forma remanet, ſal tartari acido quidem carbonico non perfecte ſaturatum, tanta tamen ejusdem copia imbutum eſſe conſuevit, ut unica elixatione lixiviique ad cryſtalliſationis cuticulam usque evaporatione ſine ullo alio artificio aliquam potaſſini carbonici copiam elicere liceat; ubi quidem notari oportet, obtinendas hac occaſione cryſtallos, ab inſigni, qua inquinatae ſunt, potaſſini vulgaris copia binis vel ternis adeo depurationibus liberari debere. Ex quadraginta ſuperſtitis ejus materiae nigrae libris duas fere potaſſini carbonici puriſſimi cryſtalliſati libras hac methodo nanciſci mihi quondam contigit. Probe autem meminiſſe oportet, methodi hujus nullum plane ſucceſſum eſſe, ſi caput mortuum ab olei tartari deſtillatione ſuperſtes, ſalis tartari plenius depurandi cauſſa, uti mos fert,

ante elixationem igne aperto fuerit calcinatum; cujus nimirum operationis vi tanta acidi carbonici copia in auras expellitur, ut ſimplici cryſtalliſatione, perinde ac e cineribus clavellatis (§. 6.) potaſſini carbonici ne hilum quidem obtineatur.

DE-

DESCRIPTION
DE LA
CÉLÈBRE MINE D'ARGENT DE ZMÉOF
AUX MONTS D'ALTAÏ EN SIBÉRIE.

Avec cinq Planches.

PAR

B. F. I. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 31 Mai 1798.

Les mines de Sibérie ſont diviſées par la Nature même en trois départemens placés à de grandes diſtances les uns des autres. Le *premier*, c'eſt-à-dire le plus voiſin de l'Europe, eſt celui de *Cathérinbourg* qui s'étend ſur toutes la grande chaîne des *monts d'Oural*; le *ſecond* eſt celui de *Kolyvan* à l'Eſt de Cathérinebourg, auquel appartiennent toutes les mines des *montagnes Altaïques*, qui ſont ſeparées des monts Ourals par des plaines immenſes, et le *troiſième* département eſt celui de *Nertſchinſk* dans la *Daourie* qui eſt la partie la plus orientale de la Sibérie.

La célèbre mine de *Zméof* ou *Zmeïnogorsk* ſe trouve au département de *Kolyvan* dans les montagnes, qui forment les premiers gradins occidentales autour de cette grande croupe, laquelle nous connoiſſons ſous le nom de *monts d'Altaï*. Elle eſt ſituée ſous le 51°, 9′, 25″ de lat. et ſous

 le

le 79°, 49′ 30″ de longitude à compter du méridien pariſien, entre les deux grandes rivières *Ob* et *Irtiche*, qui dans cette contrée ne ſont eloignées l'une de l'autre que d'environ 250 verſtes. Les allemands l'ont nommé *Schlangenberg*, ce qui ſignifie *la montagne des ſerpens*, en ruſſe *Zmeïnogorſkoï Roudnik*, dénomination qui lui a été donnée à l'occaſion de ſerpens, qui s'y trouvoient en ſi grande quantité lorsqu'on commença à travailler *), que la direction étoit obligée de commander des gens exprès pour les tuër.

Les anciens habitans de la Sibérie, qu'on appelle aujourd'hui *Tschoudes*, y avoient déjà travaillés, et ce n'étoit que d'après les veſtiges de leurs travaux, qu'on a découvert la riche mine de *Zméof*, ainſi que beaucoup d'autres dans ces contrées. Un bas-officier de mines, nommé *Träguer*, allemand de nation, y trouva le premier de l'or et de l'argent natif, et c'étoit en conſéquence de cette importante découverte qu'on a commencé à l'exploiter ſous l'adminiſtration de la Couronne en 1745, quoique la mine étoit déjà connuë depuis 1736.

La roche, dont cette colline eſt entourée le plus près, qui contient le filon, conſiſte d'une eſpèce de pierre de corne *ſchiſteuſe* diſpoſée en bancs plus ou moins inclinés

vers

*) Il y a des perſonnes qui croient que cette dénomination dérive des cornes d'ammon qu'on trouve dans le voiſinage, mais cette aſſertion eſt abſolument fauſſe, car des ouvriers qui y ont travaillé du commencement, lesquels vivent encore, et qui ont tué eux-mêmes beaucoup de ſerpens, aſſurent le contraire.

vers l'horizont, qui ſe laiſſent ſéparer quelquefois, ſans ſe déſeuiller pourtant, en plaques aſſez minces. Sans être *Pierre de corne* (Petroſilex) proprement ainſi nommée, ni de *Schiſte argileux*, ni de *Jaspe* non plus, cette roche fait le milieu entre la véritable *pierre de corne* et le *ſchiſte argileux*. Elle eſt prèsque terreuſe ou grainue à la caſſure, n'a point de transparence, pas même aux extrémités, étant en même tems ſi dure qu'elle donne des étincelles aſſez vives contre le briquet, et elle n'eſt pas fuſibles ſans addition d'un fondant. Toutes les collines les plus proches de la mine ſont compoſées de cette roche, entre autre celle qu'on appelle *Karhoulnaya-Sopka*, qui eſt la plus élévée du voiſinage; celle qui eſt vis-à-vis du *Kommiskoï-Rosnoſs*, ainſi qui celle ſur laquelle ſe trouvent les batimens principales de la couronne; et enfin pluſieurs autres qui l'environnent; mais un peu plus loin on trouve des roches primitives et pluſieurs d'une origine ſecondaire; par ex. du coté du Nord et de l'Eſt elle eſt environnée de montagnes *granitiques*, qui ſe prolongent à une diſtance de plus de cent verſtes, entre lesquelles ſe trouvent placés des *ſyénytes*, des *Porphyres* et des *Schiſtes cornés* et *argileux*. — A l'Oueſt il y a dans le voiſinage de la mine des dépôts calcaires contenant des *pétrifications*, entourés de collines de *porphyre*, de *pierre de corne ſchiſteux* et de *ſchiſte argileux*. Du coté du Sud, en allant vers *l'Irtiche*, eſt un pays prèsque entièrement découvert, ayant au Sud-Oueſt une grouppe de collines de Granit, qui vont ſe joindre à celles qui entourent le beau lac de *Kolyvan*, en ſe prolongeant jusques à une mine de cuivre très conſidérable appellée *Loktefskoï* ſur l'Aléï.

Mais

Mais la colline même, qui contient le filon, eſt compoſée de Pierre de corne *véritable*, c'eſt-à-dire de *Pétroſilex* des Minéralogiſtes, diſpoſé en bancs épais et fendû en tout ſens, de ſorte qu'il repréſente un amas énorme des maſſes irrégulières, ſur lesquelles répoſe le filon, qui lui-même eſt couvert de couches de *ſchiſte argileux*, tandis que la pierre de corne s'adoſſe contre une eſpèce de *piere talqueuſe*, qui vraiſemblablement a pour baſe le Granit de ces montagnes vers le Sud, dont nous avons fait mention ci-deſſus.

A l'égard de l'élévation de cet endroit comparée avec la hauteur des plus hautes montagnes du voiſinage, on ſait que le Baromètre ſe ſoutient à la montagne des ſerpens prèsque toujours à 27 pouces plus ou moins, méſure d'Angleterre, et que dans les obſervations correſpondantes faites ſur les *Biélki* ou montagnes *blanches* de *Tiguéretzk*, qui tirent leur nom de la neige, qui les couvre une bonne partie de l'année, le Baromètre y marquoit 23 pouces; mais ces montagnes ne ſont pas les plus hautes des monts d'Altaï, car ceux-ci en ſont encore bien éloignées, et ne ſe trouvent que dans les environs de la *Boutourma*, rivière qui s'unit avec *l'Irtiche*.

Pour faire connoître la riche mine de *Zméof* mieux qu'elle ne l'étoit jusqu'à préſent, je l'ai repréſentée avec toutes les roches, dont le filon eſt enveloppé, ſur cinq Planches ci-jointes. La première eſt le *Profil* du filon et marque ſon *inclinaiſon*; la ſeconde eſt le *Plan* montrant ſa *continuation* auquelle appertiennent auſſi les N 3 et 4; et la cinquième enfin repréſente le *Proſpect* et ſa *poſition extérieure*, dont l'explication detaillée ſe trouve à la fin de

ce

ce Mémoire. Maintenant je paſſe à la deſcription des roches et des mines, que cette célèbre montagne métallifère contient.

a) Roches. (Bergarten oder das Hangende und Liegende.)

1) *Pierre de corne. Pétroſilex.* (Hornſtein.)

Sa couleur eſt pour la plûpart d'un gris foncé tirant ſur le noirâtre; quelquefois elle eſt prèsque toute noîre, mais plus ſouvent encore d'un gris clair tirant ſur le rouge. J'ai même trouvé, quoique ſur un ſeul endroit dans le *Kommiskoï-Rosnoſs*, une belle variété, très joliment *rubannée* de couleur rouge et griſe.

La pierre de corne ſe trouve ici toujours en maſſes informes, et je n'en ai jamais pû remarquer aucune criſtalliſation; mais elle eſt ſouvent comme rongée, et quelquefois on voit un approchement à la figure ſtalactique. Elle eſt d'une ſurface ſeche et très rarement un peu liſſe. Sa fracture n'eſt pas terreuſe, quoique matte, ſouvent écailleuſe (ſplitericht) et quelquefois conchoïde, ce qui s'entend ſurtout de la variété de couleur noire, dont la caſſure eſt toujours plutôt conchoïde qu'écailleuſe. Ses fragments ſont indéterminés et pour la plûpart tranſparens aux extrémités. Elle eſt dure, et on en peut tirer des etincelles très vives avec le briquet, étant en même tems ſi denſe, qu'elle ne ſe caſſe pas trop facilement. Sa péſanteur ſpécifique eſt de 2655 à 2670 comptant celle de l'eau pour 1000. Elle eſt infuſible ſans fondant et n'eſt de rien mélée que de quelques petits points de Feldſpath ou de Quarz. En un mot cette pierre eſt ce que les Minéralogiſtes nomment pro-

proprement *Pierre* de *Corne* ou *Petroſilex*. Elle fait le mûr, contre lequel le riche filon de *Zméof* s'addoſſe, et long tems on l'a regardé comme la veritable parois inférieure, jusqu'à ce que par une traverſe marquée ſur la Planche ſous N. 10, en l'ayant percé, on trouva que la Pierre de Corne elle même répoſe encore ſur une autre roche, qui reſſemble à une variété de Stéatite; cependant le Petroſilex a dans cet endroit une épaiſſeur de 60 toiſes.

2) *Stéatite.* (Talk mit Spekſtein.)

Cette pierre eſt diſpoſée en grandes maſſes informes traverſées de beaucoup de fiſſures. Sa couleur eſt verdâtre et cendrée, tirant ſur le jaune et le gris clair avec différentes petites taches noirâtres et blanchâtres. Elle eſt compoſée pour la plûpart de parties aſſez à diſtinguer, qui conſiſtent de *Talk* et de *pierre de lard* melées de beaucoup de grains de Quarz et de pierre de corne, parſemées quelquefois de *Pyrite ſulfureuſe*. Sa ſurface eſt un peu liſſe et onctueuſe au toucher; elle a la fracture grainue et n'eſt pas ou presque point, transparente aux extrémités. Elle eſt un peu difficile à caſſer et ne fait feu contre le briquet que lorsque celui-ci frappe un grain de *Quartz* ou de *Petroſilex*, dont elle eſt melée. Cette roche donc fait le fond, ſur lequel la pierre de corne eſt couchée, de ſorte qu'il ſemble que le Petroſilex avec le filon ne ſoit qu'une et ſeule maſſe étendue en deux moitiées ſur cette roche; mais quant à moi je ſuis trés diſpoſé de regarder toujours la *Pierre de corne* ſeule comme le parois *véritable*; car ſi l'on ne vouloit nommer *parois* la roche *la plus voiſine* du filon d'une épaiſſeur ſi conſidérable, on ſera obligé, en

en perçant jusqu'au *Granit*, de ne regarder que celui-ci pour le veritable parois, ce qui ſeroit aller un peu trop loin.

3) *Schiſte marneux.* (Thonmergelſchiefer.)

Il eſt diſpoſé en couches qui ſont le toît d'une partie de la *Pierre de corne* et de *Stéatite* du coté de Sud dans la vallée, qui a été creuſée par la petite rivière *Zmeofka*. La couleur de ce ſchiſte eſt griſe tirant ſur le rougeâtre. Les couches ſe ſéparent en plaques aſſez minces. Sa caſſure eſt égale, eſt le tiſſu eſt ſerré quoique un peu aride au toucher; à l'air libre il ſe décompoſe aſſez facilement et ſe délite en fragmens trapézoïdales. La terre argileuſe y prédomine; elle n'eſt pas dure et ne donne point de feu contre le briquet.

Ces trois roches, ſavoir le *Petroſilex*, le *Stéatite* et le *ſchiſte marneux* ſont enſemble la *baſe*, ſur laquelle le filon repoſe; ainſi il nous reſte à décrire le *toît* ou le parois *ſupérieur*, qui conſiſte d'un

4) *Schiſte argileux.* (Thonſchiefer.)

Sa diſpoſition eſt en bancs d'une épaiſſeur de quelques pouces, et quoique il ne ſe caſſe pas en feuillets, ſon tiſſu eſt toujours plus ou moins *ſchiſteux*; mais il ne ſe fend jamais en feuilles ſi minces comme p. ex. *l'Ardoiſe*. Sa couleur eſt d'un gris foncé quelquefois presque noire; il eſt aride et terreux dans la fracture; la ſurface eſt mainte fois un peu onctueuſe au toucher; il ſe délite plutôt en fragmens trapezoïdales qu'en feuilles; il n'a pas la moindre transparence, pas même dans les extrémités. Sa dureté

 eſt

eſt pourtant aſſez conſidérable, parceque on en peut tirer quelquefois des etincelles avec le briquet; mais il y en a deux variétés. L'une couvre immédiatement le filon, et ſes bancs ſont plus épais; elle eſt plus noire et communement auſſi plus dure. L'autre fait la couche ſupérieure, qui en eſt ſeparée par un dépôt de *Poudingue*, remarqué ſur la Planche N. 6.

5) *Poudingue.* Brèche ſiliceuſe. (Kieſelbreccia.)

Entre les deux couches de *Schiſte argileux* ci-deſſus mentionnées, qui ſont enſemble le toît du filon, il y a un banc de *Brèche* ou de *Poudingue*, qui eſt d'autant plus rémarquable, qu'il renferme des *Corails pétrifiés* du même genre que ceux qui ſe trouvent dans un dépôt calcaire à deux verſtes de la mine vers l'Ouëſt. Ce Poudingue conſiſte de fragmens de *Pierre de corne*, de *Quartz*. de *Jaſpe* et de *ſchiſte argileux* liés enſemble par un ciment calcaire. Il prend un beau poli eſt donne des etincelles contre le briquet. Une brèche ſemblable ſe trouve auſſi dans le voiſinage où elle couvre immédiatément le filon de *Spath péſant* de la minière de *Karamyſchef*.

6) *Argille.* (Thon- oder Lettenlager.)

Le Schiſte ſupérieur, ou le *toît*, eſt lui même couvert d'une couche aſſez épaiſſe de différentes ſortes d'Argille de toutes couleurs; il y en a de rouge, jaune, brûne, noirâtre, bleuâtre, griſé et de blanche, dont la dernière eſt une véritable *terre de porcelaine*, comme l'on s'eſt convaincû par des épreuves. La plûpart de ces argilles ſont mouës, les autres endurcies.

Voilà

Voilà donc *six* différentes eſpèces de roche et de terre, dont le filon de *Zméoſ* eſt envelopé ; paſſons préſentement à la deſcription de ſa maſſe.

b) Gangue ou la maſſe du filon. (Gangarten.)

La maſſe du filon conſiſte principalemement de *ſpath péſant* melangé de quelques autres pierres, dont voici l'énumeration :

1) *Spath péſant.* Baryte vitriolée. (Schwerſpath.)

Sa couleur eſt ordinairement blanchâtre tirant ſur le gris; rarement il ſe trouve tout blanc, mais plus ſouvent d'un gris foncé et noirâtre. Il eſt diſpoſé en grandes maſſes pour la plûpart cunéiformes et très fortement liées l'une à l'autre, ayant pourtant des fiſſures et des fentes de toutes parts. Le tiſſu eſt lamelleux et le plus ſouvent écailleux (ſchuppicht), jamais compacte ou terreux et encore moins il ſe trouve en criſtaux réguliers. Sa ſurface eſt aride au toucher quoique prèsque toujours aſſez luiſante. La fracture eſt écailleuſe, avec cette différence pourtant, qu'une variété conſiſte de feuilles de quelque lignes et même quelquefois d'un demi pouce de largeur, tandis que l'autre n'eſt compoſée que d'écailles minces. Il ſe délite en fragmens trapezoïdales et rhomboïdales transparens aux extrémités. Quoique ſa dureté ne ſoit pas ſi grande pour en pouvoir tirer des étincelles avec le briquet, il eſt pourtant aſſez ſolide et ne ſe laiſſe pas trop facilement caſſer. Sa péſanteur ſpécifique eſt de 3545 jusqu'à 5441 contre 1000, ſelon ſa pureté; ordinairement il péſe d'environ 4400

2) *Witherite.* Baryte aérée. (Witherit).

On a auſſi remarqué depuis peu cette rareté minéralogique dans le *filon de Zmeof*, et notamment par nids dans le Spath péſant ordinaire, mais en très petite quantité. Il eſt de couleur blanche tirant ſur le jaune et ſur le rougeâtre. On le trouve en petites maſſes cunéiformes d'un tiſſu fibreux, dont les fragmens ſont demi-transparens, luiſans dans leur caſſure et reflechiſſant un eclat de nacre.

3) *Quartz.* (Quarz.)

Dans une profondeur d'environs de 75 toiſes on a rencontré une grande maſſe de Quartz, occupant une eſpace aſſez conſidérable entre la pierre de corne et le filon. Il eſt d'une couleur blanchâtre tirant ſur le jaune et le gris; il eſt compacte et plutôt matte que luiſant à la caſſure; il eſt denſe, peu transparente et dure, en un mot il eſt ce qu'on appelle Quartz *ſec* étant de cette variété qui déjà approche beaucoup à la pierre de corne. Dans le voiſinage du filon il eſt tout parſemé de *Pyrite ſoufreuſe*, de *Bleinde* et de *Galéne.* Outre cette maſſe on trouve le Quartz parfois en petits rognons et en grouppes criſtalliſés aux fentes du Petroſilex ou dans un mélange de pierre de corne, de ſpath péſant et de mines.

4) *Schiſte argileux gras.* (Fetter Thonſchiefer).

Entre la dite maſſe de Quartz et la Pierre de corne, qui fait le parois *inférieur*, il ſe trouve une fente aſſez large remplie d'un ſchiſte argileux noire, qui eſt mou et onctueux au toucher, impregné de *Pyrite*, de *Galène*, *d'Argent vitreux* et *d'argent natif* en feuilles et en grains.

5)

5) *Spath calcaire.* (Kalkſpath).

Cette pierre ſi commune dans presque toutes les mines des pays étrangers eſt très rare ici; on n'en trouve que des petits morceaux en feuilles rhomboïdales ou en pyramides triangulaires, qui quelquefois ſont reſſemblées en *crête de cocq*.

6) *Spath fluor.* (Fluſs-Spath).

Celui-ci eſt encore plus rare, que le Spath calcaire, et on n'en a trouvé que quelques petites grouppes de criſtaux cubiques verdâtre et une ſeule fois on l'a rencontrée de couleur violette.

7) *Lithomarge.* (Steinmarck.)

On en trouva aux travaux de *Nycolaéſſky*, qui contenoit 2 Sol. d'argent par poud; il eſt de couleur blanche tirant ſur le jaunâtre, d'un tiſſu compacte et très-fin.

8) *Stéatite fin.* Pierre de ſavon. (Seifenſtein).

Il s'y trouve, mais en petite quantité, de couleur blanche et griſe, tacheté de points bleuâtres. Il eſt très-onctueux au toucher.

9) *Argille.* (Thon.)

Elle y eſt aſſez commune, principalement dans les travaux ſupérieurs, où l'on a exploité beaucoup *d'oxide de plomb* mêlé d'une bonne quantité d'argille de chaque couleur, ſurtout de jaune, de rougeâtre et de brune, ainſi que de blanche, de griſe et de bleuâtre.

10)

10) *Trapp.* (Trapp.)

Le ſilon *principal* de Zméof, ainſi que ceux de pluſieurs autres mines altaïques, eſt coupé dans une direction inverſe par des fentes conſidérables remplies de *Trapp*, circonſtance très-remarquable, qu'on ne voit, à ce que je ſache, nulle part en Sibérie, hors les monts d'Altaï; mais ce qui eſt encore plus curieux, c'eſt, que ce *trapp* coupe non ſeulement le Spath péſant, mais auſſi dans la même direction la Pierre de corne du parois inférieur, ainſi que le ſchiſte qui fait le toît, et que les *ſilons de trapp* tombent avec le ſilon *principal* dans la même profondeur, en faiſant avec lui un angle plus ou moins obtus. On en connoît jusqu'à préſent cinq, dont quatre ſe trouvent dans la grande taille à jour (dans le grand *Rosnoſs*) et un dans celle de la *commiſſion*.

Sa couleur eſt noire, ou d'un gris noirâtre et cendré; il eſt diſpoſé en grandes maſſes informes, qui ſe délitent en fragmens trapezoïdales; ſon tiſſu eſt très-ſerré; il eſt matte à la ſurface ainſi que dans ſa fracture, qui eſt en même tems terreux et un peu aride au toucher. Il n'a pas la moindre transparence, pas même aux extrémités et il n'eſt pas dur, de ſorte, que rarement on en peut tirer quelques etincelles avec le briquet; mais ſa denſité eſt telle qu'il faut employer beaucoup de force pour le caſſer, ſurtout en morceaux qui n'ont point de fentes; et c'eſt un indice très-caractériſtique, qui eſt propre à toutes les variétés de trapp *véritable*; reduit en poudre il donne une pouſſiere cendrée, qui fait une legère efferveſcence avec les acides.

De

De cette pierre ſont remplies, comme il eſt dit ci-deſſus, *cinq* filons, dont 4 traverſent le filon du coté de Sud-Eſt, ce qui eſt la *partie capitale*, et un celui des travaux de la *Commiſſion*, qui repréſente un gîte de minérai *ſéparé*. Leur epaiſſeur ne ſurpaſſe pourtant guère une Archine et demie.

Voilà donc 10 différentes pierres, dont toute la maſſe du filon de Zméof eſt compoſée; mais la principale en eſt toujours le *ſpath péſant*, qui ſe repreſente ſouvent en maſſes enormes prèsque toutes pures, et ſans aucun mêlange viſible. — A préſent nous paſſons à la deſcription des *mines* que ce grand filon contient.

c) Mines. (Erzarten.)

1) *Or natif.* (Gediegen Gold.)

Il étoit aſſez commun au commencement de l'exploitation et principalement dans les travaux ſupérieurs; mais dans la profondeur du filon, où l'on travaille préſentement, il ne ſe rencontre que rarement. Sa couleur eſt quelquefois d'un jaune aſſez foncé, mais plus ſouvent très-pâle, étant toujours mélé d'une bonne portion d'argent. Pour la plûpart on le rencontre en feuilles très-minces, quelquefois en plaques, dont l'épaiſſeur va jusqu'à l'epaiſſeur d'une lame de couteau. Souvent il ſe trouve en grains plus ou moins grands. La forme dans laquelle on rencontre ici l'*or natif* le plus rarement eſt celle des filets capillaires et des pyramides tetraédres, lesquelles pourtant ſont toujours très-petites. La plus grande quantité d'or natif ſe trouva

trouva dans la partie qu'on appelle *Kommiskoï-Roſnofs*, où l'on en rencontre encore aujourd'hui. Preſque toutes les mines qui s'y exploitent à l'ordinaire, lui ſervent de matrice; cependant le plus ſouvent c'eſt le ſpath peſant et la pierre de corne, ſur lesquelles il ſe trouve; le plus rare eſt celui, qui eſt implanté en plaques et en feuillets minces ſur la mine d'argent muriatique ou *lune de corne*, la quelle pourtant étoit aſſez commune autrefois dans les mêmes travaux de *Kommiskoï*. Au reſte on trouve ici l'or natif ſur la *Lithomarge*, *Galêne*, *Pyrite de cuivre* et même ſur le *cuivre vitreux*. Inviſiblement il inhère à toutes ſortes de mines, puisque tout l'argent de Zméof eſt *aurifère*.

2) *Argent natif.* (Gediegen Silber).

Il eſt beaucoup plus commun dans la mine de *Zméof* que l'or natif, quoique la plus grande partie ſoit tellement aurifère, qu'il en reçoit une couleur très-jaunâtre, dont reſulte cette variété qu'on appelle *Electrum*; mais il y en a de toutes couleurs, surtout celle d'un blanc terne et griſâtre ſouvent d'une ſurface mâtte.

Quant à la figure on le rencontre pour la plupart en petites lames minces ſuperficielles *ſur* et *dans* le *Petroſilex*, dont ſouvent les plus petites fiſſures ſont remplies; on le trouve auſſi en filets capillaires aſſez longs et très-fins, qui quelquefois ſont réunis en faiſceaux. Une de ſes figures les plus communes eſt celle en rameaux; quelquefois il eſt denticulé, grenu et en forme de mouſſe. Très rarement on le rencontre en petits criſtaux avec des pyramides tetraèdres. Toutes les roches et mines, dont le filon eſt compo-

compoſé, lui ſervent de matrice, ſurtout la pierre de corne, laquelle eſt parcourie quelquefois de lames d'argent natif comme en filons; mais on l'a auſſi trouvé dernièrement en feuilles minces ſur le ſchiſte noire ci-deſſus mentionné. Autrefois l'argent natif ètoit, ainſi que l'or plus commun dans les travaux ſupérieurs. Il faut remarquer au reſte qu'il eſt très rare de le trouver ſur la mine muriatique au lieu que l'or natif s'y rencontre ſouvent.

3) *Mine d'argent vitreuſe*, ſulfure d'argent.) (Glaserz.)

Sa couleur eſt d'un gris noirâtre. Le couteau y laiſſe une impreſſion plus ou moins luiſante ſans la pouvoir pourtant couper, car elle eſt pour la plus grande partie fragile. C'eſt auſsi par cette raiſon qu'ordinairement elle n'eſt pas fllexible ni maléable. On la trouve en petites maſſes informes compactes, ainſi qu'en grain, en lames minces et en feuilles ſuperficielles ſurtout dans les fentes et dans les fiſſures de la pierre de corne. Souvent elle ſe décompoſe en Ocre noire riche en argent. Dans le *ſchiſte noire onctueux* on l'a trouvé, il y a quelque tems, criſtaliſée en petits octaédres entaſsés l'un ſur l'autre de manière, qu'en réſulte une eſpèee de ramification dendritique.

4) *Mine d'argent cornée.* Muriate d'argent natif. (Silberhornerz.)

Elle eſt d'un blanc perlé, tirant ſur le gris foncé; quelquefois elle eſt d'un gris jaunâtre ou brun; la couleur violette et verte y eſt la plus rare; d'ailleurs cette mine a aſſez de demi-tranparence et ſe coupe très facilement. Son tiſſu eſt pour la plûpart compacte et denſe, mais quel-

queſois elle ſe trouve d'une forme terreuſe, presque comme la boue, à l'ordinaire on la rencontre en plaques, dont l'epaiſſeur va jusqu'à un demi-pouce, ou en feuilles minces, en petites veines et en taches plus ou moins grandes. La variété de couleur verte eſt quelquefois criſtalliſée en petites aiguilles arangées en points étoilés. Cette mine ne ſe trouve que dans les travaux *ſupérieurs* de la partie du filon qu'on appelle *Kommiſkoï-Roſnoſs*, et jamais on l'a rencontré dans la profondeur. Sa matrice eſt toujours ce Petrofilex *aride*, dont la fracture paroît plus *terreuſe* qu'aucune autre eſpèce de ce genre. On la trouve très ſouvent enſemble avec l'or natif, dont elle eſt parſemée; une ſeule fois je l'ai auſſi trouvé ſur le *bleu de cuivre terreux*; mais plus ſouvent on la rencontre dans un mélange de cuivre vert, de ſpat de plomb et d'ocre rouge argentifère.

5) *Mine d'argent alliée avec le ſoufre et le cuivre.*
(Silberglanz.)

C'eſt une mine de couleur d'étain et d'un tiſſu lamelleux ayant en même tems un grand brillant métallique. On la trouve en maſſe compacte et impregnée dans les autres mines et dans la roche, ſurtout dans la pierre de corne et le ſpath péſant. Son contenu en argent va quelquefois jusqu'à 50 pour cent, mais elle ne ſe trouve qu'en petite quantité.

6) *Mine d'argent rouge.* (Rothgülden.)

Cette variété des mines d'argent n'a pas encore été trouvée dans toute la Sibérie; et quoique on pretend d'en avoir rencontré quelques indices dans la mine de Zméof,

j'ai

j'ai lieu d'en douter. Pour moi je n'en ai jamais rien pû rémarquer.

7) *Mine d'argent blanche.* Argent combiné avec le Plomb, le Soufre, le Fer etc. (Weiſsgülden.)

Elle s'y rencontre quelquefois, mais rarement et en très petite quantité.

8) *Mine d'argent griſe.* Argent combiné avec le Soufre, le Cuivre, le Fer etc.

C'eſt une des mines les plus communes, que le filon de *Zméof* contient. Sa couleur eſt d'un gris plus ou moins clair, ſouvent foncé tirant ſur le rougeâtre, et dans ce cas elle contient toujours beaucoup de cuivre, dont la quantité va quelquefois presque à la moitié de ſon poid. Son tiſſu eſt d'un grain très ſerré; elle eſt dure et donne volontièrement des etincelles contre le briquet. Sa fracture eſt pour la plûpart conchoïde.

Elle eſt d'ordinaire très-riche en argent, dont le contenu eſt de 15 jusqu'à 70 Sol. par Poud. Il y en a une variété, qui, étant frottée, donne une odeur puante; elle contient 15 Liv. de cuivre et 30 Sol. d'argent par Poud. Au reſte la *mine d'argent griſe* ſe trouva et ſe trouve encore dans toutes les profondeurs du filon, mais rarement ſeule; elle eſt presque toujours melangée de *Galène*, de *Pyrite*, de *Blende* etc. Sa matrice la plus commune eſt le ſpath péſant.

9) *Ocre de Plomb.* Oxide de Plomb terreux. (Bleyocher).

Sa couleur eſt griſe et jaunâtre tirant ſur le rouge et le brun; elle eſt ſouvent mélé de Spath de Plomb ou de

 l'Ox-

l'Oxide ſpatheux. Pour la plûpart elle ſe trouve en forme terreuſe et friable, quelquefois en maſſes endurcies; on en rençontre avec de l'argent natif et de cuivre verd et bleu. Cette mine était aſſez commune dans les travaux ſupérieurs, mais dans la profondeur, où l'on travaille préſentement, elle ne ſe trouve guère.

10) *Spath de Plomb*, Oxide de Plombe ſpathique. (Bleyſpath.)

Il ſe rencontre ici de couleur blanche, griſe et jaunâtre. Son tiſſu eſt quelquefois compacte et la fracture eſt vitreuſe; il eſt transparent ou du moins demi-transparent, ſe trouvant en morceaux très-péſants ainſi, qu'en criſtaux prismatiques quadrangulaires rhomboïdales, ou en hexaëdres terminés par une pyramide du même nombre de facettes. On le rencontre auſſi en forme de géodes, dont l'intérieur eſt fibreux avec des rayons excentriques. Les différentes ocres argentifères, qui s'y rencontrent, et la pierre de corne, dans les fentes de la quelle il s'eſt niché, lui ſervent principalement de matrice.

11) *Galène*, Sulfure de Plomb. (Bleyglanz.)

Cette eſpèce de mine y eſt aſſez commune; elle eſt cependant plus rare aujourdhui qu'elle n'étoit au commencement du travail. On la trouve ordinairement d'un grain fin et brillant, et d'un tiſſu écailleux à petites facettes luiſantes. Elle eſt toujours riche en argent; mais il eſt rare de la trouver pure, puisque pour la plûpart elle eſt melangée de *Bleinde* et de *Pyrite.* Elle aime pour matrice mieux le *Spath péſant* que la *Pierre de corne.*

12)

12) *Cuivre natif.* (Gediegen Kupfer.)

Celui-ci n'étoit pas rare autrefois dans la mine de *Zméof*; ſurtout dans les travaux de la commiſſion (Kommiskoï-Roſnoſs); mais à préſent on n'y en trouve point. Parmi les echantillons anciennement exploités on voit de très belles pieces d'une figure dendritique, de couleur jaune et d'un brillant métallique aſſez beau. Il ſe trouva auſſi en morceaux informes, ainſi qu'en feuilles et en grains, dans du Spath péſant, dans un melange argileux et dans la mine de cuivre vitreuſe.

13) *Ocre de cuivre rouge.* Carbonate de cuivre rouge. (Erdigtes Roth-Kupfererz, Kupferblüthe.)

Elle eſt d'une belle couleur rouge, qui reſſemble au cinabre. Elle adhère ſous forme pulverulente comme un enduit, tantôt à la pierre de corne, tantôt à un mélange de *Petroſilex*, de *Spath péſant*, de *cuivre natif* et de *cuivre vitreux*, et quelquefois à une *argille blanche*, dans la quelle on la rencontre en nids et en veines.

14) *Cuivre vitreux rouge.* Cuivre oxidé rouge vitreux. (Rothes Kupferglas.)

Sa couleur eſt un rouge foncé; il ſe trouve ou compacte ou criſtalliſé en octaèdres et en filets capillaires aſſez transparentes. On le rencontre pour la plupart en morceaux informes dans l'Argille blanche melée de cuivre rouge terreux. Au reſte c'eſt une mine, qui ſe trouve très rarement au filon de Zméof.

15) Cui-

15) *Cuivre vitreux gris.* Cuivre oxidé gris vitreux. (Graues Kupferglas.)

La couleur de cette mine eſt un gris foncé tirant ſur le gris de plomb noirâtre; il eſt compacte, d'une fracture inegale et quelquefois prèsque choncoïde. Il eſt auſſi rare ici que l'oxide de cuivre rouge.

16) *Cuivre vitreux violet.* Cuivre oxidé violet vitreux. (violettes Kupferglas.)

Il eſt d'une belle couleur violette foncée, à caſſure vitreux; et ce n'eſt pas, comme on pourroit croire, une croûte ſuperficielle reſultée par un commencement de la décompoſition de la pyrite cuivreuſe, dont elle acquiert ſouvent ces couleurs variées, vives et changeantes, qui la font alors déſigner ſous le nom de *cuivre pyriteux en gorge de pigeons*; nôtre oxide en eſt très différent, car il ſe trouve en placques, dont l'epaiſſeur va jusqu'à un demi-pouce, qui parcourent le petroſilex et le ſpath péſant. Il eſt en même tems fragile, et très ſouvent dans le même echantillon accompagné de mine d'argent blanche et griſe, de pyrite et d'argent natif. Ce dernier le couvre quelquefois en feuilles minces et brillantes.

17) *Bleu de montagne*, cuivre bleu, Azur de cuivre, oxide de cuivre bleu. (Kupferblau.)

On le trouve ſous la forme pulverulente ou friable et en globules mamelonés, ainſi qu'en forme criſtalline Sa couleur va d'un bleu pâl jusqu'à celle d'un bleu très foncé, prèsque noirâtre. L'intérieur des globules eſt ſouvent ſtrié.

Lors-

Lorsqu'il eſt criſtalliſé c'eſt pour la plupart en prismes tetraédres rhomboïdaux, d'une ſurface fort luiſante et à casſure ſpathique. Autrefois on en a trouvé des grouppes ſuperbes, dont les criſtaux ſont ſouvent entremélés de l'oxide de plomb blanc ſpathique. Il ſe rencontre prèsque dans toutes les roches, ſouvent avec l'oxide de plomb terreux et quelquefois même avec de l'or et de l'argent natif.

18) *Vert de montagne*; Cuivre vert, Oxide de Cuivre vert. (Kupfergrün.)

Il s'y trouve pour la plupart de fois dans un état terreux, rarement fibreux et prêsque jamais d'une ſurface mamelonée et ſtalactitique. On l'a rencontré cependant plus ſouvent aux travaux ſupérieurs qu'aujourd'hui dans la profondeur.

19) *Mine de cuivre griſe.* (Kupferfahlerz.)

Ce n'eſt qu'une varieté de la mine d'argent griſe décrite ſous N. 8, et qui n'en diffère que par la plus grande quantité du cuivre qu'elle contient; ayant au reſte prèsque toutes les autres propriétés en communs.

20) *Mine de cuivre pyriteuſe.* (Kupferkies.)

Cette eſpèce de mine y eſt très-commune, ſurtout dans les travaux inférieurs et même dans la profondeur la plus grande, où l'on travaille préſentement et où le minérai eſt fort pyriteux. Sa couleur eſt ordinairement d'un jaune foncé tirant ſur le rougeâtre. Souvent elle eſt décompoſée en ocre noire. Il ſe trouve quelquefois en maſſes ſolides aſſez conſidérables, mais pour la plûpart il eſt parſemé dans le mélange de minérai avec d'autres mines.

21) Py-

21) *Pyrite ſulfureuſe.* **Sulfure de fer. (Schweſelkies)**

Elle eſt de couleur jaune pâle et d'un grand brillant. On la trouve informe, à caſſure granuleuſe et ſolide, et d'une figure ſtalactitique en gros mamelons liſſes, dont le tiſſu intérieur eſt fibreux et ſouvent diſpoſé en pluſieurs couches concentriques. Elle eſt toujours plus ou moins argentifère et ne ſe trouve guère ſeule, mais prèsque partout mélangé d'autres mines.

22) *Pyrite arſénicale.* Arſenic pyriteux. (Arſenikal-Kies.)

Elle s'y trouve d'une couleur jaune très pâle tirant ſur le blanc d'étain, et d'une figure mamelonée, dont l'intérieur eſt pour la plùpart fibreux ou gainu On l'a rencontré très-fréquemment dans les travaux ſupérieurs.

23) *Zinc ſpathique,* Carbonate de Zinç. (Zinkſpath.)

Il s'y rencontre, mais rarement, en figure ſtalictitique et même criſtalliſée en tables oblongues quadrangulaires, dont les deux bords ſont en biſeau et les angles ſolides légèrement tronqués. Ces criſtaux ſont blancs, transparents d'un tiſſu ſpathique et ſouvent raſſemblés en grouppes très-jolies.

24) *Bleind de Zinc.* Zinc combiné avec le Soufre et le Fer. (Zinkb ende.)

C'eſt un minéral qui ſe trouve très fréquemment dans la mine de Zméof auſſi bien aux travaux ſupérieurs qu'inféri urs. Sa couleur eſt griſâtre, jaune tirant ſur le rouge, verdâtre, brune et noirâtre. Elle a une caſſure luiſante et lamel-

lamelleuſe conſiſtant de feuilles minces, qui pour la plûpart ſont d'un tiſſu très-ſerré. La ſurface de quelques-unes approche quelquefois à la forme ſtalactitique et à la criſtalliſation pyramidale tetraédre. Au reſte toutes les variétés des Bleindes de Zméof ſont très *phosphoreſcentes* en les frottant dans l'obſcurité.

25) *Minium naturel.* (Naturliche Mennig.)

Enfin il faut auſſi faire mention du *Minium* qu'on y trouve depuis peu, et qui dérive de l'embraſement, qui ſe faiſoit il y a quelques années dans une partie de la manière de Zméof, par lequel une partie de la Galène ſe changea en *Minium*. Les Minéralogues à venir ne laiſserons pas ſans doute de le donner pour une veritable production *naturelle*, lorsqu'on aura abſolument oublié cet accident.

Voilà toutes les mines, qu'on a trouvé jusqu'à préſent dans le filon de *Zméof*; mais celles, qui s'exploitent dans la plus grande quantité, ne ſont que la *mine griſe* (Fahlerz), la *Galène* (Bleyglanz), la *Pyrite cuivreuſe* (Kupferkies), la *Bleinde* (Zinkblende), et *l'Ocre argentifère*, dont le *Spath peſant* et le *Petroſilex* ſont impregnés.

Le minérai le plus riche, excepté *l'or* et *l'argent natif*, conſiſte pour l'ordinaire d'un *mélange* de *mine griſe* parſemée de petits points de *mine d'argent blanche*, de *Galène*, de *Pyrite* et de *Bleinde*, dont le contenu en argent va de 3 jusqu'à 30 Solot. par poud. Celui de moindre richeſſe conſiſte de *Spath peſant*, melangé ſouvent de fragmens de *Petroſilex*, qui toutes les deux ſont impregnés *d'Ocre*, de *Galène*, de *Pyrite* et de *Bleinde* en grains très diſperſés.

ſés. Mais le *minérai le plus ordinaire*, et qui fait aujourd'hui la plus grande partie de l'exploitation, eſt le *Spath péſant* ſeulement impregné d'Ocre argentifère, dont il reçoit une couleur griſâtre plus ou moins foncée, de même que le *Petroſilex*, dont les gerçures contiennent de l'Ocre, de la mine cornée ou de petites parcelles d'argent natif prèsque inviſibles.

On diviſe ici les mines exploitées en *deux ſortes principales*, dont l'une s'appelle *le minerai ſpathique* (Spath-Erze), et l'autre (c'eſt-à-dire le Petroſilex argentifère) *le minerai ſec* (trockene Erze) à cauſe de leur propriété dans la fuſion, parceque celui-ci, étant très refractaire, le premier lui ſert de fondant.

Quant à *l'étenduë* et à la *poſition intérieure du filon*, comme cela ſe répreſente ſur les deſſeins ci-jointes, je ne dirai rien ici, ſi non qu'il occupe un eſpace de 5 jusqu'à 50 toiſes en epaiſseur, près de 100 toiſes en profondeur et de 150 toiſes en longueur ſur la ſuperficie de la montagne, y *non* compriſe la partie ſeparée des *travaux de la Commiſſion*; mais dans la plus grande profondeur il ne s'étend en longueur qu'à 15 toiſes en ſe comprimant et ſe racourciſſant de toute part, de manière qu'on doit craindre en peu de tems ſa perte entière, ſi l'on ne découvre pas peut-être des nouvelles indices de ſa continuation, dont il eſt pourtant fort à douter.

A l'égard de la *manière d'exploiter le minérai* je remarquérai qu'au commencement on travailla *au jour à taille ouverte*; dans la ſuite on creusa des *puits*, des *galéries* et des *traverſes* en grand nombre, pour la plupart à l'aide de

la poudre, parceque non ſeulement la *roche*, c'eſt-à-dire la *pierre de corne*, mais auſſi le *Spath péſant*, ne peut guère être exploité ſans poudre à cauſe de leur dureté. — Pour en tirer le minérai, et principalement pour tenir à ſec la miniére, il s'y trouvent *deux Machines* avec des roues à l'eau, dont le diamétre a plus de 50 pieds de Londres.

Pour *ſéparer la mine du rebût* on employe chaque année plus de mille garçons, et quoique préſentement on tranſporte aux fonderies des mines aſſez pauvres, la quantité du rebût monte toujours prèsque à deux tiers, de ſorte que pour rétirer p. ex. un millon de pouds de *minérai*, qui *mérite* d'être fondû, il faut exploiter 3 millons de pouds de la *roche minéraliſé*, dont on ſépare enſuite le minérai *fuſible*.

Le *nombre de tous les ouvriers* employés aujourd'hui à la mine de Zméof monte à 3400 têtes y compris environ 20 Officiers de mines, 100 bas-Officiers et maitres en différents métiers et les 1000 garçons susmentionnés, qui cependant ne travaillent qu'en été.

Il y a préſentement au département de Kolyvan *sept* fonderies pour la fuſion des mines d'argent, dont la principale eſt celle de *Barnaoul* sur l'Ob, à 250 Verſtes de la *montagne de ſerpens*; c'eſt ici où ſe fond la plus grande quantité du minérai de Zméof, dont l'exploitation aujourd'hui monte annuellement à 1200000 pouds; ſon contenu en argent eſt en général à $2\frac{1}{2}$ Sol., quoique une partie en contient de 3 à 4 Sol; mais la plus grande portion n'eſt que de $1\frac{1}{4}$ jusqu'à 2 Sol. par Poud; et 100 Pouds d'argent contiennent 2 jusqu'à 3 Pouds d'Or.

Depuis le commencement, c'eſt à dire de l'an 1747 jusqu'à, 1793 on a exploité et fondu de la ſeule mine de Zméof 37,784249 Pouds 24 Livres de minérai, qui contenoit en *argent* 34441 Pouds 11 Liv. $28\frac{34}{96}$ Sol., y compris environ 1000 Pouds *d'Or*, et dont la valeur de tous les deux monte prèsqu'à 44 millions de Roubles *).

En voici la repartition par annés:

TABLEAU

de la quantité du minérai tiré de la *mine de Zméof* et fondû dans les années ci-après marquées.

Années	Minérai.		Contenu en argent.		
	Pouds.	Liv.	Pouds.	Liv.	Sol.
1747	38591	—	66	33	$92\frac{1}{2}$
1748	166608	—	238	25	$16\frac{1}{2}$
1749	201585	—	258	31	$23\frac{1}{8}$
1750	137585	—	219	30	$23\frac{7}{8}$
1751	214665	—	409	12	$47\frac{3}{4}$
1752	128890	—	227	19	95
1753	268535	—	472	21	$48\frac{3}{4}$
1754	200488	—	293	26	$31\frac{1}{2}$
1755	248711	—	345	18	$34\frac{1}{8}$
1756	304409	—	431	25	$32\frac{1}{8}$
1757	152638	—	211	3	$93\frac{1}{4}$
1758	344303	—	448	22	$68\frac{1}{4}$

Années.

*) En comptant pour la 5e partie le déchet du métal cauſé par les différents procédés de fuſion et de purification, cette mine a donc donné pendent 47 années la valeur à peu près de 36 Mill. de Roub. et jusqu'à 1798 pour plus de 40 Millions, en Or et en Argent *pur*.

Années	Minérai		Contenu en argent		
	Pouds.	Liv.	Pouds.	Liv.	Sol.
1759	303335	—	419	—	75 3/4
1760	166979	—	243	29	75 7/8
1761	547489	—	848	20	70
1762	217341	—	309	37	4 3/8
1763	388006	—	558	25	45 1/2
1764	447381	—	653	14	78 5/8
1765	444820	—	560	33	5 5/8
1766	543846	—	914	30	44 3/4
1767	451990	—	780	3	25 5/8
1768	421870	—	651	10	32
1769	706782	—	960	39	27 3/8
1770	1107270	—	1303	22	14 3/8
1771	1507840	—	1788	12	85
1772	1020242	—	1120	8	51 3/4
1773	1198895	—	1283	17	38 5/8
1774	1326719	—	1479	14	51 1/8
1775	1338753	—	1311	5	36 3/4
1776	1561012	—	1483	14	89 5/8
1777	1494122	—	1192	19	82
1778	1391317	—	968	17	77 7/8
1779	1597118	—	1034	30	—
1780	1653567	—	920	28	65 7/8
1781	963593	—	509	5	86 7/8
1782	614319	—	378	20	64 7/8
1783	1099392	23	689	16	1 66/96
1784	866067	33	559	38	85 44/96
1785	1513731	18	851	5	71 5/8

Années.

Années.	Minérai.		Contenu en argent.		
	Pouds.	Liv.	Pouds.	Liv.	Sol.
1786	1434939	14	875	6	52 $\frac{68}{96}$
1787	1273301	24	801	6	40 $\frac{28}{96}$
1788	1498757	14	953	23	16 $\frac{64}{96}$
1789	1581887	10	1031	6	35 $\frac{40}{96}$
1790	1352422	15	878	30	19 $\frac{1}{96}$
1791	1068350	38	748	34	65 $\frac{64}{96}$
1792	1142318	5	801	10	94 $\frac{57}{96}$
1793	1131466	30	952	16	53 $\frac{56}{96}$
Total . . .	37784249	24	34441	11	28 $\frac{34}{96}$

EXPLICATION DES PLANCHES.

Tab. IV. Profil perpendiculaire de la Mine de Zméof.

1) gîte de minérai ou la gangue de Spath péſant.
2) Le parois inférieur de Petroſilex.
3) Le mûr de Stéatite ſur lequel répoſe toute la maſſe du filon avec ſes parois.
4) Schiſte marneux.
5) Schiſte argileux noire dure.
6) Depôt de Poudingue ſiliceux avec des pétrifications.
7) Schiſte argileux griſâtre.
8) Couche de différentes eſpèces d'argille.
9) Puits principals.
10) Traverſe par laquelle on a trouvé la baſe qui conſiſte de Stéatite.

Tab. V.

Tab. V. Profil horizontal de la Mine de Zméof de la ſurface de la montagne,

A. 1) Le filon de Spath péſant (qui repréſente la partie principale.)

2) Le parois inférieur de Petroſilex.

3) Schiſte marneux qui couvre la baſe du roc.

4) Schiſte argileux qui fait le toît.

5) Filons de Trapp noir.

6) Cette marque indique l'endroit du filon où l'on a pris le Profil perpendiculaire.

B. 1) Gite ſeparée du filon appellée *Kommiskoï-Rosnoſs.*

2) Le parois inférieur du Petroſilex.

3) Filon de trapp.

4) Schiſte argileux du toît.

Tab. VI. Profils horizontals dans une profondeur de 29 et de 37 toiſes,

A et B. 1) Le filon de Spath péſant.

2) Le parois de Petroſilex.

3) Schiſte argileux du toît, ou le parois ſupérieur.

4) Filons de trapp noir.

Tab. VII. Profils horizontals dans une profondeur de 76 et de 86 toiſes.

A et B. 1) Gîtes de minérai.

2) Le Petroſilex.

3) Ces points marquent la continuation ſuppoſée de Petroſilex.

4) Quartz ſec imprégné de quelques points de mine.
5) Schiſte noir onctueux minèraliſé.
6) Schiſte argileux du parois ſupérieur.
7) Filons de trapp.

Tab. VIII. Vûë de la Mine de Zméof.

1) Le puit de Wosnesensk.
2) Le puit de Préobragénsk.
3) Le puit d'Ekaterininsk.
4) Le filon de Spath péſant ſelon ſa plus grande largeur.
4°) Parois inférieur de Petroſilex.
4′) Couche d'argille.
5) Mûr au de là du quel ſe trouve le Kommiſkoi-Rosnoſs.
6) Tas de minéraí.
7) Maiſons pour la ſéparation du minérai.
8) Magazins de bled etc.
9) Laboratoire chimique.
10) Fortification.
11) Transporteurs de mine.
12) La petite riviére Zméofka.

MIRA-

MIRABIL. IALAPARUM HYBRIDARUM

ULTERIUS CONTINUATA DESCRIPTIO.

AUCTORE

Dr. J. T. KOELREUTER.

Conventui exhibita d. 10. Decembr. 1798.

Exp. XXV.

vulg. rubr. ♀. } ♀.
Jalap. longifl. ♂. }
♀ longifl. ♂.

Semina ex plantis Exp. XXIV. an. 1770. ſponte nata. Prod. an. 1771. ex ſeminibus hiſce ſponte natis plantae quatuor.

a) Tubus floris 2″, 8 — 11‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Calyx valde hirſutus. Laciniae floris oblongiores, plicatae, ac profundius fiſſae. Color ſatis lacteus, oſtio tubi e violaceo purpureo. Habitu tota planta longiflorae adhuc ſimilior, quam vulgari, aſt nunc plane ſterilis mihi viſa.

b) Tubus floris 3″, 5‴ longus; Limbus 1″, 3 — 5‴ latus. Calyx hirſutiſſimus, pilis quoad maximam partem purpuraſcentibus. Laciniae corollae valde oblongae, plicatae ac profundius fiſſae. Color, ut in a), oſtio tubi e violaceo purpuraſcente, ac ſtella exinde prodeunte viridule, margine rubello. Planta haec habitu ſuo in univerſum priori a) ſimilis quidem, aſt proventu

 ſemi-

ſeminum perpaucorum urnulaeformium ſpontaneo ab eadem abludens.

c) Tubus floris 2″, 9 — 11‴ longus; Limbus 1″, 1 — 2‴ latus, Calyx fere omnis glaber. Laciniae corollae ſatis rotundatae, ac minime fiſſae. Color pulchellus, qualem *Lilac* vocant, ſtella e violace purpurea. Planta caulium paucitate a caeteris diſtincta.

d) Planta unicaulis, ramis perpaucis, ſero autumno demum florens, pigmaea quidem, caeterum autem ad longifloram ſatis adhuc accedens.

Exp. XXVI.

vulg. alb. ♀.
Jalap. longifl. ♂. } ♀.
longifl. ♂.

An. 1770. d. 7. Aug. Flor. plur.

Prodierunt An. 1771. ſub hoc primo gradu aſcendente plantae quatuor.

a) Tubus floris 4″, 1‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Laciniae corollae, ad modum longiflorae, jam ſatis lacteolae, oblongae ac plicatae. Oſtium tubi e violaceo purpureum, cum ſtella pallidiſſime violacea. Plantae vaſtiſſimi ambitus, uti communiter aſſolent, ſub ſitu caulium procumbentium jam jam valde horizontali, ac in univerſum patri nunc multo propinquior, quam ſub priori ſtatu hybrido. Semina perpauca bona ſero nimis dabat, vix matureſcentia.

b) Tubus floris 2″, 6 — 7‴ longus; Limbus 1″, 1‴ Latus. Color floris lacteolus, oſtio tubi e pallide violaceo pur-

purpureo. Figura laciniarum corollae parabolica; hinc hae ipſae antice anguſtiores, leviter inciſae ac explanatae. Planta ambitu *a*) vix inferior, caulibus ramisque numeroſioribus ac ſuberectis. Vis vegetativa floreſcentiae tempore adeo lenta, ut pauci tantum ejus flores ſeſe recluderint; coeterum plane ſterilis.

c) Tubus floris 3″, 7‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos lacteolus, ſtella pallide viridi, ac exterius ſubviolacea. Figura laciniarum corollae circiter, ut in *a*) et *b*). Planta habitu univerſo ad *d*) accedens; vis ipſius vegetativa non minus lenta, quam *b*), hinc infoecunda plane.

d) Tubus floris 3″, 2‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Tubus floris admodum anguſtus: Laciniae rotundiores, haud profunde inciſae, aſt valde complicatae. Color florum lacteolus, oſtio e pallide violaceo purpureo. Planta, proprietatum reſpectu *c*), ſimilis.

Exp. XXVII.

Jalap. { vulg. rubr. ♀. / dichot. ♂. } ♀.

Jalap. vulg. rubr. ♂.

An. 1776. d. 17 — 29. Aug. Flor. plur.

Prod. An. 1777. plantae quatuor, vulgari rubrae, tanquam matri naturali nunc rurſum ſimiliores, quam dichotomae: omnes in ferendis ſeminibus ſatis felices.

Pond. plantae	*a*)	10 ℔. 6 lot.	Radicis 2 ℔.
— —	*b*)	2 ℔. 16 lot.	Radicis 1 ℔. 16 lot.
— —	c)	5 ℔. 11 lot.	Radicis 1 ℔. 21 lot.
— —	*d*)	1 ℔. 12 lot.	Radicis 1 ℔. 1 lot.

Exp. XXVIII.

Jalap. vulg. flav. ♀.} ♀.
Jalap. dichot. ♂.}

Jalap. vulg. rubr. ♂.

An. 1771. menſ. Jul. Flor. plur.

Prod. An. 1772. plantae quinque.

a) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus: laciniis ſatis rotundis. Color florum illi, ex copula Jalap. v. flav. ♀ cum v. alb. vel Exp. inverſ. (vid. infra Exp. XLIII. et XLIV) ſemper oriundo ſimillimus: ſc. ruber, cum levi aurantii tinctura. Genitalia ultra corollam longe porrecta. Tota planta vaſti ambitus, ac 3′, 3″ alta: caulibus, ramis ac floribus fere innumeris. Folia permagna. Forcunditas ipſius, praecipue ob florum copiam, major, quam vulg. ejusque varietatum. Pond. plantae d. 23 Oct. 12 ℔. Radicis 1 ℔. 29 lot.

b) Tubus floris 1″ longus; Limbus 1″, 2‴ latus: laciniis ſuboblongis. Color florum e pallide violaceo carmeſinus, absque notabili flavedine. Magnitudo plantae vulgari inferior. Folia obſcure viridia. Foecunditas infrequentior, quam in vulg. vel ſub priori ipſius ſtatu hybrido. Pond. plantae 3 ℔, 7 lot. Radicis 5 ℔. 10 lot.

c) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color florum pallidior paullo, quam a). Planta, propter bifurcationes ſuas obtuſangulas, vaſtiſſimi ambitus ac giganteae magnitudinis. Folia permagna ac dilute viridia. Faſciculi florum innumerorum denſius congeſti modicam tantum bonorum ſeminum copiam dabant. Seminum forma illi dichot. adhuc multum ſimilis.

d) Tu-

d) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color florum elegantiſſimus, ſc. e profunde violaceo carmeſinus. Silvula plantae humilior, foliis plurimis anguſtioribus ac intenſe viridibus, laudabili foecunditate praedita.

e) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores aurantii, ſtella e violaceo carmeſina; ac oſtio tubi purpureo. Genitalia ultra corollam longius porrecta. Silva plantae modicae quidem altitudinis, aſt bifurcationum obtuſangularum ratione vaſti ambitus. Flores innumeri, foecundiores, quam vulg.

Exp. XXIX.

Jalap. vulg. flav. ♀. } ♀.
Jalap. dichot. ♂. }

Jalap. vulg. ablb. ♂.

An. 1771. menſ. Jul. Flor. plur.

Prod. An. 1772. plantae ſeptem, quibus omnibus cotyledonum folia permagna.

a) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Color florum pallide carmeſinus, ſive intenſe roſeus. Planta notabiliter minor, quam ulla vulgarium. Folia e flavo viridia. Foecunditas, ut ſub priori ſtatu hybrido. Pond. radicis 1 ℔, 1½ lot.

b) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Color florum amoenus valde, e violaceo carmeſinus. Silvula hujus plantae reſpectu ambitus ſui aeque magna, ac vulg. aſt eadem multo humilior, caulibus ramisque minoribus, furculisque gracilioribus ac brevioribus. Folia e flavo viridia ac lucida. Foecunditas

tanta

tanta, quanta vulg. Pond. plantae 4 ℔, 20 lot. Radicis 1 ℔. 11 lot.

c) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Flores pallide carmeſini, marginem verſus flavedine notabili perfuſi. Planta reſpectu magnitudinis totiusque ſui habitus vulgarem maxime referens. Folia intenſe viridia ac lucida. Foecunditas vulgari non multo inferior. Semina majora, quam vulg. at jam ex incano villoſa, ut in eadem. Pond. plantae 5 ℔, 6 lot. Radicis 5 ℔, 17 lot.

d) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color florum pallide carmeſinus ſive intenſe roſeus. Planta ſtaturae humilioris minorisque ambitus, quam vulg. foecunditate autem eidem fere par: furculis gracilioribus ac brevioribus. Semina paulo majora, nigriora, angulisque acuratioribus dotata, quam vulg. Pond. plantae 2 ℔. 1 lot. Radicis 1 ℔. 19 lot.

e) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color florum e pallide violaceo carmeſinus, marginem verſus flavedine vix notabili ſuffuſus. Silvula magnitudine mediocris, foliis intenſe viridibus, furculisque patulis. Foecunditas haud minor, quam parentum naturalium. Semina iis vulg. majora quidem, aſt jam valde ſimilia.

f) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores intenſe violaceo carmeſini, calycibus majoribus. Planta, ut *e*) vulgari jam perſimilis, foecunditatis autem paullo remiſſioris.

g) Tu-

g) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 8‴ latus. Flores tam amplitudine, quam colore ex intenſe violaceo omnium ſpecioſiſſimi. Genitalia ultra corollam longius exporrecta.

Exp. XXX.

Jalap. vulg. flav. ♀. } dichot. ♂. } ♀.
Jalap. vulg. flav. ♂.
An. 1771. menſ. Jul. Flor. plur.

Prod. 1772 ſub hoc primo gradu deſcendente plantae quinque.

a) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos totus flavus, attamen notabiliter pallidior, quam vulg. flav. Tubus corollae ſatis incurvus. Planta ipſa magnitudine ac fertilitate ad vulg. flavam proxime accedens. Calyces ſemina matura includentes, majores, patentiores ac pallidiores erant, quam in eadem. Folia e flavo viridia. Pond. plantae 3 ℔. 8 lot. Radicis 1 ℔. 7 lot.

b) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flores e pallide violaceo carmeſini ac marginem verſus notabili flavedine tincti. Genitalia ultra corollam longe porrecta. Planta vaſto ambitu *a*) Exp XXVIII. neutiquam cedens, ac fertilitate vulg. flavae par. Caules ramique longi ac graciles, bifurcationibus jam ſat acutangulis. Folia e flavo viridia. Pond. plantae 5 ℔. 23½ lot. Radicis 1 ℔. 14 lot,

c) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Color florum idem fere ac in *a*) Silvula plantae vulg. flava

flava notabiliter minor. Folia ſatis intenſe viridia. Bifurcationes caulium ramorumque ſub angulis obtuſioribus, quam *a*) et *b*). Ceterum fertilitate vulg. flavae longe inferior. Pond. plantae 3 ℔. 12 lot. Radicis 3 ℔. 23 lot.

d) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flos pallidius flavicans, quam *a*) et *e*). Silvula plantae ambitus fere ejusdem ac vulg. flavae, aſt paullo depreſſior. Furculae caulium ramorumque ſatis obtuſangulae. Folia e flavo viridia. Calyces, ſemina matura continentes, ut in *a*). Foecunditas circiter vulg. flavae. Pond. plantae 2 ℔, 16 lot. Radicis 1 ℔, $23\frac{1}{2}$ lot.

e) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flos *a*) concolor. Calyces valde parvuli. Tubus corollae gracilis ac incurvus. Planta ambitu, habitu toto, florum copia ac fertilitate ad *e*) Exp. XXVIII. proxime accedens. Calyces, ſemina matura includentes, ejusdem quidem magnitudinis, ac vulg. flavae, aſt pallidiores.

Exp. XXXI.

Jalap. { vulg. rubr. ♀. / dichot. ♂. } ♀.

Jalap. dichot. ♂.

An. 1776. menſ. Aug. Flor. plur.

Prod. an. 1777. ſub hoc primo gradu aſcendente plantae duae, toto habitu ♂, ſi dichotomae jam multo ſimiliores, quam ſub priori ſtatu hybrido. Utraque modicum tantum bonorum ſeminum numerum dabat. Pond. plantae unius, ſub dio plantatae, 2 ℔. 19 lot. Radicis 1 ℔.

Exp.

Exp. XXXII.

Jalap. vulg. rubr. ♀. longifl. ♂.

Sem. an. 1772 ſponte nata.

Plantae ex ſeminibus hujus hybridae (Exp. I.) an. 1773. mihi prognatae ſex. Folia nonnullarum juniorum veſiculoſa.

a) Planta pigmaea, foliis veſiculoſis, ſordide viridibus, rubigine ſoedatis varieque convolutis; floribus valde longis e violaceo albicantibus, oſtio tubi amoene violaceo. Penitus ſterilis. Pond. plantae 16 lot. Radicis 18 lot.

b) Planta vaſtiſſimi ambitus, caulibus numeroſis, procumbentibus, foliisque obſcure viridibus. Semina perpauca bona. Pond. plantae 7 ℔. 14 lot. Radicis 2 ℔. 4 lot.

Not. Hac et ſubſequens ſub ſtatera odorem vinoſum de ſe ſpargebant.

c) Planta divaricati habitus, ſat magna, ramis exactis, tota villoſa, calyx praecipue. Flores e violaceo carmeſini, quamvis numeroſiſſimi, vix unum alterumve ſemen bonum dabant. Pond. plantae 3 ℔. 18 lot. Radicis 1 ℔. 5 lot.

d) planta alta ac divaricata, caulibus craſſis, valde longis, rubicundis, hirſutis; foliis pallide viridibus, veſiculoſis; floribus longis, e rubro violaceis, piloſis: omnibus infoecundis; caeterum habitu longiflorae adhuc valde affinis. Pond. plantae 1 ℔. 13 lot. Radicis 2 ℔.

e) et *f*) Plantae parvulae, divaricati habitus, ſubpigmaeae, quarum flores ſtatum perfectum haud attigerunt.

Ambae ſat cito in genicula ſua dilapſae. Pond. radicis unius $5\frac{1}{2}$ lot. alterius 26 lot.

Exp. XXXIII.

Jalap. vulg. alb. ♀.
longifl. ♂.

Sem. an. 1770. ſponte nata.

Plantae ex ſeminibus hujus hybridae (Exp. II.) an. 1771. enatae quinque.

a) Tubus floris 2″, 3‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color ac conformatio florum fere ut ſub priori ſtatu hybrido, attamen lobi oblongiores ac profundius inciſi, ſtella pallide viridi, oſtioque tubi intenſius violaceo, quam antea. Planta quoque ipſa habitus prioris anni, ampli ac divaricati, aſt penitus ſterilis.

b) Tubus floris 1″, 4 — 6‴ longus; Limbus tantum 10 — 11‴ latus. Totus flos albicans, ne oſtio quidem excepto, cum leviſſima *Lilac* tinctura. Lobi corollae ſubrotundi, leviterque inciſi. Tubus corollae ſatis incurvus. Planta ipſa magnitudine mediocris, habituque toto ad vulg. albam rurſus aliquantiſper accedens; caeterum ſummo gradu infoecunda.

c) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Color florum *Lilac*, oſtio tubi pallide violaceo. Tubus ipſe aliquantulum incurvus. Lobi corollae ſubrotundi, ac leviſſime inciſi. Planta habitu *b*, conſimilis, parvum bonorum ſeminum numerum praebuit.

d) Tubus floris 2″, 1 — 3‴ longus; Limbus 1″, 2 — 3‴ latus. Flos totus pallide *Lilac*, lobis, quam prius, multo

multo rotundioribus, minusque inciſis, tubo corollae incurvo magis, ejusque oſtio ſaturatius violaceo. Planta, licet ſatis ampla ac divaricata fuerit, ad vulg. albam jam multum vergebat, ſemenque unicum tantum bonum, aſt inſolenter magnum dabat.

e) Tubus corollae 1″, 9‴ — 2″ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Flos albus, oſtio tubi ej pallide violaceo carmeſino, Lobis corollae rotundioribus quidem, aſt aeque profunde inciſis, quam prius. Planta vaſto ſuo ambitu *a*) Exp. XXVI. ſuperabat; caules primarii valde craſſi. Diviſio caulium ramorumque, ac foliorum natura circiter ut ſub priori ſtatu hybrido. Quamlibet opportuno tempore ac copioſe floruerit, in ſummo tamen gradu ſterilis erat.

Exp. XXXIV.

Jalap. vulg. flav. ♀.
longifl. ♂.

Sem. an. 1770. ſponte nata.

Plantae 2dae generationis ex ſeminibus hujus hybridae (Exp. III.) an. 1771. enatae duae.

a) Planta ratione florum, quas hoc anno obtinueram, omnium pulcherrima. Tubus floris 2″, 1 — 2″ longus, inferius gracilis, ſuperius ſatis amplus, ſurſumque inflexus; Limbus 1″, 5‴ latus, lobis profundius inciſis ac fluctuatim plicatis. Color floris intenſe *Lilac*, ſive roſeus, violaceo permixtus. Flores equidem haud flexibiles, nec adeo graciles, ut longiflorae, aſt notabiliter deorſum flexi ac quaſi penduli. Tota planta in univerſum eidem approximata, foliis licet minoribus

inſtructa ac minor vulg. flava fuerit. Plures ejus flores ſequebatur exordium impraegnationis, hincque calyces ipſorum perſiſtentes, verum ovaria poſtinde marceſcentia. Semina pauca bona.

b) Tubus floris undique ſat craſſus, priorisque *a*) inſtar inflexus, 1″, 6 — 8‴ longus. Planta adhuc ſatis divaricata, ſubſtantiae colorisque foliorum autem reſpectu vulg. flavae notabiliter ruiſum approximata. Vis ejus vegetativa adeo lenta ac remiſſa erat, ut florum non adeo multi ad perfectionem pervenerint. Plurimi eorum decidui, rariorum calyces perſiſtentes ſemen includebant ſuperius valde depreſſum ac emortuum.

Exp. XXXV.

Jalap. vulg. rubr. ♀.
dichot. ♂.

Sem. an. 1771. ſponte nata.

Plantae ex ſeminibus hujus hybridae (Exp. IV) an. 1772. prognatae mihi decem.

a) Tubus floris 1″, 3‴ longus, 1″, 1‴ latus. Color floris e violaceo carmeſinus, tinctura flavicante vix notabili marginem verſus permixtus. Tubus corollae gracilis. Planta vaſti ambitus, quo parentes naturales longe ſuperabat, ac fertilitatis conſpicuae; ceterum vulg. rubrae proximior, quam dichotomae. Folia laete viridia. Semina longe majora, glabriora ac nigriora, quam vulg. rubrae, angulis acutis tuberculisque prominentibus, dichotomae inſtar, inſignita. Pond. plantae 9 ℔. 24 lot. Radicis ramoſae 7 ℔.

b) Tu-

b) Tubus floris 11‴ longus; Limbus 1″ latus. Color florum praecedentis, modo pallidior paullo. Tubus corollae, totius floris reſpectu, ſatis craſſus. Habitus plantae in univerſum vulg. rubrae jam ſatis reſpondens. Folia obſcurius viridia, quam *a*). Seminum bonorum numerus multum infra Exp. IV. Pond. plantae 9 ℔. 7 lot.

c) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores peramoeni, ex intenſe violaceo carmeſini. Tubus corollae mediae magnitudinis. Planta habitus reſpectu *b*) non abſimilis, foliis autem laete viridibus, tantaque foecunditate praedita, quanta vulg. rubrae unquam competit. Pond. plantae 3 ℔. 30 lot.

d) Tubus floris 10‴ longus; Limbus 1″ latus. Flos e violaceo carmeſinus, cum tinctura flaveſcente notabili. Oſtium tubi inferius flaveſcens. Tubus ipſe ſat craſſus. Planta exigua, foliis obſcure viridibus, floribusque rarioribus praedita, ac deciduis fere omnibus. Semina bona tantum perpauca, iis vulg. rubrae valde ſimilia. Floreſcentia ſub finem Septembris in hac jam ceſſaverat, cum plures aliae hybridarum ipſaeque naturales adhuc laete florerent. Pond. plantae 1 ℔. 9 lot.

e) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores aurantii, ſtella e violaceo carmeſina. Tubus corollae mediae longitudinis. Planta habitu *b*) non abſimilis, fertilitatis haud exiguae. Semina angulis acutis tuberculisque prominentibus inſtructa. Pond. plantae 4 ℔. 24 lot.

f) Tu-

f) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 3 — 4‴ latus. Color florum circiter ut *d*). Tubus corollae mediae conformationis. Habitu, plantae propter biſurcationes acutangulas, valde erectus. Folia grandia longeque acuminata. Fertilitate vulg. rubrae par.

g) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 11‴ latus. Color florum e violaceo carmeſinus, absque flaveſcentis admixtione notabili. Tubus corollae ſolito craſſior. Plantae ſilvula exilis, ut *d*; ſolia itidem obſcure viridia, ac ſemina bona perpauca.

h) Tubus floris 9 — 10‴ longus; Limbus 11″ — 1″ latus. Flores *c*) inſtar, peramoeni. Tubus corollae craſſiusculus. Planta equidem aliquanto major *g*) aſt vulg. rubra minor. Folia laete viridia. Semina bona tantum perpauca. Floreſcentia cum fine Septembris jam penitus ceſſans.

i) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores ex intenſe violaceo carmeſini, cum leviſſima tinctura flaveſcente. Planta ſatis ſpectabilis, certe vulg. rubra major, ac aeque foecunda. Folia obſcure viridia. Biſurcationes obtuſangulae. Semina ſat grandia, nigricantia ac obtuſa.

k) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Flores *i*) conſimiles. Planta exilis equidem, caulibus ramisque parcius inſtructa, attamen ſatis foecunda. Semina grandiora, bruna ac antice acuminata.

Exp.

Exp. XXXVI.

Jalap. vulg. alb. ♀.
dichot. ♂.

Sem. An. 1771. ſponte nata.

Plantae ex ſeminibus hujus hybridae (Exp. V.) an. 1772. enatae novem.

a) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores peramoeni, e violaceo carmeſini, absque ulla flavedinis mixtura. Tubus corollae ſat gracilis. Planta quidem non admodum alta, at faſti ambitus, caulibus divaricatis, partim fere horizontaliter decumbentibus, ac fertilitatis vulg. rubra vix inferioris. Pond. plantae 6 ℔. 24 lot. Radicis 2 ℔. 7 lot.

b) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color florum aurantius, ſtella e violaceo carmeſina. Tubus corollae gracilior. Silvula plantae exilis, foliis inſolenter parvis; de reliquo ſatis foecunda. Semina obtuſiora, iisque vulg. ſimilia. Pond. Plantae 1 ℔. 29 lot.

c) Tubus floris 1″ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Flores pallide violaceo carmeſini, absque notabili flaveſcentis tinctura. Tubus floris amplus. Silvula plantae exilis, humilis ac denſa, folia ipſius obſcure viridia ac ampla adeo contigua erant, ut rami vix conſpectui paterent. Floreſcentia ſub fine Septembris jam finita. Semina bona perpauca ac impreſſa valde. Pond. plantae 2 ℔.

d) Tubus floris 11‴— 1″ longus; Limbus 1″— 11″, 1‴ latus. Flores penitus albi, antheris flavis. Tubus corollae

rollae gracilior. Plantae ſtatura non adeo magna; Folia laete viridia. Foecunditas mediocris. Pond. plantae 1 ℔. 17 lot.

e) Tubus floris 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Color florum ſpecioſiſſimus, ex ſaturate violaceo carmeſinus. Tubus corollae mediocris. Planta toto ſuo habitu ad *c*) valde accedens, at ſeminibus bonis feraciſſima. Pond. plantae 1 ℔ 26 lot. Radicis 2 ℔. 20 lot.

f) Tubus floris 1″, 2‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color florum idem ac *e*) aſt paulo obſcurior. Tubus corollae gracilis. Silvula plantae vulgari minor, feminibus bonis feraciſſima. Pond. plantae 3 ℔. 16 lot.

g) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores ſpecioſiſſimi, ex intenſe violaceo carmeſini. Calyx ſolito major. Plantae ſtatura mediocris, foliis obſcure viridibus, furculisque acutangulis, infoecundior longe, quam ſub priori ſtatu hybrido.

h) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color flor. prioris g), ſed pallidior.

i) Tubus floris 1″ longus; Limbus 1″ latus. Color florum circiter, ut *h*). Silvula plantae humilior, foliis denſius congeſtis, furculisque brevioribus. Foecunditas ipſius multo remiſſior, quam ſub priori ſtatu hybrido.

Exp. XXXVII.

Jalap. vulg. flav. ♀.
dichot. ♂.

Sem. an. 1771. ſponte nata.

Plantae ex ſeminibus hujus hybridae (Exp. VI.) an. 1772. mihi prognatae novem.

a) Tu

a) Tubus floris 1″ — 1″, 1‴ longus; Limbus 1″, 2—3‴ latus. Flores ſtraminis colore, adeoque multo pallidiores, quam vulg. flavae. Tubus corollae leviter incurvus, craſſitiei mediae. Antherae rubrae. Lobi corollae antice ſatis profunde inciſi. Planta magnitudine vulgari flava inferior, multoque minoris foecunditatis, quam ſub priori ſtatu hybrido. Pond. radicis 2 ℔, 10½ lot.

b) Tubus floris 1″; 4‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus: lobis oblongis ac antice ſatis profunde inciſis. Color florum fere igneus ſive pallide carmeſinus, cum tinctura flaveſcente marginem verſus. Tubus corollae gracilior. Planta ſpecioſi ambitus habitusque ſubdivaricati: furculis caulium ramorumque multo magis obtusangulis, quam vulg. flavae. Folia perampla, e flavo viridia. Calyces et ſemina inſolitae magnitudinis. Ceterum valde foecunda. Anguli ſeminum ſubacuti, eorumque tubercula prominulae, ut in dichotoma. Pond. plantae 4 ℔. 6 lot. Radicis 4 ℔. 1 lot.

c) Tubus floris 1″, 6—7‴ longus; Limbus 1″, 8—9‴ latus: lobis rotundioribus minusque inciſis. Color florum pallide ſulphureus. Antherae rubrae. Tubus corollae inferius gracilis. Calyx ſolito major. Planta toto ſuo habitu, magnitudine ac fertilitate cum vulg. flava conveniens. Pond. plantae 3 ℔, 15 lot.

d) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 3″ latus. Flores pallide carmeſini, cum tinctura flaveſcente marginem verſus. Tubus corollae gracilis. Planta humilis, at robuſta ac denſius compacta: foliis parvis, obſcure viridibus, furculisque numeroſis, brevioribus. Nu-

merus florum conjunctim florentium inſolenter magnus. Fertilitas tanta fere, quanta vulg. flavae. Pond. plantae 3 ℔.

e) Tubus floris vix 1″ longus, adeoque valde brevis; Limbus 1″, 2‴ latus: lobis profunde inciſis. Flores pallide carmeſini, marginem verſus multa flavedine tincti. Oſtium tubi penitus flavum. Tubus ipſe quoque uno latere flaveſcens, ac in medio rubellus. Planta habitu ac magnitudine circiter vulg. flavae, fertilitate autem a priori ſuo ſtatu hybrido multum diminuta. Semina fere, ut *b*). Pond. plantae 2 ℔. 10 lot.

f) Tubus floris 1″, 3 — 4‴ longus; Limbus 1″, 1 — 2‴ latus. Flores ſtraminis coloris pallidioris. Antherae rubrae. Tubus corollae gracilior. Calyx ſolito major. Planta ipſa jam giganteae altitudinis erat, priusquam floreret. Folia e flavo viridia, perampla longiusque acuminata. Caules ac rami valde robuſti. Ceterum non admodum foecunda, forſan ſerioris floreſcentiae cauſa potius, quam vitii innati. Semina dichotomae valde ſimilia. Pond. plantae 13 ℔. Radicis varie diviſae 5 ℔ 24 lot.

g) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Flores e pallide violaceo carmeſini, cum tinctura flaveſcente marginem verſus vix notabili. Silvula plantae per exigua quidem, aſt foliis amplis, ſaturate viridibus probe contecta, penitusque foecunda.

h) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″ latus. Flores e pallide violaceo carmeſini. Oſtium tubi flavum. Calyx parvus. Planta altior ac divaricata, ſurculis praelon-

praelongis, acutangulis, foliisque e flavo viridibus. Flores plurimi decidui ac ſemina tantum perpauca bona.

i) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flores in medio e pallide violaceo carmeſini, ac marginem verſus ſubaurantii coloris. Planta vaſtiſſimi ambitus ac altitudinis valde conſpicuae: divaricationibus obtuſangulis. Folia laete viridia. Foecunditas vulg. flava ſuperior. De reliquo toto fere habitu ac ipſis ſeminibus, quamlibet vulg. flava majoribus et longioribus, ad dichotomam valde accedens.

Exp. XXXVIII.

Jalap. dichot. ♀.
longifl. ♂.

Sem. an. 1772. ſponte nata.

Plantae ex ſeminibus hujus hybridae (Exp. VIII) an. 1773 prognatae ſex.

a) Planta pigmaea: caulibus rubris, longis, huc et illuc verſis, ac admodum Tropaeoli indici depreſſis ac repentibus, foliisque parvis, pallide viridibus ac rubigine foedatis Ad floreſcentiam haud pervenit. Caulis primarius inferne faſciatus. Pond. plantae 6 lot. Radicis 2 drachm.

b) Planta parvula, habitus divaricati, foliis e flaveſcenti viridibus ac veſiculoſis. Nec floruit. Pond. plantae 24 lot. Radicis $5\frac{1}{2}$ lot.

c) Haec ſerum autumnum verſus flores demum produxit, apertionem non amplius attingentes. Pond. plantae 1 ℔. 16 lot. Radicis 10 lot.

d) Plan-

d) Planta magna, toto habitu ad longifloram valde accedens. Flores coloris *Lilac*, numeroſi valde, ſed plane infoecundi. Calyx villoſus ac ſubglutinoſus. Pond. radicis 2 ℔. 29 lot.

e) Silvula plantae plusquam mediae magnitudinis, caulibus ramisque tenuibus, glabris ac obtuſangulis; foliis parvulis, itidem glabris ac rubigine valde foedatis. Huic ratione floreſcentia eadem plane ſors ac *c*). Pond. plantae 3 ℔. 22 lot. Radicis 2 ℔. 15 lot.

f) Planta pigmaea. Pond. radicis tantum 6 lot.

Exp. XXXIX.

vulg flav. ♀.
Jalap. vulg. rubr. ♀. } ♂
longifl. ♂.

Sem. an. 1770. ſponte nata.

Plantae 2dae generationis, ex ſeminibus hujus hybridae, et quidem ex variet. *b*) Exp. XX. an. 1771. pronatae ſeptem.

a) Tubus floris 1″, 4—6‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores e pallide rubicundo flaveſcentes, ſive *chamois*: oſtio tubi purpureo. Planta circiter magnitudine vulg. flavae, foliis e flaveſcenti viridibus. Copia florum maxima, quorum plurimi decidui quidem, attamen ſat numeroſi foecundi. Semina natura e calycibus ſuis prominentia, iis vulg. quidem minora, aſt jam ſatis ſimilia.

b) Tubus floris 1″, 5—6‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus. Color florum *ckamois*, plus in flavum, quam rubrum, incli-

inclinans: oſtio tubi concolore. Tubus ipſe totus flavus. Planta magnitudinis reſpectu multum infra vulg. ac fere pigmeea, penitusque infoecunda. Folia obſcure viridia.

c) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus. Flores ex *chamois* jam rurſus in rubicundum vergentes. Oſtium tubi purpureum. Calyx magnitudine vulg. cum e contrario in caeteris omnibus minor fuerit, quam in eadem. Planta toto ſuo habitu vulgari valde affinis. Flores, licet copioſiſſimi, numerum ſeminum bonorum modicum tantum dabant.

d) Tubus floris 1″, 7 — 9‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Color circiter ut *a*). Habitus hujus plantae, matris ſuae hybridae inſtar, ſubdivaricatus. Flores licet copioſiſſimi, aſt ſemina bona perpauca.

e) Tubus floris 1″, 7 — 8‴ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Flores ſaturate flavi, ut Narciſſi Jonquillae, absque ulla rubicundi mixtura, odoris gravis ac ſuaviſſimi. Tubus floris gracillimus. Calyx omnium hujus Exp. minimus. Folia in flavum valde inclinantia. Floreſcentia larga. Semen bonum ne unicum quidem.

f) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 4 — 5‴ latus. Florum color fere ut *a*). Planta habitus divaricati, foliis e flaveſcenti viridibus. Floreſcentia larga, verum ſeminum bonorum numerum fero demum autumno pauciſſimus. Semina ipſa valde longa et anguſta.

g) Tubus floris 1″, 7 — 8‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Tota planta circiter ut *c*). Folia ex obſcure viridia. Floreſcentia largiſſima. Semina bona plane nulla.

Exp.

Exp. XL.

vulg flav. ♀.
Jalap. vulg. rubr. ♀.} ♂.
longifl. ♂.}

Sem. an. 1771. altera vice ſponte nata.

Plantae 3tiae generationis, ex ſeminibus praecedentis (Exp. XXXIX) et quidem ex individuis *a)*, *d)* et *f)* an. 1772 prognatae quindecim. (Ex. *a*).

a) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores e pallide rubicundo flaveſcentes, ſive *chamois*: oſtio tubi purpureo. Calyx valde anguſtus. Tubus corollae gracilis valde, ſuperne ſatis amplus ac incurvus. Silvula plantae minor ac rarior, quam vulg. flavae. Folia obſcurius viridia, parvula. Bifurcationes caulium ramorumque graciliorum ſat obtuſangulae. Faſciculi florum denſiores. Planta ab initio floreſcentiae infoecunda, autumnum verſus ſemina bona pauciora dabat nigricantia ac ſatis anguſta. Calyces ſeminum maturorum fere cylindrici, ancre apperſſi, apicibusque ſuis vix ultra ea porrectis. Pond. plantae 2 ℔. 26 lot. Radicis 6½ lot.

b) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color ac forma florum circiter ut *a*). Silvula plantae vulg. flava vix minor habitusque antecedentis. Faſciculi florum denſiſſimi, hinc numerus ſimul florentium omnium maximus. Foecunditatis ratio eadem, ac *a*). Pond. plantae 3 ℔. 4 lot. Radicis 2½ lot.

c) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color florum *a*) et *b*) conſimilis. Calyx craſſior, laciniis

niis ſolito longioribus. Planta habitu ac magnitudine *b*) fere ſimilis; Folia autem majora, et faſciculi florum rariores. Foecunditas priorum. Calyces ſeminum maturorum apicibus ſuis ultra horum faſtigium porrecti. Semina notabiliter minora quam vulg. flavae Pond. plantae 3 ℔. 18 lot. Radicis 26 lot.

d) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus: lobis oblongioribus. Flores toti pallide flaveſcentes: tubo graciliore. Calyx valde anguſtus. Planta vulg. flava notabiliter major, habitus autem ac proprietatum ratione eadem cum praecedentibus, immo foecundior paullo. Calyx ſeminum naturorum adeo brevis erat, ut apicibus ſuis illorum faſtigium haud attigerit. Pond. plantae 4 ℔ 2 lot. Radicis 25 lot.

e) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flores e pallide rubicundo flaveſcentes, ſive *chamois*. Calyx parvulus. Tubus corollae inferne valde gracilis, ſuperne ſat amplus. Sub initium Septembris florere demum incepit planta, magnitudine mediocris, habitus irregularis ac divaricati: foliis amplis ſplendentibus, veſiculoſo-rugoſis. Faſciculi florum denſi. Semina pauca ſero nimis dabat, vix matureſcentia. Calyces horum, ut in *a*).

f) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Totus flos pallide flavus. Calyx parvulus. Tubus corollae gracilis. Floreſcentia ſerior. Planta ipſa *e*) paulo minor, habitus ſatis exacti, foliis parvulis, dilute viridibus nitidis et rugoſis. Florum plurimi decidui, pauci ſerius foecundati. Semina horum, e calice longius prominentia, ad maturitatem plenariam vix pervenêre.

g)

g) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 3‴ latus. Flos *f*) concolor. Calyx et corollae tubus eidem ſimilis. Planta vulg. flava aliquanto minor, ac quoad habitum et floreſcentiam ab *f*) vix differens. Ex *d*).

a) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus: lobis oblongioribus. Flores pulcherrimi, e bruno flaveſcentes, ſive coloris boli armenae: oſtio tubi purpureo. Calyx parvulus, laciniis anguſtis. Tubus corollae inferne valde gracilis, ſuperne ſat amplus. Planta non adeo magna, habitus divaricati ac irregularis: caulibus paucis, inaequalis longitudinis ac fere ad horizontem proſtratis, ramisque rarioribus, ſub angulis valde obtuſis exeuntibus. Caules primarii autumnum verſus e bruno rubicundi, foliisque jam vacui. Folia ramorum eodem tempore parvula ſordide viridia, maculisque rubiginoſis infecta. Florum plurimi propullulando marceſcentes vis vegetativae debilioris cauſa, pauciores perfecte aperti ac foecundi. Semina matura bona pauciſſimma, parvula ac nigricantia, calycibus ſuis penitus contecta. Pond. radicis 17½ lot.

b) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus. Flores pallide flavi, marginem verſus dilute bruni. Calyx major. Tubus corollae valde incurvus. Genitalia ſolito longiora. Planta magnitudine vulg. flavae, habitus divaricati ac irregularis. Caules pallide virides, longitudinis inaequalis. Folia intenſe viridia, ſplendentia. Faſciculi florum adeo denſi, ut plurimi horum ſemper ſimul floruerint, decidui licet poſtea permulti, paucique tantum ſerius foecundati. Semina matura bona perpauca.

c)

c) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Flores e pallide rubicundo flaveſcentes, ſive *chamois*. Calyx parvulus ac breviſſimus. Tubus corollae valde gracilis. Genitalia ſolito longiora. Planta mediae magnitudinis ejusdemque cum *a*) habitus: caulibus proſtratis, nudis autem plurioribus; ramis ſub bifurcationibus acutangulis fere perpendiculariter erectis. Folia ramorum parvula, ſordide viridia, hinc et inde rubiginoſa. Floreſcentiae ac foecundationis phaenomena eadem, ac *a*). Semina bona glabriora et anguſtiora, quam vulg. flavae. Pond. plantae, fine Octobr. foliis fere penitus denudatae 28 lot.

d) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Florum color *c*) conſimilis fere, aſt paullo intenſior. Calyx anguſtus valde. Tubus corollae ut in c) Planta ipſa mediae magnitudinis, foliis minoribus, intenſe viridibus ac ſplendentibus. Caules ac rami primarii foliis orbi. Floreſcentiae ac foecundationis phoenomena *a*) et *c*) ſimilia. Calyces apicibus ſuis ultra ſeminum maturorum ſummitatem haud exporrecti.

e) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Florum color *chamois*. Calyx ac tubus corollae, ut in *d*). Planta minor, habitus divaricati ac valde irregularis, foliis intenſe viridibus et ſplendentibus; de reliquo ab eadem haud abludens.

f) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus, Florum color itidem *chamois*. Calyx et corollae tubus *e*). planta ipſa autem *d*) conſimilis.

Ex *f*).

a) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Totus flos omnium pulcherrimus, e bruno flaveſcens, oſtio tubi purpureo. Planta mediae magnitudinis, habitusque divaricati ac regularis. Caules ramique primarii craſſiores, foliis amplis, intenſe viridibus ac ſplendentibus ornati. Rami ſub bifurcationibus acutangulis erecti. Faſciculi copioſius florentes: floribus plurimis deciduis, paucioribus ſerius foecundatis. Semina bona perpauca, iis longiflore valde affinia. Pond. plantae 2 ℔. 17 lot. Radicis 31 lot.

b) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores in medio e pallide violaceo carmeſini, marginem verſus in aurantium vergentes. Calyx ſat magnus. Tubus corollae amplior. Planta ſatis magna, habitus divaricati ac regularis: bifurcationibus ſubacutangulis; foliis magnis, laete viridibus, ad vulg. flavam rurſum valde accedens. Faſciculi florum rariores. Florum plures infoecunde decidui, pauciſſimi ſemina bona proferentes. Semina iis longiflorae aliquomodo ſimilia.

Exp. XLI.

vulg. rubr. ♀. } ♀.
Jalap. longiſſ. ♂. }
vulg. alb. ♂.
Sem. an. 1770 ſponte nata.

Plantae 2dae generationis, ex ſeminibus hybridae (exp. XIV. *a.*) an. 1771 mihi prognatae octo.

a) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 6–8‴ latus. Flores pulchelli e carmeſino violacei: oſtio tubi coloris ejusdem intenſioris. Semina bona pauca.

b) Tu-

b) Tubus floris 1″, 4—5‴ longus; Limbus 1″, 4—5‴ latus. Color florum ut in *a*), aſt ſaturatior, ac in violaceum magis vergens, pulcherrimus. Semina bona pauca.

c) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Flores e violaceo carmeſini: oſtio tubi coloris ejusdem ſaturatioris. Semina bona ſat multa.

d) Tubus floris 1″, 4—5‴ longus; Limbus 1″, 4—5‴ latus. Flores albi, et quidem ejusdem, ac vulg. albae. Semina bona perpauca, vix matura.

e) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color florum ut in *b*). Semina bona perpauca.

f) Tubus floris 1″, 8‴ longus; Limbus 1″, 5—6‴ latus. Color florum idem, ac in *b*) et *e*).

g) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 3—4‴ latus. Flores albi, *d*) conſimiles. Vis vegetativa plantae adeo debilitata erat, ut, licet alta ſatis, ſero nimis ad floreſcentiam pervenerit; hinc etiam ſemen bonum vix unum alterumve foecundatum.

h) Tubus floris 1″, 3‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color florum, ut in *b*), *e*) et *f*). Semina bona ſat multa.

Not. Omnes hae plantae ejusdem habitus erecti erant, ut illa prioris anni, caulibusque ſuis craſſis ac foliis peramplis ab aliis ejusmodi plantis maxime diſtincta.

Exp. XI II.

Jalap. vulg. fllav. ♀.
longifl. ♂.

Semina an. 1771 altera vice ſponte nata.

Plantae 3tiae generationis, ex ſeminibus hybridae (Exp. XXXIV. *a*.) an. 1772 pronatae novem.

a) Tubus floris 1″, 4‴ longus; Limbus 1″, 6 — 7‴ latus: lobis rotundis. Totus flos albus: oſtio tubi pallide flaveſcente, et, quod in floribus Jalapae albis plane ſingulare eſt, tam ſtigmate, quam antheris rubris. Superficies tubi exterior e pallide flavo virideſcens. Calyx fere glaber Planta haec ab omnibus individuis ſubſequentibus in eo potiſſimum maxime diverſa, quod tota facie ad Jalap. vulg. proprius iterum accederet, cum iſtae e contrario non minimam cum Jalap. longifl. ſimilitudinem retinuerint. Silva plantae valde magna; rotunda et denſa, Jalap vulg flavam tam magnitudine, quam florum copia multum ſuperans. Folia intenſe viridia. Quamlibet florum plurimi infoecundati defluxerint, numerus tamen ſeminum bonorum haud exiguus erat. Semina inter ♀ et ♂ media. Pond. plantae 7 ℔. 12 lot. Radicis 3 ℔, 9 lot.

b) Tubus floris 1″, 5‴ longus; Limbus 11‴ latus. Flores roſei coloris, omnium pulcherrimi. Planta pigmaea, caulibus paucis, proſtratis ac irregularibus. foliisque parvulis, ſaturate viridibus, denſis ac hinc inde quaſi inflatis inſtructa. Vis ejus vegetativa adeo lenta erat, ut, jam menſe Majo ſub dio transplantata, d. 16 Sept. demum florere ipceperit. Florum plurimi propullulan-

do

do marceſcentes, perpauci tantum perfecti. Semen bonum unicum, ſerius matureſcens. Pond. plantae vix ultra aliquot lot. Radicis $4\frac{1}{2}$ lot.

c) Tubus floris 1″, 11‴ longus; Limbus 1″, 6‴ latus: lobis oblongioribus, ſubplicatis. Color florum ut b), modo pallidior paullo. Superficies tubi exterior pallide rubicunda. Calyx ſubpiloſus, laciniis ſat. longis et anguſtis. Planta habitu prioris anni, ejusdemque foecunditatis. Semina pauca bona, iis longifl. ſatis ſimilia, aſt iisdem longiora, quamlibet 2‴ tantum lata.

d) Tubus floris 2″, 2‴ longus; Limbus 1″, 4‴ latus. Color florum, ut b). Laciniae calicis latiores, margine valde piloſae. Tubus floris inferne gracilis valde, ſuperne ſat amplus. Planta ſubvilloſa, pigmaei habitus ac vegetationis lentae. Folia parvula, obſcure viridia. Quamvis flores plures ad plenariam perfectionem pervenerint, quam in b) ſemen tamen bonum ne unicum quidem dabant.

e) Tubus floris 1″, 7‴ longus; Limbus 1″, 7‴ latus; lobis rotundioribus ac plicatis. Color florum, ut c). Tubus corollae craſſior ac incurvus valde. Statura plantae valde mediocris, divaricata et irregularis. Expanſio caulium et ramorum fere ad modum longiflorae, Folia parvula, obſcure viridia ac ſplendentia. Vitia floreſcentiae eadem, ac b). Semina foecunda perpauca. Pond. radicis 9 lot.

f) Tubus floris 2″ longus; Limbus 1″, 5‴ latus. Color florum idem, ac b) et d). Statura hujus plantae praeſtantior ac vegetior, quam e). Florum perfectorum pauciſſi-

ciſſimi ſemina nonnulla bona dabant iis longiflorae valde ſimilia, aſt multo minora; plurimi vel plane ſteriles, vel ſemiſoecundati, decidui. Calyces *d*), e) et *f*) adeo patuli, quaſi ſemen bonum includerent, vel incluſum continuiſſent, non niſi mera germina vel ſemina ſemiſoecundata exhibebant.

g) Tubus floris 2″ longus; Limbus 1″, 1‴ latus. Flores intenſe roſei coloris, amoeniſſimi: lobis valde plicatis. Calyx major, laciniis villoſis ac patulis. Tubus corollae inferne gracilis valde, ſuperne impreſſus eodemque loco incurvus. Planta pigmaea, ſatis villoſa: caulibus ramisque paucioribus, divaricatis; foliis parvulis, ſordide viridibus et quaſi hinc inde ſufflatis inſtructa. Calyces seminum ſemiſoecundatorum valde patentes. Flores perfectiores pauciſſimi. Semen bonum unicum, iis longifl. valde ſimile, aſt gracilius, longiusque.

h) Tubus floris 1″, 6‴ longus; Limbus 1″, 2‴ latus: lobis valde plicatis. Color florum, ut *g*). Calyx ſimilis. Tubus corollae inferne valde gracilis, ſuperne ſat amplus. Planta humilis, divaricati habitus, foliis parvulis, ſaturate viridibus ac ſplendentibus probe contecta. Faſciculi florum denſiores. Calyces seminum ſemiſoecundatorum valde patuli. Semina bona perpauca, vix matureſcentia.

i) Plantula omnium maxime pigmaea, ac habitus ſatis divaricati: foliis ſordide viridibus, ſufflatis et veluti convolutis. Caulis primarius 2‴ tantum latus; rami ejus maximi vix ultra 8″ longi; Folium omnium maximum

ximum cum ſuo petiolo 2″ tantum longum ac 1″, 3‴ latum. Ad floreſcentiam haud pervenit, licet jam initio Maji ſub dio plantata, nec aliis coercita fuerit. Pond. totius plantula d. 4. Octobr. 2 lot. Radicis 3 lot. $2\frac{1}{2}$ drachm.

Exp. XLIII.

Jalap. vulg. alb. ♀.
Jalap. vulg. flav. ♂.

An. 1769 et ſeq. Flores plures.

Prod. an. 1770 et ſeq. plantae plures. Omnium flores e pallide violaceo carmeſini, multa flavedine ſuffuſi, ſive aurantii coloris, oſtio tubi purpureo ac ſtella e violaceo carmeſina notati.

Exp. XLIV.

Jalap. vulg. flav. ♀.
Jalap. vulg. alb. ♂.

An. 1769 et ſeq. Flores plures.

Prod. an. 1770 et ſeq. plantae plures, iis Exp. inverſi XLIII per omnia ſimiles. Quam ob cauſam ex copula harum varietatum tam hoc, quam inverſo experimento color ſemper ruber oriatur, merito quaeritur; cum tamen id in Verbaſcis ſimilis coloris (Siehe die dritte Fortſ. meiner vorläufig. Nachr. Verſ. III. IV. VIII. IX. XIII. XIV. XV. XVI.) olim non acciderit.

CHEL

CHEIRANTHUS TAURICUS DESCRIPTUS

AB

JOANNE LEPECHIN.

Conventui exhibita die 1. Apr. 1799.

Unicuique Phytologorum notum eſt, quanta incrementa plantarum ſcientia, praeſertim labente hoc ſeculo, coeperit, quorum que non ſpernendam partem vindicat ſibi patria noſtra, nam Academiae hujus ſodales celeberrimi, juſſu ac auſpicis CATHARINAE MAGNAE, Roſſiarum IMPERATRICIS, pie defunctae, diſſitas varias que Roſſiae regiones inveſtigandarum rerum naturalium cauſſa peragrantes, diverſa vegetabilia collegerunt atque deſcripſerunt et hoc modo herbariam rem auxerunt multum. Inter hos numerare liceat et Beatum Zuew collegam noſtrum quondam meritiſſimum, qui nuta ac conſilio atque adeo ope exellentiſſimi Domini a Domachnew, tunc temporis Academiae ſcientiarum Directore, ſuſtentatus, ſuſcepit iter in provincias patriae auſtrales ad inveſtiganda et determinanda varia Naturae producta in his reperiunda, peninſulam que Cherſoneſum Tauricum viſurus, diverſa ac numeroſa vegetabilia, quibus prata colliculis diſtincta et huic adiacentia, ſuperbiunt, tegit, ex his collectionem et herbarium ſuum reple-

repleri curavit, ex quo, ut quodammodo ab imminenti interitu vindicarem, plantam minime notam, icone expreſſam et ad tetradynamiam Linn. pertinentem, nunc in medium profero.

Rudimenta denticulorum utrinque germini inſidentium et omnis plantae habitus externus, illam ad genus Cheiranthi pertinere nullum locum dubio relinquunt.

DESCRIPTIO.

Radix parva, recta ſub terra deſcendens, formata ſat validis, ratione ſui, fibris lateralibus, oppoſitis, a capite, ex quo erumpunt, firmioribus. Tab. IX

Caulis, longitudine duorum, et quod excurrit, pedum, elevatus, glaber, pilis vix perceptibilibus, rarioribus tectus, teres, ſimplex, veſtitus foliis ab ipſo radicis capitulo ad diviſionem ipſius in tyrſum.

Folia: *Radialia* ex ipſo capitulo radicis exurgentia conferta, fere linearia, denticulata; *Caulina* modo alterna, modo oppoſita, anguſta, ſeſſilia, uno margine ut plurimum dentato-eroſa, dentibus foliiformibus, ſurſum ſpectantibus, terminata proceſſu longiori, fere lineari, acuto, aſt folia ſuperiora et alae integerrimae, anguſtae, lineares.

Summus caulis dividitur per dihotomiam et ex alis prodeunt tyrſi ſat longi, teretes glabri, florigeri.

Flores pedunculati, pedicellis tenuibus, longitudine florum, alternatim egredientibus.

Calyx: periathium, pro more generis, tetraphyllum, foliolis duobus verſus exteriora baſi gibbis.

Corolla tetrapetala, cruciformis: ungues petalorum longitudine calycis, ipſa vero ſubrotunda, ultra calycem exſerta, coloris ſordiode flavi.

Stamina: *Filamenta* ſex, ſubulata, longitudine petalis cedunt, et, uti claſſis prae ſe fert, duo oppoſita reliquis breviora, *Anthaerae* erectae, baſi biſidae, reflexae.

Piſtillum: *Germen* priſmaticum, longitudine cum filamentis certat. *Stygma*; bipartitum, craſſiuſculum perſiſtens.

Pericarpium: *Siliqua* compreſſa, angulis duobus oppoſitis obliteratis, rudimento denticuli notatis, bilocolaris, bivalvis, ſtylo breviſſimo, et ſtygmate bifido, erecto inſtructa.

Semina plurima, alternatim poſita, margine membranula cincta.

DE-

DESCRIPTION D'UNE NOUVELLE MINE DE CUIVRE NOMMÉE ACHIRITE

Avec une Planche.

PAR

B. F. J. HERMANN.

Preſenté à l'Académie le 23. Janv. 1800.

Il y a quinze ans à préſent qu'on a vu en Sibérie la premiere fois une pierre verte, laquelle étoit regardée comme une Emeraude véritable orientale, car feu Mr. l'Académicien *Ferber*, qui voyoit une grouppe de ces criſtaux apportée à St. Pétersbourg par Mr. le Général *Bogdanof*, l'a decrit dans les Annales de Chimie de Mr. de *Crell*, en les comparant à l'Emeraud orientale. Il répétoit ce jugement dans ſon Mémoire ſous le titre: *Mineralium quorundam rariorum recenſio adjectis obſervationibus geologicis*, qui eſt inſeré au 3e tome de nouvelles Actes de nôtre Académie, où il s'exprime là deſſus (pag. 260) de la maniere ſuivante: „D. *Bogdanof*, dit-il, ante aliquot annos Smaragdos „criſtallifatos e deſerto Kirgiſenſi Petropolin attulit; „mais „dans une note il ajoute ces mots: „Colore et facie quidem „Smaragdis ſimiles cryſtallos e ſuperiore Irtis fluvii regione „aliquoties acceptas vidimus, ſederant durioris fluoris ſpe-

 „cies

„cies in cryſtallos prismaticas efficta, nec ad chalybem „ſcintillans."

Comme on ne connoit point de Spath fluor de la contrée ſupérieure de l'Irtiche, il eſt probable que Mr. *Ferber* a vû la même pierre deux fois en la prenant premièrement pour une Emeraude, et l'autre fois pour un fluor, parceque cette pierre éffectivement vient du déſèrt des Kirguiſes et par conſequent auſſi des contrées d'Irtiche.

L'opinion d'un Minéralogiſte ſi célébre, comme Mr. *Ferber*, induiſit en erreur les autres, et on parla longtems de ces Emeraudes. L'anglois, Mr. *Bentham*, autre fois au ſervice de la Ruſſie, et qui a ſejourné pluſieurs années en Sibérie pour connoître les richeſſes naturelles de ce pays, a fait un voyage exprès pour chercher dans les déſerts Kirguiſiens cette mine d'Emeraude ſans la pourtant trouver, à ce que je ſache.

Pendant mon ſejour aux mines altaïques je tachois de me procurer entre autre auſſi cette prétendue Emeraude et d'en ſavoir le lieu natal, ainſi que les circonſtances de ſon exploitation; j'en ai appris ce qui ſuit: Dans la fortereſſe de Semipalatna ſur l'Irtiche vit depuis longtems un Marchand bouccarien nommé *Achir Mahméd*, qui ſe trouve en grande liaiſon avec les Kirguiſes, les Boucars et les Tachkiniens. Comme il fait quelquefois des voyages dans les déſérts à cauſe du commerce, il apporta une fois un ſac entier rempli de ces pierres vertes, qu'il avoit reçu des Kirguiſes, et qu'il regarda d'abord comme vitriol de fer. Parmi les criſtaux ſe trouvoient pluſieurs, qui étoient reunis en grouppes, et dont Mr. *Bogdanof* a reçu une, après avoir

avoir trouvé, que ces pierres, qui ne pouvoient pas être diſſous dans l'eau, ne ſoient point du Vitriol.

Mr. *Bogdanof* apporta ſa grouppe comme une grande rareté à S. Pétersbourg, et une autre étoit à Barnaoul, que j'ai vu en 1787. Toutes les deux doivent ſe trouver aujourd'hui dans la collection impériale à l'Eremitage.

Tandis que les Minéralogiſtes ſe rejouiſſoient d'avoir retrouvé la véritable Emerande orientale, on fit quelques eſſais avec elle au Laboratoire d'une des minières d'Altaï, et on trouva, qu'elle contenoit une aſſez grande quantité de cuivre; mais la rareté extrème de ces pierres n'a pas permis de les pourſuivre plus loin, et on ſe contentoit avec la découverte, que cette pierre ne ſoit point de l'Emeraude mais une eſpèce de mine de cuivre tout-à-fait particulière, en lui donnant en attendant le nom d'*Achirite* en l'honneur du ſusdit Marchand boucarien qui l'apporta le premier des déſerts des Kirguiſes.

Comme je me ſuis procuré, quoique très difficilement, une certaine quantité de ces criſtaux j'en ſacrifiois avec plaiſir la plus grande partie à l'Analyſe chymique, dont l'Académie a bien voulu charger notre habille confrere Mr. *Lowitz*, le quel trouva, que non ſeulement l'Achirite ſoit une véritable mine de cuivre, mais auſſi d'une compoſition differente de toutes les mines pareilles Cette pierre merite donc bien d'être mieux connue, qu'elle ne l'étoit jusqu'à preſent; en conſequence de quoi j'en donnerai ici ſa deſcription.

Cou-

Couleur.

L'*Achirite* eſt d'une couleur verte d'Emeraude très foncée, et par conſequent plus beau que ſont à l'ordinaire les Emeraudes d'Amérique.

Transparence.

Il n'eſt transparent que quand il ſe rencontre en petits criſtaux, ou en le caſſant en petits fragmens; ceux d'un volume un peu plus grand ou dont la criſtalliſation n'eſt pas finie, ne ſont transparentes qu'aux coins; mais des pieces taillées minces ſont parfaitement transparentes, ayant toute la reſſemblance avec l'Emeraude; cependant il eſt rare de trouver des criſtaux tout nets, la plus grande partie eſt impure et opaque.

Péſanteur.

Son poids ſpécifique, comptant celui de l'eau pour 1000, eſt de 3361 contre 1000.

Criſtalliſation.

C'étoit particulièrement à cauſe de ſa criſtalliſation que feu Mr. *Ferber* comparoit nôtre *Achirite* à l'Emeraude Orientale, croyant ſelon Mr. *Brückmann*, que celle-ci étoit, ainſi que l'Achirite, un dodecaédre à priſme hexaédre, terminé par deux ſommets à trois plans, quoique Mr. *Romé d'Isle* nië tout-à-fait dans ſa *Criſtallographie* l'exiſtence des Emeraudes ainſi nommées *Orientales*. Mais la forme de l'*Achirite* eſt en effet un *Dodecaédre* très-regulier conſiſtant, comme il eſt dit ci-deſſus, d'un priſme hexaédre à faces éga-

égales et terminé par deux ſommets à trois plans quadrangulaires, qui quelque fois ſont un peu rhombes. Voyez Planche XI. Fig. *a*, *b*, et *c*, dont *a* repreſente le priſme du criſtal en face, *b* le ſommet, et *c* la baſe. Il eſt pourtant très rare de le trouver d'une criſtalliſation ſi regulière; à l'ordinaire les criſtaux ſont reunis confuſement en grouppes, et ſouvent on n'en voit qu'une ou deux faces.

Grandeur des criſtaux.

La grandeur des criſtaux de nòtre *Aohirite* varie de l'épaiſſeur d'une tête d'épingle jusqu'à celle d'un quart de pouce et rarement au delà. Les figures *a*, *b*, et *c* ſont aggrandies, mais *d* et *e* ſont copiées d'après leur grandeur naturelle.

Lueur.

Toutes les faces latérales, ainſi que ceux des ſommets ſont toujours liſſes, et la ſurface paroit graſse; l'interieur eſt de même aſſez luiſant.

Caſſure.

Sa caſſure eſt pour la plûpart feuilletée en le caſſant de travers, et même prèsque ſpateuſe, parce que toute la pierre ne paroit compoſée que de petits rhombes; mais en le caſſant ſuivant ſa longueur elle eſt vitreuſe.

Dureté.

Quoique la dureté de notre Achirite eſt ſi conſidérable, pour en pouvoir gratter fortement le verre, en ſe laiſſant tailler,

tailler, et prenant un beau poli; mais il n'eſt pas ſi dur pour donner des etincelles en le frappant avec le briquet,

Parties conſtituantes:

Mr. *Lowitz* a trouvé par l'analyſe qu'il a faite ſuivant les Ordres de l'Académie que l'*Achirite* contient en 100 parties.

Chaux de Cuivre	55	parties.
Terre ſiliceuſe	33	—
Eau	12	—
	100	parties.

Il diffère donc de toutes les autres mines de Cuivre et notamment du Malaquite criſtalliſé, par la circonſtance que la terre ſiliçeuſe entre dans ſa compoſition non méchaniquement, mais chimiquement, et qu'il ne contient point, ſuivant Mr. *Lowitz*, de l'acide carbonique.

Propriétés au feu.

A cauſe de ſon extrème raretė on n'en a pas pu faire beaucoup d'eſſais au feu; il eſt connu ſeulement qu'au premier coup de feu il décrepit et change ſa couleur verte, tant à la ſurface que dans l'intérieur. en beau bleu foncé, après quoi il ſe fond aſſez facilement et donne une eſpèce de matte, dont on peut retirer ſon contenu en cuivre.

Uſage.

Cette raretė n'a pas permis jusqu'à préſent d'en faire quelque uſage, excepté qu'on tailla quelque pièces, voyant qu'il prend un beau poli, et comme ces morceaux reſſembloient

bloient aſſez bien à l'Emeraude on regarda, ſans aller plus loin, toute la pierre comme telle.

Lieu natal.

Quant au lieu natal de nôtre *Achirite*, le Marchand boucarien ſusmentionné m'a aſſuré, que l'endroit d'où l'on tire cette pierre, ſe trouve à peu près 500 verſtes au de là de l'Irtiche dans les déſerts des Kirguiſes en allant de la forteréſſe de *Semipalatna* vers le midi. Il s'y trouve, dit-il, une montagne de couleur verte, qu'il croit couverte d'une effloreſſence cuivreuſe; et en effet parmi les criſtaux nets de l'*Achirite*, que je poſſede, j'ai trouvé:

1) des petits morceaux de Malaquite rayonné.

2) des petites pièces de verd de montagne compacte, melé de petits criſtaux d'*Achirite*; et il y a même quelques morceaux de celui-là, dans les quels ſont implantés des criſtaux d'*Achirite*.

3) du Spath calcaire blanc.

4) des fragmens de pierre calcaire compacte.

De tout cela on peut conclure, il me ſemble, que nôtre *Achirite*, qui lui même eſt une nouvelle eſpèce de mine de cuivre, ſe trouve auſſi dans une montagne, qui contient des filons ou des couches cuivreuſes, qui ſans doute avec le tems pourroient devenir une riche minière.

DESCRIPTION
D'UNE NOUVELLE ESPECE DE CANARD
ET
D'UNE VARIETÉ DE L'HUITRIER,
QUI SE TROUVENT DANS LE CABINET D'HISTOIRE NATURELLE DE L'ACADEMIE IMPERIALE DES SCIENCES

PAR

L'ADJOINT SEWASTIANOFF.

Préſenté et lu le 8 Octobre 1800.

En parcourant la precieuſe collection d'oiſeaux, apporté par Mr. le Capitaine de la flotte *Billings* de ſon voyage, fait dans l'Archipel des Iles, ſituées entre les côtes orientales de la Sibérie et de Kamtchatka et les côtes occidentales de l'Amerique, et que l'Imperatrice, de glorieuſe memoire, CATHERINE II. envoya à l'Academie pour être conſervé dans ſon Muſée, j'ai trouvé quelques varietés d'Oiſeaux, et entre autres une nouvelle eſpèce de Canard, qui a mon sçu n'a jamais été decrite par aucun des naturaliſtes connus, c'eſt pourquoi j'ai entreprit d'en faire la deſcription et de donner la figure de cet oiſeau, digne d'attirer la curieuſité des Naturaliſtes par ſa beauté et le mélange élégant de ſes couleurs.

Ce

Ce Canard a le front, le haut de la tête et la nuque converts de plumes blanches, qui entourant la partie poſterieure du col deſſendent en ſe rétréciſſant jusqu'au dos; la gorge, les cotés et le milieu du col ſont noirs, marqués de points blancs, qui ſe changent en raies ſur les plumes qui couvrent le haut ou le commencement de la poitrine, converte jusqu'au commencement du ventre des plumes d'une couleur clair-cendrée, liſerées de noir et de blanc. Mais comme ces plumes, ſont diſpoſées trés prés les unes des autres et ſe recouvrent, la couleur clair cendrée, qui fait le fond de chaque plume, n'y eſt pas apparente; de ſorte que toute la poitrine paroit alternativement marquée des raies transverſales blanches et noires. Le clair cendré devient plus apparent vers le ventre et s'eclaircit de plus en plus, en s'approchant du croupion, qui eſt d'un cendré tirant ſur le blanc. Les plumes qui couvrent les cotés du corps, le dos, et le deſſus des ailes ſont pareillement d'une couleur clair cendrée avec des rayes transverſales à leurs bords, dont la premiere eſt blanche et la ſeconde noire. Celles de plumes moyennes de l'ail, qui ſont plus prés des grandes ſont noires, excepté leurs bords faillants qui ſont blancs. Les plumes du deſſous de la queue et celles qui couvrent le croupion ſont d'un clair-cendré bordé de blanc. Les grandes pennes des ailes ſont d'un brun trés foncé et noires vers leurs bords. Tous les autres ſont noires. Les ailes étant pliées forment un coin et couvrent les deux tiers de la queue, qui eſt cuneiforme et blanche par deſſus. Les pieds, dont la couleur étoit presque perdue et meconnoiſſable chez l'individu empaillé, qui a ſervi de modèle à ma deſcription, paroiſſent avoir été

 jau-

jaunes. La membrane, qui joint les doigts eſt de la même couleur. Les ongles ſont noires. Le bec jaune, depuis ſa racine jusqu'au bout, qui eſt noir. La mandibule ſuperieure ſurpaſſe un peu en longueur l'inferieure. Les narines, poſées à la racine du bec, ſont d'une forme ovale, comme chez toutes les autres oiſeaux de ce genre. Les bords des mandibules ſont dentelés. L'autre exemplaire de ce Canard, qui ſe trouve dans la collection mentionée paroit être une femelle de cette eſpèce, comme il eſt même marqué dans le Catalogue.

Elle differe eſſentiellement de ſon mâle par ſa taille qui eſt moindre et par quelques legeres nuances de la couleur de ſon corps. Les plumes qui couvrent les cotés et la partie ſuperieure du dos ſont comme chez le mal d'un clair cendré, liſerées de noir et de blanc; mais celles du reſte du dos et du croupion ne ſont bordées que de blanc. La queue eſt blanche par deſſus, comme par deſſous. Les plumes du haut de la poitrine tirent ſur le brun ou le maron clair, et ſont bordées d'un blanc jaunâtre. La couleur du reſte de la poitrine et du ventre eſt un melange de cendré, de brun et de blanc. L'eſpace entre les pieds et la queue eſt blanche. Dans toutes les autre partie le mâle et la femelle ſe reſſemblent parfaitement. La figure jointe à cette deſcription repreſente le mâle.

Dimenſions.

	Pieds Anglois	Pouces	Lignes
La longueur du mâle depuis le bout du bec jusqu'à celui de la queue . . .	2	2	—
depuis le bout du bec jusqu'à celui des Ongles	1	4	3

Son

Son bec, depuis le bout jusqu'au coin	Pieds Anglois	Pouces	Lignes
de la bouche	0 —	1 —	8 —
ſa queue	—	4 —	7 —
les pieds	0 —	3 —	3 —
le doigt du milieu avec l'ongle . . .	0 —	2 —	8 —
le doigt exterieur	0 —	2 —	6 —
l'interieur	0 —	2 —	0 —
celui de derriere	0 —	0 —	9 —

Ce Canard, dans le Catalogue des Oiſeaux apportés par Mr. Billings, porte le nom Syſtématique *d'Anas Canagica*. Il eſt très probable, que cette nouvelle eſpece a été decouverte par Mr. le Capitaine Billings ſur l'Isle Canaga ou Kyktak, une des Iles Aléoutes les plus proches des cotes, de l'Amerique ſeptentrionale, et ſitué derriere le Cap Aliazka, et que le nom de l'eſpece, c'eſt a dire *Canagica*, a été impoſé à cet Oiſeaux du nom de la premiere ile, ou de celui des principaux habitans de l'ile Kyktak appellée *Caniagues* ou *Canagues*, qui peut être, ayant apprivoiſes cet Oiſeaux, l'ont rendu domeſtique. Ces ſont des ſauvages très belliqueux et que les Ruſſes, dans un ſecond voyage entreprit par Schelichoff, avoient beaucoup de peine à ſe ſoumettre.

Je ne peut rien dire des moeurs et des autres particularités qui regardent cet Oiſeau, car nous n'avons aucune notice ſur le voyage de Mr. Billings, le Journal de ſon Voyage n'ayant jamais vu le jour et ayant été depoſé dans les Archives du Collège de l'Amirauté, ou il ſe trouve jusqu'à preſent. Ce qui regarde le ſecond voyageur ruſſe, Mr. Schelichoff, qui a été ſur les memes

lieux.

lieux que le Capitaine Billings, et qui a fait même la decouverte de quelques Isles, dans l'Océan oriental, quoiqu'il exiſte une brochure de ſon voyage, je n'en ai pu tirer aucune lumière ſur l'oiſeau dont je donne la deſcription, ni ſur les moindres objets qui concernent l'hiſtoire naturelle, par ce qu'il a entreprit ce penible voyage, qui l'a rendu celebre parmis ſes Compatriotes, plutôt pour des objets de commerce, que ſciencifiques, et que la brochure deſſus mentionée a été mise au jour à ſon inſçu.

Parmis les autres Oiſeaux de cette Collection, j'ai trouvé encore une variété d'huitrier, qui ne merite pas moins notre attention. Par la forme de ſon bec, des ſes pieds et de tout ſon corps, il eſt parfaitement ſemblable à l'huitrier commun, connu dans le ſiſtême de Linné ſous le nom *d'Haematopus Oſtralega*. Mais il en differe par la couleur des toutes ces parties. L'huitrier commun a les pieds et le bec d'une couleur rouge, très vive, au lieu que chez notre variété ils ſont d'un blanc jaunâtre, de même qu'il a la tête, la nuque, le col et la poitrine d'un noir cendré et le reſte du corps d'un brun trés foncé, le deſſous de la queue eſt de la même couleur, mais un peu plus clair. La tête, le deſſus du corps et la queue de l'huitrier commun ſont d'un brun foncé, mais le ventre et la poitrine blancs.

Notre variété differe auſſi parfaitement de l'eſpece ou de la variété de l'huitrier, que Mr. Bougainvilles, pendant ſon voyage autour du monde, a rencontré en très grande quantité aux Isles Malouines. Cet huitrier ou pie de mer,

comme

comme on l'appelle autrement, n'avoit que les pieds blancs, mais dailleur reſſembloit parfaitement à la Pie de mer commune. M. de Buffon a donc bien tort d'affirmer, que cette eſpece ſi rependue, car on la trouve en Europe, comme en Aſie, en Afrique, comme en Amerique, eſt partout la même et ſans variété.

REMAR-

REMARQUES SUR LES DIFFÉRENTES METHODES DE RENDRE LE FER MALÉABLE

PAR

B. F. I. HERMANN.

Préſenté à l'Académie le 15 Fevr. 1801.

Le fèr eſt un métal, dont la connoiſſance, quoique traitée par des excellens Metallurgiſtes, comme *Rinmann*, *Prignon*, *Buffons*, *Jars*, *Gerhard*, *Bergmann* et autres, ne laiſſe pas pourtant de preſenter encore une foule de difficultés dans la pratique. Le but eſt toujours le même, c'eſt-à-dire l'extraction des particules ferrugineuſes de la mine en les rendant auſſi malléables qu'il eſt poſſible, mais les methodes en ſont très-différentes. Les autres métaux ne demandent qu'un degrés de chaleur pour ainſi dire *determiné*, au moyen du quel ils ſont tirés de leur minérai, ſouvent par une *ſeule*, et toujours par la *même maniere* de fuſion; le fer au contraire paſſe ordinairement par différens procédés avant qu'il acquiere l'état de malléabilité qu'on exige.

Au commencement de l'Art on employoit ſans doute les moyens les plus ſimples; en fondant les mines de fer dans un petit four on tiroit par un ſeul travail le fer de ſon minérai en le rendant en même tems malléable. Mais dans

dans la ſuite on a inventé les hauts fours où l'on fond la mine auparavant en *fer de fonte*, qui eſt porté enſuite aux forges pour l'y faire maléable en le refondant de nouveau.

C'eſt aſſurement prolonger le procédé, mais on a la commodité de pouvoir fondre dans les hauts-fours une très-grande quantité des mines à la fois, ſur le même endroit, quelquefois avec un volume d'eau qui ne feroit pas ſuffiſant, pour faire travailler un nombre de petits fours dont le produit reuni feroit égal à celui des hauts fours. Et c'eſt peut-être à cauſe de ces avantages, que dans quelques contrées on n'a point d'idée de l'exiſtence d'une autre methode d'extraire le fer de ſon minérai que par la fuſion dans les hauts-fours en travaillant enſuite la fonte aux forges. Cependant il exiſte encore en différents endroits, comme il eſt aſſez connû des gens de métier, des petits fournaux de fuſion et des fours de forges, dans lesquels on tire le fer immediatement de ſon minérai, ſans le faire paſſer par le haut-fourneau, en le rendant en même tems maléable, methode qui ſe pratique encore aujourd'hui en Corſe, aux Pyrenées, et même en pluſieurs endroits d'Allemagne, de Sibérie, de Ruſſie et ſurtout en Carélie, où l'on trouve des petits fours de payſans, dans lesquels on fond les mines de fer des marais et des lacs en les convertiſſant par une ſeule fuſion, ſuivant un procédé convénable, ou en fer *maléable*, ou en *acier cru*; mais qui plus eſt, on connoit auſſi d'autres manières de rendre le fer maléable ſans ſoumêttre à la fuſion, ni la mine ni la fonte.

Dans le dernier voyage, que j'ai fait par Ordre de Sa Majeſté L'EMPEREUR pour viſiter les fondéries de canons d'Olo-

d'Olonetz, Mr. de *Gaſcoïgne*, Directeur de ces fabriques, homme très-verſé dans ſon metier et en tout ce qui regarde la fonte de fer, m'a communiqué deux faits très-intereſſants pour les Metallurgiſtes; les voici:

„J'ai vu, dit-il, du fer fondu, qui, ayant été expoſé „pendant long tems à l'humidité de l'air acqueroit à „ſa ſurface à une profondeur aſſez conſidérable toutes les „qualités du fer maléable, notamment des grands canons „fondus dans le tems du Prince *Rupert*, c'eſt-à-dire „vers l'An 1650, qui avoient été expoſés aux injures „de l'air pendant plus d'un ſiècle dans le fort de *Ti*-„*bourg*, ayant été transporté à Carron pour y être re-„fondus, ſe trouverent en les coupant avoir à leur ſur-„face exterieure plus d'un pouce d'epaiſſeur qui avoit „toutes les qualités du fer forgé, excepté la ſolidité „ou la denſité. Les particules de ſa texture étoi-„ent très-inadherentes et avoient une apparence rou-„illée à l'interieur, ce qui provenoit de ce que les „particules fuſibles non métalliques du fer fondu, ayant „été decompoſées par l'action de l'Atmosphère *il ne* „reſtoit plus que les fibres fines du fer. Ces Canons „étant coupés avoient dans leurs autres parties toute „l'apparence du fer fondu ordinaire."

„Un fait ſemblable eſt raconté par le Docteur *Wat*-„*ſon* dans ſes leçons de Chymie, ſavoir: que des Ca-„nons de fer fondu Eſpagnols, qui avoient été coulés „bas du tems de la fameuſe *Armada*, ayant été retirés „de l'eau par des pêcheurs, il y a environ 20 ans, on „trouva leur ſuperficie changée en fer; au ſortir de l'eau „ce fer étoit ſi mol, qu'on pouvoit le couper avec un

„ca-

„canif, mais peu de tems après il reprenoit ſa dureté „naturelle en conſervant cependant à une epaiſſeur con„ſidérable la maléabilité du fer forgé.“

Voilà donc pluſieurs manières très-différentes par lesquelles le fer devient maléable; cependant il y a encore une autre, ſavoir la ſimple *cementation* de ſa mine. Mr. de *Gaſcoïgne* a fait faire une epreuve en ma preſence avec un morceau de mine de fer de *Carron* en Ecoſſe, dont on fond les canons ſi fameux dans toute l'Europe. Cette mine eſt de couleur noirâtre, terreuſe dans la caſſure et ſans les moindres parcelles d'un éclat metallique, presque ſemblable au ſchiſte argilleux noir compact, ou au trappe d'une texture très-fine; elle eſt cependant peſante et contient à peu près la moitié de ſon poids en ſer. Nous l'avons fait cementer à la maniere ordinaire dans un four d'acier; en ſortant on la trouva demi-fondue et ſpongieuſe, entremelée d'une quantité de petites lamelles de ſer ſi maléables, qu'on pouvoit les couper avec le couteau. Il y a donc un moyen, quoique aſſûrement peu profitable, de rendre le fer maléable non ſeulement ſans fondre ſon minérai en fer de fonte, ou refondre celui-ci, mais auſſi ſans aucune fuſion de la mine, c'eſt-à-dire la *cementation*, par laquelle on ramollit auſſi la fonte de fer la plus dure, comme il eſt detaillé plus au long dans l'ouvrage de *Réaumur* ſous le titre: *l'Art de convertir le fer de fonte en fer doux.*

Mais il faut que je faſſe encore mention d'une méthode, au moyen de la quelle on parvient de rendre maléable le fer fondu ſans le porter, comme à l'ordinaire, aux forges pour y être refondu. Cette méthode eſt auſſi prati-

quée en Angleterre et conſiſte en ce qu'on fait remuer continuellement la fonte dans le fourneau de reverbere après en avoir ralenti la chaleur et qu'il n'y a qu'environ 6 pouces de profondeur dans la matiere fondue; on la remue pendant une demie heure avec des barres de fer forgé; on ralentit encore le feu; on coupe des liſieres en lames epaiſſes du métal pendant qu'il eſt presque figé; on les paſſe entre des cilindres qui ſont en mouvement près du fourneau et cette preſſion unit les parties metalliques et rend le fer tout de ſuite maléable. — On voit aiſément, ce me ſemble, que ce procedé eſt inventé par l'impoſſibilité de donner au fer le dégré de maléabilité convénable par le contact immédiat du Charbon de terre dans la refuſion de fonte aux forges; la reuſſite de cette methode depend ſans doute de la proportion du metal employé, qui doit être petite et ſeulement autant qu'il en faut pour retirer une Loupe, et de ce que le métal ſoit purifié par un dégré de chaleur convenable et pouſſé jusqu'à ce que la maſſe ait reçu la maléabilité requiſe.

Le reſultat de tout ce que je viens de dire eſt que le fer devient maléable par des agens d'une nature toute différente, c'eſt-à-dire, non ſeulement par l'action du feu, dont l'application à cet effet ſouffre pourtant une quantité de modifications, mais auſſi par l'air, et même par l'eau de mer.

Il eſt reſervé ſans doute à la Chymie nouvelle d'éclaircir ces faits et de decouvrir les vrais principes qui doivent nous conduire toujours au même but en employant des moyens ſi différents.

DE-

DESCRIPTION DE L'ACARAUNA LONGIROSTRIS, NOUVEAU GENRE DE POISSON, APPARTENANT A L'ORDRE DES TORACHIQUES,

et qui ſe trouve dans le Muſée de nôtre Academie des Sciences.

PAR

L'ADJOINT SEVASTIANOFF.

Préſenté et lu à l'Académie le 8 Avril 1801.

Dans l'immenſité des êtres dont la nature a peuplée notre terre, elle ſemble avoir agi avec plus de caprice en formant les animaux et les autres productions deſtinées à habiter l'element fluide des eaux. Mais elle n'y a pas moins prodigué de magnificence, que dans ſes autres ouvrages. Parmis les poiſſons; les Zeus, les Chaetodons, le genre des Carpes etc. etalent à nos yeux les couleurs les plus éclatantes et le plus agréablement mélangées ſur leurs écailles, tantôt argentées, tantôt reſplendiſſants d'or. Ce ſont les habitans des eaux, qui fourniſſent les perles fines et le pourpre, qui ſervent d'ornement aux riches et aux grands; c'eſt auſſi d'un petit poiſſon (*), que l'induſtrie de l'homme ſait tirer la matiere, pour

(*) l'Able, Cyprinus alburnus.

pour la fabrique des fauſſes perles, dont ſe pare l'imitative indigence. Nous voyons briller l'interieur des pluſieures coquillages de toutes les couleurs de l'arc-en-ciel et diſputer l'éclat à l'opal le plus precieux.

Mais c'eſt dans ces memes productions que la variété et la bizarrerie des formes frappent l'imagination et attirent l'attention du ſcrutateur des ſecrets de la nature et de ſon hiſtorien. En effet on ne trouve, ni parmis les quadrupedes, ni parmis les Oiſeaux, ni parmis tous les autres habitants de la ſurface terreſtre, des formes auſſi capricieuſes et auſſi variées, et même des moſtruoſités auſſi grandes, que ceux que la nature nous offre dans pluſieurs habitans des eaux.

On n'a qu'à jetter les yeux ſur le nombre infini des Coraux, des Tubipores, des Madrepores, des Eſchares, des Cellepores pour être perſuadé de cette verité. Et ce ſpectacle n'eſt il pas propre à jetter notre ame dans un transport delicieux, en preſentant a nos regards les exterieures les plus variées, les plus élegantes et les plus ſymetriques? Qui peut contempler ſans admiration la multiplicité bizarre et monſtrueuſes des formes, que nous preſentent les différens genres des vers mollusques, tels que *la Laplyſie*, *la Doris*, *l'Aſcidie*, *la Thethis*, *la Seiche etc.* et les genre des poiſſons, comme les *Lophius ou Diables de mer*, *les Baliſtes*, *les Syngnates*, *les Pegaſes*, *les Chimeres*, *les Rayes* et tant d'autres, dans les nombre des quelles il faut compter les Dorées et le genre nombreux de Chaetodon, dont j'ai fait mention plus haut?

Le

Le poiſſon que je vais decrire merite d'être rangé au nombre des productions de la nature les plus ſingulieres, et n'eſt pas moins remarquable par la forme de ſon corps, que tous ceux dont j'ai fait, ci-deſſus, l'énumeration, comme chacun s'en perſuadera encore mieux par le deſſin, joint à cette deſcription. Il c'eſt trouvé dans une collection d'animaux de Breſil, envoyé de Portugal en 1791 à Sa *Majeſté l'Imperatrice* de glorieuſe memoire CATHERINE II, qui daigna remettre cette collection à notre Académie des Sciences, pour être conſervée dans ſon Muſée. Artedi, Linné et Bloch, le plus moderne de tous les Ichtyologues, n'en font aucune mention, et j'ai tout lieu d'eſperer, que je ne me ſuis pas trompé, comme on le verra, par la ſuite de ce memoire, en faiſant de ce poiſſon, non ſeulement une nouvelle eſpece, mais un nouveau genre. Tab. XI

Deſcription.

Ce Poiſſon appartient au nombre des Thorachiques, par ce qu'il a les nageoires ventrales placées ſous les pectorales.

Le corps eſt comprimé, oblong, un peu plus gros par deſſous que pour deſſus.

La tête mediocre, comprimée de deux cotés, moins large que le corps et terminée par un long bec incliné, obtu, deprimé par deſſus comme par deſſous, et alepidote.

L'ouverture de la bouche profonde, transverſale, droite.

Les

Les machoires denticulées; la ſuperieure plus longue, que l'inferieure et plus obtuſe; l'inferieure arrondie par devant. Ces machoires ne ſont pas entierement couvertes, par la peau de la tête, comme on le voit en *a*, *b*.

Les dents forment un ſeul rang dans chaque machoire; les deux de devant ſont aigues et un peu recourbées en arrière en forme des crochets; les autres ſont petites, granuleuſes, immobiles, égales et ſerrées. Je n'ai pas pu remarquer le moindre indice de langue.

Le palais liſſe.

Les yeux proportionnés, ronds, lateraux, voiſins et élévés, c'eſt a dire placés vers la partie ſuperieure de la tête; leurs globe n'excede pas la ſurface de la tête.

Les Narines ſolitaires, rondes, petites, éloignées l'une de l'autre, ſituées au deſſus de chaque oeil, du coté du bec; et chacune ayant devant elle une petite papille, à une très petite diſtance.

Les Opercules branchiales ſont ſans pointes et *alepidotes*, mais elles ſont recouvertes d'une peau, qui excede un peu leurs bords. L'Opercule anterieure eſt courte, et les poſterieures ſe touchent presque de leurs bords ſur la gorge. Les lames des opercules poſterieures ſe prolongent vers les nageoires pectorales, et ſont arrondies à leurs bouts, ayant des decoupures par deſſus et par deſſous. Ces opercules ſont mobiles et aſſez proportionnées à la grandeur du poiſſon. Elles ſont unies; il y a quelques ſtries à peine viſibles ſous les yeux ſur les opercules anterieures.

La

La membrane des Ouies eſt très etroite, cachée, laterale et à trois rayons ou Oſſelets.

L'ouverture des Ouies eſt de même laterale, arquée, proportionnée, et operculée, c'eſt-à-dire recouverte en entier par les opercules, comme chez le plus grand nombre des poiſſons.

Les bronchies des Ouies, ſont voiſines, c'eſt-à-dire placées près de leurs opercules, pectinées, ſemblables; leurs oſſelets ſont tuberculés.

La gorge et la poitrine ſont arrondies, le ventre un peut applati ou deprimé à ſon commencement, et carené vers la queue, comme le dos.

La ligne laterale ſolitaire, haute; en approchant de la queue, elle fait une courbure, et coule enſemble avec la ligne qui diviſe les muscles de l'abdomen, d'avec ceux du dos. Elle eſt marquée de petites ſtries en forme de tiges, ſituées par intervale dans toute ſa longueur.

L'anus eſt au milieu du corps.

Les ecailles ſont aſſez grandes, flexibles, ténaces, ſerrées, ovales, ſtriées à leur bords.

Le dos eſt monopterygien, par ce qu'elle n'a qu'une ſeule nageoire longitudinale; cette nageoire devient plus haute en deſcendant vers la queue.

Ce poiſſon a en tout ſept nageoires, dont une dorſale, deux pectorales, deux abdominales, une anale et une à la queue. Il appartient à la claſſe des malacopterygiens, par ce que toutes ſes nageoires ſont rayonnées, mais non

 pas

pas aiguillonées, excepté les ſix premiers oſſelets de la nageoire dorſale.

Les nageoires pectorales ſolitaires, ſituées à peu près vers le milieu de la largeur du corps; elles ſont presque triangulaires.

Les nageoires du ventre placées ſous les nageoires de la poitrine; elles ſont voiſines, mais ſeparées, petites, pointues.

La nageoire de l'anus eſt longitudinale, c'eſt-à-dire occupante toute l'eſpace entre l'anus et la queue, cependant elle en eſt ſeparée. Elle n'eſt ni arrondie, ni pointue, mais presque par tout d'une égale largeur. Les trois avant derniers rayons reſſortent de la membrane qui les unies.

La nageoire de la queue eſt émarginée et ramentacée à ſes deux extremitées.

Tout le corps de ce poiſſon, conſervé dans de l'eſprit de vin, eſt d'une couleur brune, comme les nageoires pectorales et abdominales. Les dorſales, la nageoire de l'anus et celle de la queue, excepté ſes deux extremitées ramentacées, ſont blanches ou plutôt jaunâtres. Cependant on ne peut rien avancer avec aſſurance ſur les couleurs, que ce poiſſon avoit, etant encore en vie. On ſait, que tous les poiſſons perdent leurs couleurs, auſſi-tôt qu'on les retire de l'element que la nature leur à deſtinée pour demeure, ou du moins ils ne les conſervent aprés cela, que trés peu de tems.

J'ai vais apreſent expoſer les raiſons qui m'ont determinées à faire de mon poiſſon un genre particulier. 1) Il appartient à l'ordre des thorachiques, dans lequel il n'y a que deux genres dont la membrane des ouies eſt munie

de

de trois rayons, comme dans nôtre poiſſon; Ce ſont: le genre de Chaetodon et celui d'Epinoche (Gaſteroſteus); mais notre poiſſon differe du premier, c'eſt a dire du genre de Chaetodon, par la tète, qui eſt trés petite chez tous les poiſſons de ce genre, au lieu que dans l'*Acarauna* elle eſt aſſez proportionnée au corps. Les dents des premiers ſont ſetacées, mobiles, flexibles, tandis que celles du poiſſon que nous decrivons ſont oſſiculées, immobiles, granuleuſes. Le corps du Chaetodon eſt large, au lieu que celui de l'Acarauna eſt alongé. La nageoire dorſale et celle de l'anus chez les Chaetodons, ſont rigides, charnues et ecailleuſes, mais dans notre poiſſon ces nageoires ne ſont, ni charnues, ni convertes d'ecailles. Pour ce qui eſt des Epinoches, ils ont 1) le corps couvert des plaques et non d'écailles *), comme notre poiſſon. 2) Les nageoires ventrales chez les Epinoches ſont placées un peu derriere les pectorales, quoique au deſſus de l'os ſternum; tandis que *l'Acarauna longiroſtris* les a placées en ligne droite ſous les pectorales; elle a auſſi les lames poſterieures des opercules des ouies prolongées et retrecifes, tandis que les Epinoches les ont arrondies; les derniers ont par deſſus tout, des aiguillons, qui ne ſont joints par aucune membrane, et placés devant la nageoire dorſale; tandis que notre poiſſon, quoique muni de ces aiguillons les à jointe par une membrane. *Gouant* ajoute encore, comme un ſigne diſtinctif du genre des Epinoches, une plaque ou cuiraſſe pour les nageoires pectorales, et une pour les ventrales, qui manquent abſolument à *l'Acarauna*. Voila

*) Bloch.

Voilà les raiſons qui m'ont determiné a faire de ce dernier poiſſon, non ſeulement une eſpece, mais un genre particulier. Mais comme il approche plus des Chaetodons par ſon exterieure et par ce qu'il a le corps couvert d'écailles, comme la plupart de ces derniers, j'aï choiſi pour deſigner ce nouveau genre de poiſſon un nom ſynonime du genre Chaetodon. Ce nom eſt celui d'Acarauna, ſous lequel quelques Naturaliſtes, et notamment *) 1) Marcgr. 2) Willoughbey, 3) Ray, 4) Jonſton, et 5) Ruyſch ont deſigné ce genre.

J'etablis donc les ſignes diſtinctifs ſuivants, pour le genre d'Acarauna:

1) La membrane des ouies à trois rayons et cachée ſous l'opercule des ouies.

2) Le corps garnis d'écailles et non des plaques.

3) Point des aiguillons ſeparées devant la nageoire dorſale, mais unies entre eux et la nageoire du dos par une membrane.

4) Les nageoires alepidotes et depourvues de la peau charnue, qui couvre la dorſale et l'anale chez les Chaetodons.

Pour ce qui eſt de l'eſpece, dont il n'y a qu'une ſeule dans ce genre, je l'ai determiné par l'adjectif *longiroſtris*, qui deſigne la figure du bec de ce poiſſon, decrit ci-deſſus et repreſenté ſur la planche, jointe a cette deſcription.

Dans

(*) 1.) Braſilia, p. 144. 2.) Ichtiol. p. 21. 3.) Piſc. p. 102. 4.) Piſc. p. 177 et 178. 5.) Theatr. anim, l. p. 123.

Dans le Catalogue de la Collèction à la qu'elle *l'Acarauna longiroſtris* appartient elle eſt une des trois poiſſons marqués par les Numeros V. VI. et VII. et dont il eſt dit ſeulement qu'ils ſuivent les navires. Mais comme ces trois poiſſons n'y ſont pas nommés, j'ai trouvé, après avoir conſideré attentinement les deux autres, que l'un étoit *l'Epinephelus merra*, nouveau genre établit par Bloch, et extremmement reſſemblant au poiſſon nommé Jacque Euertſen, qui eſt le *Bodianus guttatus* de Linnè; et l'autre *le Scomber ductor* de ce dernier natnraliſte. A juger d'aprés le bec de l'Acarauna, qui n'eſt pas armé des dents formidables, excepté les deux anterieures dans chaque machoire, qui peuvent lui ſervir à mieux ſaiſir ſa proie, ce poiſſon auſſi bien que les deux autres ne peut être, qu'un de ces pauvres paraſites comme le *Larus paraſiticus* entre les oiſeaux et comme *le Scomber Ductor* (*) deſſu mettionné, qui ſuivent les gros poiſſons, tels que les Requins, pendant qu'ils pourſuivent eux mêmes les Navires, et ſe nourriſſent de leurs reſtes.

Nombre des rayons dans les nageoires et dimenſions.	Pouces	Lignes
La membrane des ouies à 3 rayons.		
Les nageoires pectorales, chacune 15 rayons.		
— —— ventrales, —— 5 —		
L'anale - - - - - - —— 13 —		
Celle de la queue - - —— 10 —		
La nageoire dorſale - - —— 21 —		
Longueur du corps depuis le bout de la machoire inferieure jusqu'à la queue	8	5
Longeur de la machoire inferieure	1	$1\frac{1}{2}$

(*) Voyez Bloch

Lon-

	Pouces	Lignes
Longueur de la ſuperieure	1	4
Depuis le bout de la machoire ſuperieure jusqu'à l'oeil	1	9
Depuis le bout de l'inferieure jusqu'à l'oeil .	1	7
Longeur du corps depuis le commencement de la machoire ſuperieure jusqu'à la queue par le dos	9	$2\frac{1}{2}$
Largeur de la nageoire pectorale du coté ſuperieur	1	$3\frac{1}{2}$
Largeur de la nageoire pectorale de l'inferieur	- -	4
Longueur de la pectorale à la racine . . .	- -	$4\frac{1}{4}$
Longueur de la pectorale à la fin	1	1
Longueur de la nageoire dorſale	3	3
La plus grande hauteur	- -	3
Longueur de la nageoire adipeuſe	-	8
Longueur de la queue	- -	$8\frac{1}{2}$
Longueur du ramentum ſuperieur de la queue	1	5
Longueur du ramentum inferieur	1	2
Longueur de la nageoire ventrale à ſa baſe .	- -	2
Longueur de la nageoire ventrale à ſa fin .	- -	$7\frac{1}{2}$
Largeur du bout exterieur	3	$\frac{3}{4}$
Largeur du bout interieur	1	- -
Longueur de l'ouverture de la bouche, par la machoire ſuperieure	- -	8
Circonference du bec à ſa baſe	1	$5\frac{1}{2}$
Circonference du bout du bec	- -	7
Largeur du corps aux nageoires ventrales . .	2	- -
Circonference du corps dans cet endroit . .	4	- -
Largeur du corps à la queue	- -	9
Circonference du corps dans cet endroit . .	1	8
Circonference de la tête à la nucque . . .	4	$1\frac{1}{2}$
Circonference de la tête auprès des yeux . .	2	7

DE

DE OSSIBUS LIGNO INCLUSIS.

AUCTORE

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibita die 21. Maji 1801.

In ſplendidiſſima corporum naturalium collectione, apud egregium virum Forſterum, qui hic Petropoli jam quintum commoratur annum, habetur fruſtum ligni, in quo continentur oſſa cujusdam animalis, intra lignum diſpoſita et a foris undique ligno obducta, ita ut nulla certa deprehendatur apertura, qua oſſa in lignum penetrarunt. Lignum hoc, teſte eximio Forſtero, repertum fuit in Mexica, ubi in officina monetaria operarii eo utebantur, et poſtquam uſui jam ineptum evaſit, comburere illud voluerunt, idcirco diffiderunt; quo facto in conſpectum prodiere oſſa in viſceribus ligni ſepulta. Fuit ea tempeſtate in Luiſiana prorex ex Hiſpania, Galves nomine, ad quem lignum pervenit et qui illud, cum multis rariſſimis naturae productis, in Europam attulit. Poſt mortem hujus proregis, tota illa collectio ab uxore ejus, vendita fuit ſupra laudato Forſtero, erga omnes curioſos humaniſſimo, qui libentiſſime communicavit mecum illud lignum, quod depictum hic exhibeo et ad quod deſcribendum accedo.

Fig. 1. exprimit integrum ligni fruſtum, quod longitudine 10 poll. 3 lin. latitudine 11 poll. et 4 lin. aequat; pon- *Tab. XII.*

pondus habet 12 circiter librarum, eſtque tetragonum. In medio ejus apparet fiſſura transverſalis, perpendiculariter intra lignum deſcendens, longitudine 5 pollicum, inaequalis latitudinis. Intra fiſſuram, ad parietes ejus, conſpicitur cortex craſſiuſculus, vetuſto cortici Pini ſylveſtris admodum ſimilis; tota autem externa ligni ſuperficies cortice eſt denudata.

Fig. 2. ſiſtit ſuperam fruſti portionem, latitudine 5, craſſitie 2 poll. 6 lin. Hac portione teguntur oſſa, transverſe in ligno jacentia, quorum apices ſeu capita in interna laminae hujus ſuperficie effecerunt cavitates, quas fuſco colore in hac figura pictor expreſſit.

In Fig. 3. conſpiciuntur capita oſſium, ex ligno prominentia, quorum corpora lignum transverſaliter permeant. Oſſa haec ſunt numero quinque: primum eorum, caeteris craſſius, ad ſesqui pollicem diſtat a memorata illa fiſſura, quae in Fig. 1 eſt expreſſa; os ſecundum, priori brevius et tenuius, ad dimidium pollicem ab eo eſt remotum. Huic ſecundo oſſi adjacet oſſiculum, capitulo ſuo extrorſum prominens, longitudine 3 poll. 9 lin. quod ex ligno extrahi poteſt; a capitulo enim ſuo ſenſim attenuatur, adeo ut tandem ſtyliforme evaſerit. Quartum os capite ſuo diſtat a tertio oſſiculo ad dimidium pollicem, et eſt ſimile oſſi ſecundo. Quarto huic oſſi quam proxime appoſitum eſt oſſiculum quintum, tertio oſſe tenuius, quod pariter ex ligno eximitur; quoniam a capitulo ſuo in formam ſtyli attenuatur.

Fig. 4 exhibet portionem ligni, quae a latere fruſti, oſſibus in fig. 3 prominentibus contrario, per longitudinem ligni conſulto eſt abſciſſa, ut pateſieret, quousque oſſa illa in ligno protenduntur. Portio haec ligni $2\frac{1}{2}$ pollic. craſſitie aequat. In ea deprehenduntur trium oſſium capita, lima abſciſſa

ſciſſa, et duorum oſſium veſtigia, a capitibus eorum in ſubſtantia ligni efformata, adeo ut plura oſſa in hac lamina apparuerint, quam quot in oppoſito latere deprehendebantur; oſſicula enim ſtyliformia ad hanc laminam non pertingunt. Trium autem oſſium majorum longitudo haec eſt:

Os primum	. . . .	$8\frac{1}{2}$ poll.
Os ſecundum	. . . .	6 —
Os quintum	. . . .	$5\frac{1}{2}$ —

Oſſa haec eſſe oſſa artuum cujusdam animalis, nullum eſt dubium, et primum eorum videtur eſſe os femoris; ſecundum et tertium ſunt oſſa tibiarum; oſſicula autem ſtyliformia non ſunt oſſa integra, ſed portiones oſſium fibulae, quas manu humana attenuatas et in modum ſpinarum acuminatas fuiſſe periti conſenſum dedere oſteologi, qui oſſicula illa mecum examinarunt. Imo omnia illa oſſa non caſu et fortuito intra lignum perveniſſe, ſed opera humana intruſa fuiſſe ex ordinata eorum diſpoſitione autumo; fiſſuramque illam transverſalem, quam Fig. 1 repreſentat, eo tempore, quo oſſa in arborem intrudebantur, multo ampliorem fuiſſe, quam nunc apparet, facile mihi perſuadeo; quippe quod oſſa longitudine $8\frac{1}{2}$, 6 et $5\frac{1}{2}$ pollicum per rimam 5 poll. intra lignum propelli non potuerunt; alius vero intra lignum introitus nullus deprehenditur. Rimam autem ſeu fiſſuram illam, perpendiculariter in ligno factam, creſcente adhuc arbore fuiſſe coarctatam, exinde concludo, quod internos ejus parietes jam cortex obduxit. Hac omnino via arbor oſſa animalia intra ſe recepit, et ſine ſuo interitu per ſecula forte ea ab interitu conſervavit. Arborem illam vivaciſſimam fuiſſe patet exinde, quod juxta longitudinem ligni perforata creſcere continuaverat, receptis jam oſſibus,

 quae

quae firmiter et medullitus ligno ſuo eſt amplexa. Cujus autem generis fuerit illa arbor americana, ex fruſto ligni penitus decorticato rite determinare non poſſum; ex portiunculis vero corticis, in fiſſura ligni praeſentibus, illam abietini generis fuiſſe ſuſpicor. Oſſa ligno incluſa videntur mihi eſſe oſſa ſuilla, propter ſimilitudinem eorum cum oſſibus hujus animalis; caeterum nec id abſolute affirmo, cum ea omnia ex ligno extrahere et cum oſſibus ſuillis pro lubitu comparare non penes me erat. Sufficit rariſſimo oſtendiſſe exemplo, quod oſſa ligno arboris intruſa a ſuccis ejus non putreſcant, et arbor in meditullio paene ſuo perforata, receptis oſſibus, non pereat, imo creſcat et quaquaverſum dilatetur. Sed eadem arbor, quando vulneratur a corpore venenato, pari modo perit ac animal, cui venenatum vulnus infligitur. Cuneus ligneus, arbori viventi infixus, eam non necat; aſt inungatur cortici ejusdem arboris tantillum olei cum aerugine cocti, brevi morietur arbor; id quod propria me docuit experientia. Eodem oleo, aerugine colorato, tincta charta et in foliola laurinis ſimilia efformata, mortem intuliſſet infanti, qui illa foliola temere maſticabat, niſi beneficio naturae per vomitum a veneno illo liberaretur. Aſt oſſa in arborem, licet violatam, intropulſa, ut ut veneni expertia, non nocuerunt arbori, neque ipſa periere, ſed aeque illaeſa ſunt conſervata, ac conſervantur animalcula ſuccino incluſa. Perſpicitur hinc convenientia, quae datur inter vegetabilia et animalia, licet illa tantummodo vita fruantur, uti contendunt philoſophi; haec vero et vivant et ſentiant. Non ne ineſt ſuus ſenſus etiam vegetabilibus? Certe vitam ſine ſenſu, ſaltem ego, vix concipere poſſum.

DE

DE SPECIEBUS, SYSTEMATICUM GENUS TRICHECHI CONSTITUENTIBUS.

AUCTORE

N. OZERETSKOVSKY.

Conventui exhibita d. 11. Junii 1800.

In Linnaeano ſyſtemate Naturae, ad genus Trichechi referuntur ejusmodi animalia, quae dentibus primoribus penitus carent; quibus dentes laniarii utrinque ſolitarii, et loco molarium utrinque os rugoſum; quae denique corpus habent oblongum, labia geminata, et pedes poſteriores compedes in pinnam coadunatos.

Sub hoc genere tres ſolummodo comprehenduntur ſpecies, quae ſunt Rosmarus, Dugong et Manatus, qui poſterior in duas ſubdividitur varietates, auſtralem nempe et borealem. Paucae quidem ſunt ſpecies, genus hoc conſtituentes; attamen omnes a charactere generico, mox expoſito, magis vel minus recedunt. Prima ſpecies, quae in omni genere ad definitionem ejus quam proxime accedere debet, in genere Trichechi eſt Rosmarus. Hic a congeneribus ſuis diſtinguitur dentibus laniariis ſuperioribus exſertis, remotis; ſed eidem Roſmaro juniori tribuuntur etiam dentes primores in maxilla ſuperiore bini, exigui; molares

 vero

vero etiam adulto in utraque maxilla utrinque quatuor, exiles, acuti, pone apicem fovea plana excavati. Non os igitur rugoſum conſtituit dentes molares, uti prodit character genericus, ſed veri dentes utrique maxillae utrinque infixi.

Secunda ſpecies in hoc genere eſt Dugong, qui dentibus laniariis ſuperioribus exſertis, approximatis diſtinguitur; ſed huic, loco dentium primorum, adeſt planum inclinatum ad laniorios allidens, molares vero latiores quam in Rosmaro, diſtantes, in ſuperiore maxilla utrinque quatuor, in inferiore tres.

Tertia denique ſpecies Trichechi eſt Manatus, cui dentes laniarii nulli; eorumque defectu diſtinguitur a recenſitis ſupra ſpeciebus. Ad hanc praeterea ſpeciem referuntur varietates binae, auſtralis nimirum et borealis; priori dentes molares in utraque maxilla utrinque novem, quadrati, cortice vitreo veſtiti, et corpus longitudine 8 — 17, latitudine 6 — 7 pedes, pondere 500 — 800 libras aequans; poſterior varietas loco dentium molarium in utraque maxilla utrinque habet os rugoſum, et longitudine 23 pedes, pondere 8000 libr. aequat. Praeter has in charactere generico differentias, Manatus auſtralis differt a boreali eo, quod eſt piloſus, et pedes habet tetradactylos, unguiculatos; borealis vero eſt nudus, et pedes ipſi nec digitis nec unguibus ſunt inſtructi. Apparet hinc magna diverſitas Manati auſtralis a Manato boreali; quos tamen Zoologi ſyſtematici ad unam eandemque retulerunt ſpeciem. Aſt multo major adhuc intercedit differentia inter Manatos et Trichechum Roſmarum atque Trichechum Dugong, quae conſiſtit in ſtructura

ctura pedum poſteriorum. Roſmarus et Dugong duos habent pedes poſteriores abbreviatos, caudamque adhuc breviorem, et hi artus horiſontaliter ſunt protenſi, ita ut ſimul tripartitam quaſi repreſentent caudam; nihilominus pedes eorum componuntur ex oſſibus, quibus gaudent mammalia terreſtria. Manati vero pedibus poſterioribus penitus deſtituuntur, et corpus eorum terminatur cauda plana, ex veris vertebris conſtante; qua ſtructura hujus extremitatis quam proxime ad cetacea accedunt. Rosmarus et Dugong, licet maris ſint incolae, egrediuntur tamen inde in ſiccum; Manati vero conſtanter degunt in aquis. Quod vero tam Trichechi quam Manati fucis, corallinis, teſtaceis, non carne, victitant, uti in Syſtemate naturae annotavit jam beatus Linnaeus; ob hanc ſolam proprietatem animalia iſta non poſſunt neque debent ad unum idemque referri genus, dum ſaepe diverſiſſimae beſtiae eodem veſcuntur papulo. Non raro etiam animalia, valde inter ſe affinia, quae easdem res pro nutrimento ſibi habent, in diverſa dirimuntur genera, uti Myrmecophaga et Manis, quae formicis potiſſimum veſcuntur; nihilominus Zoologi duo ex illis fecerunt genera, quorum differentia in eo tantum conſiſtit, quod Myrmecophaga habet corpus pilis, Manis vero ſquamis oſſeis tectum; coeterum utrumque animal et dentibus prorſus eſt deſtitutum, et linguam habet teretem, extenſilem, et os anguſtatum in roſtrum. Majore omnino jure genus Trichechi diſpeſci poteſt in duo genera, quorum unum Rosmarum et Dugong ſub ſe comprehendat, alterum Manatos contineat. Manatus enim auſtralis pro varietate Manati borealis nullomodo haberi poteſt, cum ille et multo minor ſit corpore quam borealis, et corpus habeat pilis tectum, pedesque

tetra-

tetradactylos unguiculatos, item dentibus inſtruatur molaribus in utraque maxilla utrinque novem; Manatus autem borealis evidentiſſime ab eo diſtinguitur corpore nudo, pedibus nec digitis nec unguibus inſtructis, corpore 8000 librarum pondus aequante, et oſſe rugoſo in utraque maxilla loco dentium molarium. In boreali iterum ſpina dorſi conſtat vertebris 60, in auſtrali autem 50.

Genus Trichechi ita forte determinari poſſet: Dentes laniarii ſuperiores ſolitarii exſerti; labia geminata; pedes poſteriores compedes coadunati in caudam. Ex hac definitione excluduntur dentes primores, qui adulto Trichecho nulli utrinque; cum autem Trichechus pertineat ad Bruta, quibus omnibus dentes primores nulli utrinque; ſuperfluum foret repetere, non adeſſe illi hos dentes, uti faciunt Zoologi ſyſtematici. Ex eadem definitione excluditur etiam corpus oblongum, tanquam character, nullam certam ideam ſuppeditans. Ad genus hoc rite nunc referri poſſunt Rosmarus et Dugong, quippe qui gaudent dentibus laniariis ſolitariis exſertis; aſt duae hae ſpecies diſtinguentur a ſe invicem iisdem dentibus aut remotis aut approximatis; dentes remoti Rosmarum, approximati autem Dugong indigitabunt.

Genus Manati diverſiſſimum eſſe a Trichechis evidenter declarat habitus eorum externus, quo vel maxime Balaenarum ordini approximantur; nam pedes anteriores habent pinnis ſimiles, et loco pedum poſteriorum pinna ſeu cauda gaudent horiſontali, ex prolongatis dorſi vertebris compoſita. Pro determinando itaque eorum genere ſequens character aſſumi poſſet: Pedes anteriores pinniformes; cauda in

in pinnam expanſa, loco pedum poſteriorum. Per haſce notas characteriſticas facilius agnoſci er diſtingui poſſent animalia, ad hoc genus ſpectantia, quam per defectum dentium primorum et laniariorum, quemadmodum diſtincta hucusque fuere in ſyſtemate Linnaeano, in quo omnibus hujus generis ſpeciebus tribuuntur dentes laniarii ſolitarii; ſed Manatus ſub eodem genere diſtinguitur dentibus laniariis nullis. Separatis igitur a genere Trichechi Manatis, facillima erit diviſio ſpecierum Manati; Manatus enim borealis diſtinguetur corpore nudo et oſſe rugoſo in utraque maxilla loco dentium molarium; Manatus vero auſtralis pro charactere ſpecifico habebit corpus piloſum, pedes tetradactylos unguiculatos, et dentes molares in utraque maxilla utrinque novem.

Nomen itaque Trichechi Manato omnino debet adimi; quoniam deſignat animal habens pilos, qui Manato boreali deſunt. Manatus iſte, accuratiſſime deſcriptus a noſtro Stellero, nova deſcriptione non eget; aſt figura ejus, ex foetu et embryone, qui ſunt in Muſaeo Academiae, nitidiſſime expreſſa, maeretur omnino, ut a perito ſculptore excidatur.

DISTRI-

DISTRIBUTION MÉTHODIQUE DES PIERRES DE ROCHE AGRÉGÉES

PAR

BASILE SEWERGUINE

Préſenté et lû le 1 Juillet 1801.

Tandis que le géologue fait tous ſes éfforts pour dévoiler les myſtères de la nature dans l'interieur des montagnes, et que le chymiſte met en mouvement tous les reſſorts de l'art pour découvrir la vraie nature des minéraux exploités, qu'il me ſoit permis de continuer mes recherches oryctognoſtiques ſur les pierres de roche agrégées *).

Il y a dejà longtems **) que j'ai promis leur diſtribution méthodique, et j'ai en partie expoſé les raiſons qui m'ont engagé a tracer une route un peu différente de celle qui a été adoptée jusqu'alors. Je me ſuis occupé depuis tant de leur examen ultérieur, qu'à les contempler ſous tous les différens points de vue qui ont pû ſe préſenter à cet

*) J'éſpere que je n'aurai pas beſoin d'indiquer les raiſons, pour lesquelles j'ai changé l'adjectif *compoſées* en *agregées*. Chacun les ſentira au premier coup d'oeil.

**) V. Nova Acta Academ. Scientiarum Imperialis Petropolitanae Tomus VII, MDCCXCIII

à cet égard *). J'ai étudié et examiné avec toute l'attention poſſible les travaux de ceux qui s'occupoient du même objet, et j'avoue que je ſerois obligé d'abandonner entièrement tout le projet d'une nouvelle diſtribution des roches agrégées, ſi je n'étois aidé des lumières d'un Lamétherie dans ſa ſavante Théorie de la terre **), d'un Prince Demetrius de Gallitzin qui enrichit les ſciences par ſes obſervations et ſes ouvrages utiles qui démontrent tout-à-la fois et ſon vaſte génie et ſon zèle ardent pour les ſciences, d'un Werner ***), d'un Karſten ****) etc. Enfin j'ai taché d'accorder les différences que j'ai trouvé chez pluſieurs ſavans diſtingués, par la manière de diſtribuer les roches agrégées, que j'ai l'honneur de propoſer.

Toutes les claſſifications méthodiques des roches agrégées peuvent ſe réduire à trois principales, ſavoir: 1) Selon leur formation probable; 2) ſelon leur âge relatif; 3) ſelon leurs parties conſtituantes. Les deux premieres ſont les réſultats des obſervations du Géologue, et quant à la troiſième, elle eſt l'objet de l'Oryctognoſte.

Per-

*) Les diſſertations inſérées dans les Nova Acta Tom. VIII. pag. 301. et Tom. XII. pag. 372 ſont en partie les réſultats de ces recherches ultérieures.

**) Seconde édition augmentée d'une Minéralogie. Paris 1797. J'ai ſuivi la route qu'il a tracée, mais avec des changemens que j'ai vû être indispenſables.

***) Kurze Klaſſification der Gebirgsarten. On verra que malgré les changemens que j'ai y faits, ma claſſification pourra s'accorder avec celle du célebre Werner.

****) Beſchreibung des Leſkiſchen Mineralienkabinets etc.

Perſonne ne doute de l'utilité particulière de cette dernière; et je repete que c'eſt elle qui doit ſervir de guide dans les recherches du Géologue; car comment juger et de la formation probable et de l'âge relatif des roches, ſans connoître auparavant leur nature. C'eſt cette même utilité évidente qui m'engage à m'en occuper ici plus particulièrement. Mais avant d'expoſer celle que j'ai adoptée, il faut convenir ſur les points ſuivants.

1) Que tous les minéraux ſe diviſent, ſous ce point de vue, en deux grandes claſſes: en *ſimples* et en *agrégés.* Car il y a non ſeulement des pierres agrégées, mais auſſi des ſels agrégés, des ſubſtances métalliques agrégées et des bitumes agrégés. Nous en citerons les exemples plus bas.

2) Qu'il faut bien diſtinguer les dénominations: Minéraux *agrégés,* ainſi que *pierres agrégées* du nom de roches agrégées qui ſe diſtinguent des premiers en ce qu'ils ſervent proprement à conſtituer des montagnes entières. Le nombre des premiers peut à peine être déterminé, et il y en aura autant de variétés qu'il y aura d'agrégations différentes, tandis que les dernières, ſelon toutes les obſervations, ſont en moindre nombre et ſe reduiſent preſque à celles qui ſont citées plus bas. Les premiers ſont accidentels, tels que Quartz et Spath calcaire, Quartz et Aſbeſte, Quartz et pyrite, Quartz et or etc. mais quant aux dernières, elles ſont conſtantes, tels que le Granit, le Porphire etc. Et on ne peut, ce me ſemble, aſſez faire attention à cela pour diſtinguer les uns des autres.

3) Qu'il eſt des roches agrégées comme de minéraux ſimples dans le ſens minéralogique. Elles ſont auſſi bien l'objet

jet de l'oryctognoſte que du géologue. Le premier contemple leurs differentes agrégations et nous enſeigne à diſtinguer l'une de l'autre, tandis que le géologue s'occupe des recherches ſur leurs differens gîtes, ſur leur formation probable et ſur tous les changemens qu'elles ſubiſſent par le laps du tems. Il y en aura donc toujours du moins deux ſortes de claſſifications: l'une qui regarde l'oryctognoſie et l'autre qui appartient à la géognoſie. La première eſt celle dont je m'occupe ici plus particulièrement.

4) Que vû les raiſons ſolides qui doivent avoir engagé chacun des grands minéralogiſtes à faire telle ou telle autre diſtribution méthodique des roches agrégées, il eſt de notre devoir de tacher de trouver un moyen pour accorder autant qu'il eſt poſſible les différences qui s'y peuvent rencontrer, non ſeulement par eſtime pour les travaux des ſavans célebres qui par leurs écrits ont tant contribué à la connoiſſance ultérieure de ces eſpèces de pierres, mais auſſi pour éviter toute confuſion et tout embarras qui pourroient réſulter de la différente manière de les claſſifier, et de la différence des dénominations adoptées.

5) Que toutes nos claſſifications ont alors leur vraye utilité, quand elles ſont fondées ſur des baſes ſolides; quand les diviſions et toutes les ſubdiviſions ſont diſtinctement marquées; quand tout ce qu'on a dit pour la définition des claſſes, des genres etc. ſe trouve parfaitement dans toutes les eſpèces, dans toutes les variétés, dans les individus mêmes qui y ſont compris, et c'eſt en cela je me ſuis donné toutes les peines poſſibles.

6) Que la plus grande difficulté tant dans la diſtribution oryctognoſtique, que dans celle qui regarde la géognoſie, ſera occaſionné par les tranſitions des roches agrégées de l'une dans l'autre, non ſeulement à l'égard de leurs parties conſtituantes, mais auſſi à l'égard de la manière dont elles ſont réunies enſemble; de ſorte qu'un vrai granit peut paſſer dans une roche ſchiſteuſe etc. Ces cas ne feront que nous inviter à l'examen ultérieur de tout ce qui leur arrive à ces roches, tandis qu'elles paſſent de l'une à l'autre forme etc. Avouons à cet égard que nos claſſifications feront toujours imparfaites, parceque nos connoiſſances minéralogiques le ſont. En attendant tachons d'atteindre ce degré de perfection dont nous ſommes capables.

Maintenant paſſons à l'expoſition de ma claſſification qui, quoique peu différente de quelques unes de celles qui ont été déjà adoptées, contribuera peut être à leur plus de clarté.

Tout le monde ſait ce qu'on entend par roches agrégées. Ce ſont des aggrégations conſtantes de différentes eſpèces et variétés de minéraux qui ſervent à conſtituer des montagnes entières.

Elles ſe diviſent par elles mêmes, comme les minéraux ſimples, en roches *pierreuſes*, *ſalines*, *bitumineuſes* et *métalliques*, ſuivant la matière principale qui les conſtitue, ce qui fera mes *claſſes*, auxquelles j'ajoute encore les *terres agrégées*, par des raiſons qu'on verra plus bas.

Les roches agrégées pierreuſes ſe ſubdiviſent en roches *ſilicieuſes*, *argilleuſes*, *talcqueuſes* et *calcaires*; ce qui fera mes

mes *genres.* Je n'ai pas voulu ajouter les barytiques, les ſtrontianitiques etc. Car pourquoi nommer des ſubſtances qui n'exiſtent pas, ou du moins dont nous ne connaiſſons pas l'exiſtence?

Chacun de ces genres ſe ſubdiviſe en ſix ſections, ſavoir: 1) en *Criſtallines*, qui conſiſtent en particules criſtallines ou ſpathiques réunies enſemble ſans aucune formé déterminée et ſans aucun ciment, tel eſt le *Granit.* — 2) *Schiſteuſes*, qui conſiſtent en particules criſtallines ou ſpathiques réunies enſemble ſous une forme ſchiſteuſe; tel eſt le *Gneuſſum.* 3) *Empâtées*, qui dans une maſſe ſolide contiennent des particules criſtallines ou ſpathiques diſperſées par toute la maſſe; tel eſt le *Porphire.* — 4) *Amygdaliques*, qui dans une maſſe ſolide contiennent des pierres arrondies, ſemblables, quant à la forme, à de l'amande, tel eſt *l'Amygdalite.* — 5) *Brèches*, qui conſiſtent en pierres roulées et arrondies, réunies enſemble par quelque ciment, tels ſont les *Breccias.* — 6) *Sablonneuſes* qui conſiſtent en grains de ſable réunis enſemble par quelque ciment. Telles ſont les pierres ſablonneuſes.

Telle eſt ce me ſemble la marche qui nous méne peu à peu et ſans la moindre difficulté à la connoiſſance de nos minéraux agrégés. Ayant par exemple un échantillon de granit devant nous, nous verrons bientôt *premièrement*, que c'eſt une roche agrégée *pierreuſe*; parcequ'elle eſt *ſiliceuſe*; et enſuite qu'elle eſt *criſtalline.* Il ne s'agira maintenant que de définir l'eſpèce à laquelle elle appartient. Et je prends pour baſe des *eſpéces*, *les baſes* ou *les parties conſtituantes principales*, parcequ'elles ſont plus conſtantes, et quant aux particules héterogènes qui s'y mêlent, j'en dérive

dérive *les variétés*, parcequ'elles ſont accidentelles. Enfin voici la claſſification entière des Minéraux agrégés.

Claſſe I. Roches pierreuſes.

Genre I. R. p. ſilicieuſes.

Section I. R. p. ſ. criſtallines.

Ce genre et cette ſection comprend, ſi l'on s'en tient toujours à la partie conſtituante principale, cinq eſpèces. C'eſt-à-dire: elle eſt ou *ſpathique*, et la partie principale conſtituante eſt le *Feldſpath*, qui peut-être combiné avec une, deux, trois ou quatre différentes eſpèces de pierre; qui ſont ſes variétés. 2) Ou elle eſt quartzeuſe, c'eſt-à-dire que la partie conſtituante principale eſt le *Quartz*, et ſes variétés ſeront déterminées ſuivant les principes allégués tout-à-l'heure. 3) La troiſième, que je mettrai à la tête de toutes les autres, eſt le vrai Granite, ou le Granite proprement dit, qui conſiſte en Feldſpath, Quartz et Mica. J'eſpère que je n'ai pas beſoin d'alléguer les raiſons, pour lesquelles j'en fais une eſpèce particuliere; c'eſt pour éviter toute confuſion, qui pourroit réſulter ſi je l'aurois compris dans l'une des précédentes, auxquelles il appartiendra cependant, auſſitôt que l'aggrégation mentionnée change, ou qu'il s'y mêlera encore quelque autre eſpèce de pierres. 4) La quatrième eſt le *Siénite*, qui conſiſte en Feldſpath, Hornblende et Quartz, aggrégation conſtante, qui pour cela même doit être conſidérée à part. 5) *Roche de Topaze*, qui eſt remarquable par le vrai Topaze qu'elle contient. Ainſi nous aurons:

1) R. ſ. c. *Granite.*

2) R. ſ. c. *ſpathique*, à laquelle ſemblent apartenir: Le

Le Granites ſimplex *), ſcorlaceus, granatinus, micaceus, ſquamoſus, calcarius, ſcorlinus, granatinus, viridis. talcifer, nitens, tricolor, elegans, micans, ſerpentinus de *Lin. Gm.* et beaucoup d'autres roches agrégées que j'ai citées dans une de mes diſſertations précédentes ſur cette matière.

3) R. ſ. c. *Quartzeuſe*, à laquelle ſemblent apparte- nir le Granites garpenbergenſis, melaleucos, Bavaricus, talcifer, inconſpicuus, bicolor, corneus, triplex, glacialis, Helveticus, Hoepfneri, efflorens de *Lin. Gm.* et autres.

4) R. ſ. c. *Siénite*.

5) R. ſ. c. *de Topaze*, dont je connois trois variétés: Topaze avec du Quartz, Topaze avec des Aiguemarines, et Topaze avec du Quartz, du Schoerl et de Steinmark.

Section 2. R. p. ſ. ſchiſteuſes.

Je n'en connois que deux eſpèces:

1) R. ſ. ſc. *des Jours*, dons les parties conſtituantes principales ſont le Quartz et le Mica, et à laquelle ſem- blent appartenir les variétés: Gneuſſum ſcorlinum, altenber- genſe, radians, Bornii, jemticum et alpinum de *Lin. Gm.*

2) R. ſ. ſc. *Gneuſſum*, dont les parties conſtituantes principales ſont le Feldſpath, le Quartz, et le Mica,

Sec-

*) Voyez la ſignification de ces dénominations et autres dans le ſyſteme de Linné en langue latine de l'édition du célèbre Gmelin. Au reſte elles ſont expliquées plus au long dans mes élémens de Minéralogie imprimés en langue Ruſſe en deux volumes.

Section 3. Roches pierreuſes ſilicieuſes empâtées.

Il y en a deux eſpèces: l'une à baſe jaſpitique ou le vrai porphire, et l'autre à baſe cornéenne.

1) *R. ſ. emp. Porphyre* qui, ſelon la nature des particules qu'il contient, conſtitue les variétés: Porphyrius criſtallinus, ſcorlinus, granatifer, nitens de *Lin. Gm.*

2) *R. ſ. emp. cornéenne* avec des particules diſperſées de Feldſpath etc. à laquelle appartiennent le Porphyrius duriſſimus, inaequalis, ſcorlaceus, baryticus, tricolor, Rochlizenſis et corneus de *Lin. Gm.*

Section 4. Roches pierreuſes ſilicieuſes amygdaliques.

Deux eſpèces, l'une à baſe cornéenne et l'autre à baſe jaſpitique.

1) *R. ſ. am. cornéenne*, à laquelle appartient l'Am. margodes, ſimilaris, jemticus et Quartzifer de *Lin. Gm.*

2) *R. ſ. am. jaſpitique*, à laquelle appartiennent l'Am Alboguttans, albofuſcus, cinereus, helveticus, ſibiricus, jaſponyx et Cronſtedii *Lin. Gm.*

Section 5. Roches ſilicieuſes Brecches.

Il y en a 7 eſpèces, ſavoir:

1) R. ſ. B. *quartzeuſe.*
2) R. ſ. B. *ſilicieuſe.*
3) R. ſ. B. *jaſpitique.*
4) R. ſ. B. *ſablonneuſe.*
5) R. ſ. B. *porphyrique.*
6) R. ſ. B. *granitique.*
7) R. ſ. B. *cuivreuſe.*

Selon

Selon la nature des cailloux ou pierres arrondies qui les conſtituent.

Section 6. Roches ſilicieuſes ſablonneuſes.

Il y en a quatre eſpèces ſelon la nature du ciment qui lie les particules ſablonneuſes.

1) P. ſabl. *ſilicieuſe*, à laquelle appartiennent l'Ar. flexilis, Avanturino, Cos, coagmentatus, foraminatus, filtrum et fundamentalis de *Lin. Gm.*

2) P. ſ. ſabl. *calcaire*, à laquelle appartiennent l'Ar. criſtallinus, et ſtillatitius de Lin. et le Cos Quadrum. de Wall.

3) P. ſ. ſabl. *argilleuſe*, à laquelle appartiennent le Cos molaris, glareoſa et turcica de *Wall.* Cos tigrina de *Lin.* et Graue Wake des mineurs Allemands.

4) P. ſ. ſabl. *cuivreuſe*, avec un ciment cuivreux, dont il y a aſſez d'exemples en Sibérie.

Genre II. Roches argilleuſes.

Section 1. Roches argilleuſes criſtallines.

Il n'y en a qu'une eſpèce:

1) R. a. c. *micacée*, dont la partie principale eſt le Mica, et dont les variétés ſont; Granites nitidulus, Zillenſis, granatifer, radiatus, olivinus, montanus et homogeneus de *Lin. Gm.*

Section 2. Roches argilleuſes ſchiſteuſes.

Trois eſpèces:

1) R. a. ſ. *micacée*, ou *ſchiſte micacé*, qui conſiſte principalement en Mica et en Quartz, et dont les variétés ſont

ſont: Gn. micaceum, Baſaltinum, glanduloſum, durum, olivinum et triplex de *Lin. Gm.*

2) R. a ſ. *verd*, ou le *Grünſtein* des Allemands, ou ſaxum ferreum de Wall. qui conſiſte principalement en Hornblende et en mica et auquel appartiennent les agrégations: Gn. ſquamoſum, granatinum, lamelloſum, ſyeniticum, ſplendidum et quadruplex de *Gm.*

3) R. a. ſ. *ſchiſte de Hornblende*, ou *Hornblendſchiefer* des Allemands, qui conſiſte en Hornblende et en Quarts.

Section 3. Roches argilleuſes empâtées.

Il y en a cinq eſpéces, et c'eſt ici qu'appartiennent pluſieurs roches fauſſement apellées Porphyres.

1) R. a emp. *à baſe argilleuſe*, qui contient quelque fois du Mica (Porph. tranſilvanicus *Gm.*), ou du Feldſpath, (Porph. granitoides *Gm.*), ou de la Hornblende comme l'a trouvé le célèbre Pallas, ou des Grenats etc.

2) R. a. emp. *à baſe de ſchiſte argilleux*, qui contient ou du Mica (Gn. cotarium *Gm.*) ou du ſpath calcaire, comme l'a trouvé Mr. l'Acad. Hermann.

3) R. a. emp. *à baſe de Trapp*, à laquelle appartiennent le Porph. lamelloſus, aceroſus, ſpatoſus, nigerrimus, antiquus, Angliae, tinnitans de Gm. et le Baltinite de Mr. l'Acad. Hermann.

4) R. a. emp. *à baſe de Baſalte*, à laquelle appartiennent les aggrégations: Porph. aegyptiacus, Baſaltinus, pedicularis, fuldenſis et olivinus de *Gm.*

5) R.

5) R. a. emp. *à baſe de lave*, à laquelle appartiennent le Porph. vulcanorum, bacillaris, nitidulus et decipiens *Gm.* Le Sax. vulcanorum de Wall. le Tiburtino et le Piperino.

Section 4. Roches argilleuſes amygdaliques.

Quatre eſpèces:

1) R. a. emp. *à baſe d'argille* avec du Quarz (Amygdalites primigenius *Gm.*) ou avec de la calcédoine, comme l'a trouvé Laxmann.

2) —— *à baſe de Trapp*, à laquelle appartiennent l'Amygd. ſordidus, tuberoſus, ſerpentinus, ſteatiticus, gypſeus, varioloſus, aeruginoſus, Zeolithicus, et calcedonius *Gm.*

3) —— *à baſe de Baſalte*: l'Amygd. chloroſchiſtos, marmoreus, argilloſus, radians, piceus, durus, et granitoides de *Gm.*

4) —— *à baſe de Lave*: l'Amygd. Brecciatus, argillaceus, ſchiſtoſus, albomaculatus, pyromachus, inconſpicuus, et achatoides de *Gm.*

Section 5. Roches argilleuſes en Breches.

Tels ſont les Baſaltes et les Trapps arrondis et réunis par un ciment argilleux: Br. baſaltina et argilloſa de *Gm.* Ainſi deux eſpèces.

Section 6. Roches argilleuſes ſablonneuſes.

Il n'y en a point, ſi non celles dont il eſt fait mention au genre I. Sect. 6. eſpèce 3.

Genre III. Roches talcqueuſes.

Section 1. Roches talcqueuſes criſtallines.

Deux eſpèces:

1) —— *à baſe de talc*, à laquelle appartiennent le Granites granatifer, et le Porphyrius talcoſus et ponderoſus de *Gm.* avec des Grenats, du Schörl, du Quartz et du Spath peſant.

2) —— *à baſe d'Aſbeſt* avec des grenats, l'Amygdalites granatinus? de *Gm.*

Section 2. Roches talcqueuſes ſchiſteuſes.

Il n'y a qu'une eſpèce: le Gneuſſum ſteatiticum de *Gm.* ou le *Schneideſtein* des Allemands, qui conſiſte en ſtéatite et en Mica.

Section 3. Roches talcqueuſes empâtées.

Deux eſpèces:

1) —— *à baſe de Serpentine*, dont les variétés ſont les aggrégations avec du Quartz, des grenats, du talc, du Mica, de Hornblende etc. auxquelles appartiennent auſſi le Porph. arenarius, acicularis, granatinus, granitone, micaceus, asbeſtinus, ferriſer de *Gm.* Et la *Serpentinwake* de Mr. l'Acad. Hermann.

2) —— *à baſe de Nephrite* avec de la hornblende, ou du feldſpath, du mica, des grenats ou du ſchoerl.

Section 4. Roches talcqueuſes amygdaliques.

Il n'y a qu'une eſpèce:

1) —— *à baſe de ſerpentine*, à laquelle ſemblent appartenir l'Amygd. glandulosus, homogeneus et leucochlo-

cochloros de *Gm.* avec du Marbre, de la pierre ollaire et du Quartz.

Section 5. Roches talcqueuſes en breches.

Une eſpèce:

1) —— *à baſe de ſerpentine:* Breccia ſerpentinea de *Gm.* Ce ſont des morceaux de ſerpentine roulés et liés enſemble par un ciment marneux.

Genre IV. Roches calcaires.

Section 1. Roches calcaires criſtallines.

Il n'y a qu'une eſpèce:

1) — *à baſe de ſpath calcaire*, avec de l'Asbeſte, en Olonetz, et avec de la Baïkalite et du Mica criſtalliſé, près du lac Baïkal.

Section 2. Roches calcaires empâtées.

1) —— *à baſe de Marbre*, avec du Spath calcaire, du Quartz, du Mica, du Talc, du Schörl, de l'Asbeſte, de Serpentine, de Feldſpath, dont voyez les exemples dans les diſſertations citées; et auxquelles appartiennent le Porph. calcarius, micans, aſbeſtinus et ophites de *Gm.*

Et ce ſont les ſeules eſpèces qui appartiennent à ce genre, du moins je ne connois point d'autres que je puiſſe, à tout droit, citer ici.

Claſſe II. Sels agrégés.

Quoiqu'il puiſſe y avoir beaucoup d'eſpéces de ſels neutres agrégés accidentellement, ce n'eſt que le ſel gemme qui

qui peut-être mis au rang des Roches, vû qu'il conſtitue de grandes maſſes entre les couches argilleuſes imprégnées de ſel et de Bitume etc. Voyez *Werner* à l'endroit cité.

Ainſi il n'y a *qu'une eſpèce.*

Claſſe III. Métaux agrégés.

Les agrégations des ſubſtances métalliques ſont très nombreuſes et méritent, à beaucoup d'égards, une attention particulière. Mais comme la plûpart en ſont accidentelles, nous ne pouvons ajouter ici que les couches ferrugineuſes de Tarnowitz, de la haute Sileſie etc. Et les couches de Galmey qui ſe trouvent près d'Olkutſch dans les montagnes des Cracovie etc. Voyez Werner à l'endroit cité.

Ainſi il n'y en a que *deux eſpèces.*

Claſſe IV. Bitumes agrégés.

Tels ſont 1) les charbons de terre qui ſe trouvent entre les couches de Marne, d'Argille ſablonneux, d'Argille ſchiſteux, et melés quelque fois de ſpath calcaire, de pyrites etc. 2) *La tourbe.*

Ainſi il y en a *deux eſpèces.*

Claſſe V. Terres agrégées.

Qu'il me ſoit permis d'en faire une claſſe particulière, vû qu'elles ſervent du moins à conſtituer des collines, et rempliſſent ſouvent de vaſtes plaines. Provenues des debris de différentes eſpèces de pierres, elles ſont en ſorte liaiſon avec elles dans la Théorie de la terre.

Elles

Elles peuvent être auſsi bien agrégées que les pierres et on en peut citer quatre eſpèces:

1) Le *ſable*, melé d'Argille etc.

2) l'*Argille* melé de Sable etc.

3) la *marne*?

4) la *terre noire* ou l'Humus, cette terre fertile qui ſert presque partout d'envelope à nôtre Globe, et qui eſt pour la plûpart le produit de la décompoſition des corps organiſés qui, après avoir terminé le cours plus ou moins long de la vie, payent ainſi le dernier tribut à la nature.

NO.

NOTICE I.

SUR UNE NOUVELLE VARIÉTÉ DE SPATH DE PLOMB BLANC.

Préſenté et lû le 1. Juillet 1801.

Mr. l'Académicien Hermann, dans la diſſertation nouvellement produite, nous a donné une belle déſcription d'une ſeconde variété du Spath de Plomb blanc, qui effectivement, quant à l'extérieur, eſt très différente de celle qui étoit dejà connue. — Un heureux hazard ayant fait tomber entre mes mains pluſieurs minéraux de *Salahir*, je me hâtai de les examiner de plus près, et le réſultat en a été que j'y ai trouvé, ſelon toute apparence, encore une *troiſième variété* du ſpath de plomb blanc différente des deux premières. Et comme il eſt de nôtre devoir de communiquer à l'Académie toutes les obſervations qui peuvent contribuer, tant ſoit peu, à l'avantage des ſciences, je m'empreſſe à en donner ici la déſcription de ſes caractères extérieurs.

Déſcription de la troiſième variété de ſpath de plomb blanc.

Couleur: blanc jaunâtre ou couleur d'os d'Elephant à la ſurface; mais parfaitement blanc en dedans.

Apparence extérieure: criſtalliſé en octaèdres très applatis et allongés, deſorte que ces criſtaux s'approchent quelque fois de la forme des lentilles, et que, quand ils ſont grouppés enſemble, il préſentent auſſi la forme d'un épis.

La

La grandeur, ou plutôt la longueur des criſtaux, varie depuis un demi pouce jusqu'à quelques lignes, mais ordinairement elles s'approche d'un demi pouce. La ſurface en eſt liſſe et un peu luiſante, approchant de la lueur graſſe de l'os de l'éléphant.

Apparence intérieure. Ces criſtaux n'ont point de lueur à l'intérieur; la caſſure en eſt fibreuſe dans une direction, et inégale et preſque terreuſe dans l'autre. Ils ſe caſſent en morceaux de figure indéterminée à coins un peu obtus.

Transparence: ils ſont demi-transparens tout-à-fait, ou quelques fois ſur les coins.

Attouchement: gras à la ſurface, mais un peu ſec en dedans. La matrice ou la gangue, où ces criſtaux ſe renferment, eſt plus froide à l'attouchement que les criſtaux mêmes.

Dureté: ils s'égratignent facilement avec le canif.

Peſanteur: ils ſont peſants dans le ſens de Mr. Werner.

Qualités chimiques: ces criſtaux ne ſont point d'efferveſcence avec les acides, même quand ils ont été reduits en poudre; mais ils ſe diſſolvent lentement dans l'acide nitrique. L'acide ſulfurique en précipite un ſédiment blanc.

Ils ne produiſent pas la moindre odeur, ni de ſouffre, ni d'arſénic devant le chalumeau; mais ils pétillent. Et lorsqu'après les avoir reduit en poudre, j'en eus mis une partie dans la cavité d'un morceau de charbon, que j'ai recouvert d'un autre, j'ai obtenu par le feu du chalumeau, en moins de deux minutes, pluſieurs boutons de plomb métallique. Le reſte du ſpath a pris une couleur jaunâtre.

 Gan-

Gangue ou matrice de ces criſtaux: ils ſont diſperſés ou grouppés dans une gangue qui conſiſte de pyrite de fer grenu et qui ſe décompoſe en une terre noire bleuâtre c'eſt pourquoi toute la maſſe ſe rompt facilement et presque au premier attouchement. En outre elle eſt melée de ſpath peſant, et d'un peu d'oxide de cuivre verd.

Lieu natal et autres qualités de ces criſtaux: ils ſe trouvent, ſuivant les nouvelles que m'en a communiquées notre reſpectable correſpondant Mr. de *Schanguine*, dans la minière Salahirſkoy à la profondeur perpendiculaire de 53 Sajènes. Et il m'aſſure, qu'on n'en a rien trouvé auparavant (c'eſt à dire avant l'année 1798) dans les minières de Kolyvan. Quelques uns de ces criſtaux ſont creux en dedans ou remplis d'oxide de fer jaune.

C'eſt donc la couleur, la criſtalliſation, la lueur, la caſſure et la manière de ſe porter envers les acides, qui nous engage à en faire une variété particulière, jusqu'à ce qu'ils ſoyent analyſés chimiquement. Deſorte que nous aurons les variétés ſuivantes du ſpath de plomb *blanc*, ſavoir: 1) *la commune* qui eſt connue depuis long tems. 2) *la vitreuse*, décrite dans ma Minéralogie, et plus amplement par Mr. l'Acad. Hermann, et 3) *l'oſseuse*, nommée ainſi à cauſe de l'apparence extérieure, et qui eſt le ſujet de cette notice.

B. Sewerguine.

NO.

NOTICE 2.

SUR L'OXIDE DE FER EN FORME D'AIGUILLES QUI SE TROUVE SUR LES AMETHYSTES DE L'ISLE DE KIJA EN ONEGA.

Préſenté et lû le 1. Juillet 1801.

On connoit les Améthyſtes d'Onéga et par la déſcription et par les échantillons qu'en a fourni à l'Académie nôtre reſpectable Académicien Hermann. On ſait que pluſieurs de ces Améthyſtes ſont recouverts d'aiguilles ferrugineuſes, et qu'on les a pris pour du chromi te de fer. Ayant appris depuis par Mr l'Académicien Lowitz, que ce n'eſt que de l'oxide de fer, je me ſuis pris la peine de déterminer, par la voye ſèche, la quantité du fer métallique qu'on en pourroit produire, ce qui m'étoit d'autant plus facile à exécuter que j'en avois obtenu une portion aſſez conſidérable d'un de mes correſpondants à Petroſawodſk. Mais avant d'expoſer les épreuves docimaſtiques que j'en ai faites il faut que je faſſe la déſcription de ſes caractères extérieurs, qui ſont les ſuivans:

Couleur: brune.

Apparence extérieure: criſtalliſé en forme d'aiguilles qui ſont ſouvent réunies enſemble en forme de faiſceaux la ſurface en eſt liſſe et très peu luiſante et la lueur eſt vitreuſe, quelque fois un peu chatoyante et rarement métallique.

Apparence intérieure: Ces aiguilles ſont luiſantes en dedans et la lueur eſt métallique. La caſſure eſt feuilletée dans une direction et inégale dans l'autre. Les morceaux détachés ont une forme indéterminée.

Transparence: Elles ont quelque foible transparence ſur les coins.

Péſanteur moyenne: Vingt livres docimaſtiques de cet oxide de fer ont été meſées avec 10 livres de Borax calciné et le tout mis dans un creuſet erduit auparavant d'un mélange de trois parties de poudre de charbon ſur une partie d'argille et mouillé en outre avec de l'huile de chanvre. On l'a tenu dans la chaleur la plus forte du ſoufflet de la forge pendant preſque 30 minutes Le produit en a été 5 livres et 12 ſolotniks docimaſtiques de fer de fonte, dont la couleur étoit griſe noirâtre à l'extérieur et griſe blanchâtre à l'intérieur, au reſte la ſurface en étoit liſſe et la caſſure inégale La ſcorie étoit de couleur noire verdâtre, compacte, la caſſure conchoïdale, et elle ſe détacha facilement du bouton de fer. Le peu de produit de fer obtenu de ces aiguilles provient en partie des grains d'améthyſte et de Quartz qui y étoient melés.

B. Sewerguine.

ASTRONOMICA.

OBSERVATIONS DE VENUS

FAITES A L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT PÉTERSBOURG,

vers le tems de la plus grande digression occidentale de cette Planète, qui a eu lieu en May 1798.

PAR

Mr. L'ABBÉ HENRY.

Préſenté et lû le 21 Juin 1798.

Le beau tems qu'il a fait dans le courant du mois de May et une grande partie de Juin m'ayant permis de ſuivre la planète de Venus, j'ai tiré de mes Regiſtres les Obſervations ſuivantes de cette planète, qui ont été faites vers le tems de ſa plus grande digreſſion occidentale, pour les comparer aux Tables.

On ſait que ces ſortes de comparaiſons ſont toujours utiles au progrés de l'Aſtronomie. Ce ſont elles en effet qui fourniſſent les moyens de rectifier les élémens des orbites planétaires et d'approcher de plus en plus de leur véritable valeur.

Les paſſages au méridien de la planète et des étoiles auxquelles elle a été comparée, ont été obſervés en même tems à la lunette méridienne et au quart-de-cercle mural; com-

comme ils ne différent pas ſenſiblement, j'aurois pu me ſervir indifféremment des uns ou des autres, pour en conclure l'aſcenſion droite de la planète: cependant j'ai préféré de la déduire des paſſages obſervés à la lunette méridienne, par la raiſon que je la crois plus exactement dans le plan du méridien que le quart-de-cercle. En effet par toutes les obſervations que j'ai faites depuis l'inſtant où j'ai commencé à m'en ſervir, pour m'aſſurer de ſa ſituation, je me ſuis convaincu que ſa déviation du plan du méridien ne va pas à une ſeconde de tems. Voici d'abord les obſervations telles que les inſtrumens les ont données.

Obſervations faites à la Lunette des Paſſages.

Noms des Aſtres	premier fil	second fil ou milieu	troisieme fil
	Le 22 May 1798.		
β du Lion	37′ 46″	11 38′ 37″	39′ 28″
α de la Vierge . . .	13 36″	13 14 26″	15 17″
	Le 23 May.		
Second bord de Venus .	2′ 22″	1 3′ 12″	4′ 5″
β du Lion	37′ 45″	11 38′ 36″	39′ 28″
α de la Vierge . . .	13′ 36″	13 14 26″	15 17″
	Le 24 May.		
Second bord de Venus .	6′ 0″	1 6′ 50″	7′ 41″
α de la Vierge . . .	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5 27″	14 6 20″	7′ 14″
	Le 25 May.		
Second bord de Venus .	9′ 39″	1 10′ 29″	11′ 19″
α de la Vierge . . .	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5 27″	14 6 20″	7′ 14″
	Le 26 May.		
Second bord de Venus .	13 19″	1 14′ 9″	15′ 0″
α de la Vierge . . .	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5 26″	14 6 20″	7′ 14″

Le

Noms des Aſtres.	premier fil.	ſecond fil ou milieu	troiſieme fil
Le 27 May.			
Second bord de Venus .	17′ 0″	1 17′ 50″	18′ 41″
α de la Vierge	13′ 36″	13′ 14′ 26″	15′ 17″
Arcturus	5 26″	14 6′ 20″	7′ 14″
Le 28 May.			
Second bord de Venus .	20′ 44	1 21 34″	22′ 24″
β du Lion	37′ 45″	11 38 37″	29′ 38″
α de la Vierge . . .	13 36″	13 14 26″	15′ 17″
Arcturus	5′ 26″	14 6′ 20″	7′ 13″

Obſervations faites au Quart-de-Cercle Mural.

Noms des Aſtres.	I fil.	II fil.	III fil.	VI fil.	V fil.	Diſtances au Zénith. Divis. inter.	Divis. exter.
Le 22 May 1798.							
β du Lion .	37 35″	38 6″	11 38′ 37″	39′ 8″	39 39	44° 13′ 23″, 5	47.2.11.11″5
α de la Vierge	. . .	13′ 57″, 2	13 14 27, 4	14 58″, 5	. . . .	70 0 5″, 2	74.10.10,9″7
Le 23 May.							
Second bord et sup. Venus .	. . .	2′ 42″ 2	1 3′ 12″ 5	3 42″ 2	4 12″ 3	55° 6′ 20″ 7	58.12.7.6″3
α de la Chevre	0′ 13′ 0	0 55″ 2	5 1′ 38″ 0	2 20″ 8	. . .	14° 9′ 32″ 0	15.1.10.4″0
Rigel . . .	. . .	4′ 11″ 5	5 4 41″ 5	5 11″ 5	5 41″ 5	68 20 52″ 8	72.14.7.5″ 2
β du Lion .	37 34′ 0	38 5″ 5	11 38 37″ 0	39′ 8″ 5	39 40″ 0	44 13 23″ 8	47.2.11.11″1
α de la Vierge	. . .	. . .	13.14 26″ 8	. . .	15.27″ 7	77 0′ 3″ 2	74.10.10.11″7
Le 24 May.							
Second bord et sup. Venus .	5 50′ 8	6 20″ 8	1 6′ 50″ 8	7 20″ 8	7 50″ 8	54.48′ 9″ 0	58.7.4 6″6
α de la Chevre	. . .	1 53, 2	5 1 36″ 0	1 18, 7	. . .	14 9 30″ 8	15.1.10 0″4
α de la Vierge	. . .	13 57, 3	13.14.27″ 5	. . .	15 27′ 8	70 0′ 9″ 1	14.10.11.0″2
Arcturus . .	5 17″ 0	5 49″ 0	14.6 21″ 0	6 53, 0	7 25″ 0	39.41.19″ 5	42.5.5.7″6
Le 25 May.							
Second bord et sup. Venus .	. . . .	9 58″ 5	1 10.28″ 5	10 58″ 5	11′ 28″ 6	54 28 46″ 5	58.2.6″ 11″7
α de la Vierge .	. . .	13 57″	13.14 27″ 0	14 58″ 0	. . .	70′ 0′ 5″ 4	74.10.11 4″ 5
Arcturus . .	5 17″ 0	5 49″ 0	14 6 21″ 0	6 53″ 0	7′ 25″ 0	59 41 12″ 5	42.5.5.4″ 1

Noms des Aſtres.	I fil.	II fil.	III fil.	IV fil.	V fil.	Diſtances au Zénith. Divis. inter.	Divis. exte
Le 26 May.							
Second bord et sup. Venus .	13′ 9″ 3	13 39″ 3	1 14 9″ 5	14 59, 3	15 9″ 3	54 11.6″ 5	57.12.12.4″3
α de la Chevre	. . .	1 55″ 6	5 1 38″ 1	2 20″ 5	3 11″ 1	14 9 33″ 1	15.2.10 4″ 0
α de la Vierge	. . .	13 57″ 2	13 14 27″ 7	14 57″ 4	. . .	70 0 4″ 5	74.10 11 0″ 0
Arcturus . .	5 17″ 0	5 49″ 0	14.6.20″ 9	6′ 53″ 0	7 24″ 5	39 41′ 17″ 4	42.5.5.7″ 3
Le 27 May.							
Second bord et sup. Venus .	16 49″ 5	17 19″ 5	1 17 49″ 5	18 19″ 5	18 50″ 0	53 52′ 20″ 5	57.7.6.6″ 6
α de la Vierge	. . .	13 26 0	13 14 27″ 0	14 58″ 0	. . .	70 0. 5″ 4	74.10.11 1″ 5
Arcturus . .	5 17″ 0	5 49″ 0	14 6 21″ 0	6 53″ 0	7 25″ 0	39 41.14″ 4	42.5.5.5″ 6
Le 28 May.							
Second bord et sup. Venus .	20 33′ 9	21 3″ 9	1 21 33″ 9	22 3″ 9	22 33″ 9	53.33 20″ 2	57.2.16.3″ 9
α de la Vierge	13 26, 5	13 57″ 0	13 14 27″ 0	14 57″ 0	15 27″ 5	70 0 1″ 0	74.10.10.12″ 1
Arcturus . .	. . .	5 49″ 0	14 6′ 20″ 0	6 52″ 8	7 24″ 6	39 41′ 16″ 4	41.5.5.5″ 5

La pendule d'obſervation étoit réglée ſur le tems sydéral, et ne ne retardoit guères à cette époque que d'une ſeconde en onze à douxe jours. J'ai d'ailleurs eu égard à cette petite différence.

J'ai tiré du catalogue de Maskelyne l'aſcenſion droite moyenne et la déclinaiſon moyenne de chaque étoile obſervée, et après les avoir converties en apparentes, en y appliquant l'aberration et la nutation convenables, j'ai changé l'aſcenſion droite apparente de chacune en tems.

J'ai enſuite corrigé de la réfraction la diſtance au zénith obſervée de chaque étoile et en ai conclu ſa déclinaiſon apparente, en employant pour hauteur du Pole 59° 56″ 23″. Et comparant

parant les paſſages et les déclinaiſons obſervées avec les aſcenſions droites apparentes en tems et les déclinaiſons, tirées des catalogues j'ai formé le tableau ſuivant:

Etoiles	Ascensions droites appar.		differ.	Déclinaisons apparentes		differ.
	observées	calculées		observées	calculées	
β Lion .	11^{b}38′37″5	11^{b}38′ 44′9	−7″ 4	15° 42′ 4″ 2	15′ 42 4″ 4	−0″2
α Vierge	13^{b}14′27″5	13^{b}14′34″8	−7″ 3	10° 6″20″1	10° 6′ 19″6	+0″5
Arcturus	14^b 6′ 21 0	14^b 6′28″ 1	−7″ 1	20° 14′ 20″0	20° 14′ 19″6	+0″4
α Chevre	5^b 1′ 38″ 0	5^b 1′45″5	−7″ 5	45° 46′41″0	45 46′39″4	+0″6
Rigel . .	5^b 4′ 41″ 5	5^b 4 48″6	−7″ 1	8° 26′48″6	8 26 48″4	+0″ 2

Qui fait voir que la pendule retardoit de 7″ 3 ſur le tems ſidéral, et que le quart-de-cercle repréſente les déclinaiſons fort exactement.

Après avoir corrigé les paſſages obſervés de Venus de cette quantité, je les ai converties en tems moyens et en dégrés.

Ayant enſuite retranché de la hauteur du Pole les diſtances au zénith de Venus, dépouillées de la refraction j'ai formé ce tableau:

May.	Tems du pass. du second bord		Assension droite	Déclin. apparente
Le	sideral	moyen	du second bord	du bord supérieur
22	1^b 3′ 19″ 8	20^b 58′ 50″ 8	15° 49′ 57′ 0	5° 48′ 41″ 3 B
23	1^b 6′ 57″ 8	20^b 58′ 32″ 9	16 44″ 37″ 0	4° 6′ 55″ 4″B
24	1^b 10′ 36″ 8	20^b 58′ 14″ 8	17 39′ 12″ 0	5 26 18″ 6 B
25	1 14 16″ 8	20^b 57′ 58″ 3	18 34′ 12″ 0	5 43 56″ 5 B
26	1 17 56″ 8	20^b 57′ 41″ 7	19 29′ 27′ 0	6 2 46″ 3 B
27	1 21 41 3	20^b 57′ 28″ 2	20 25″ 19″ 5	6 21 44″ 8 B

Les Tables de Venus qui ſont dans la troiſième édition de l'Aſtronomie de Mr. de la Lande, donnent pour l'inſtant de la culmination du ſecond bord de cette planète les réſultats ſuivans:

May Le	Longitude géocentrique	Latitude géocentrique	Parallaxe horiſontale	Demi-diamétre horiſontal
22	0^s 16° 26′ 16″ 7	1° 47′ 52″ 6 A	12″ 5	12″ 1
23	0^s 17° 23′ 19″ 5	1° 51′ 46″ 5 A	12 4	12″ 0
24	0^s 18° 20′ 41″ 2	1° 55′ 23″ 6 A	12″ 3	11″ 8
25	0^s 19° 18′ 31 8	1 58 53″ 8 A	12 2	11″ 7
26	0^s 20° 16′ 44″ 6	2 2 13″ 7 A	12″ 0	11″ 6
27	0^s 21° 15′ 12″ 4	2 5 24″ 4 A	11″ 9	11″ 5

Avec la parallaxe horiſontale et le demi-diamétre horiſontal de Venus on trouve ſa parallaxe de hauteur et ſon demi-diamètre ou aſcenſion droite: On retranche ce demi-diamètre de l'aſcenſion droite du ſecond bord de Venus, pour avoir celle du centre de la planète; et après avoir ajouté la parallaxe de hauteur à la déclinaiſon du bord ſupérieur et retranché le demi-diamètre horiſontal, pour avoir la déclinaiſon du centre de la planète, on à, à l'inſtant de la culmination du ſecond bord de Venus, les quantités ſuivantes:

May

May Le	Aſcenſion droite du Centre	Déclinaiſon de Venus	
22	15° 49′ 46″ 9	4° 48 39″ 8	B
23	16° 44′ 25″ 0	5 6 53″ 2	B
24	17 39 0″ 1	5 25 17″ 9	B
25	18 34 0″ 3	5 43 56″ 3	B
26	19 29 15″ 51	6 2 45″ 0	B
27	20 25 7″ 51	6 21 42″ 5	B

avec lesquelles et avec l'obliquité de l'Ecliptique 23 27 58″ 9 on trouve les longitudes et latitudes géocentriques de la planète, qui comparées aux précédentes, tirées de tables, donnent les réſultats ſuivans:

May Le	Longitude géocentrique	Erreur des tables	Latitude géocentrique	Erreur des tables
22	0ˢ 16° 25′ 58″ 0	— 18″ 7	1° 47′ 40″ 5 A	— 12″ 1
23	0ˢ 17° 22′ 58″ 6	— 20″ 9	1° 51′ 37″ 5 A	— 9″ 0
24	0ˢ 18° 20′ 30″ 8	— 10″ 4	1° 55′ 17″ 0 A	— 6″ 6
25	0ˢ 19° 18′ 16″ 0	— 14″ 8	1 58 44″ 6 A	— 9″ 2
26	0ˢ 20° 16′ 26″ 8	— 15″ 8	2 2 3″ 7 A	— 10″ 0
27	0ˢ 21° 14′ 53′ 5	— 18″ 9	2 5 11 5″ A	— 12″ 9

L'erreur moyenne des tables en Longitude eſt donc de — 16″ 6, et en Latitude — 9″ 9.

Si l'on retranche le Longitude de la planète de celle du

du ſoleil, on aura pour chaque jour ſon élongation telle qu'elle réſulte des obſervations précédentes, ſavoir:

May Le	Elongation de Venus
22	1ˢ 15° 52′ 17″ 0
23	1 15 52 52″ 0
24	1 15 52 52″ 2
25	1 15 52 38″ 5
26	1 15 51 57″ 5
27	1 15 51 10″ 0

On pourroit donc, au moyen des quantités précédentes, calculer l'inſtant de la plus grande digreſſion de Venus, ainſi que la longitude et la latitude géocentriques de la planète, à l'inſtant de cette plus grande digreſſion, ſi cela étoit néceſſaire.

ME-

MEDITATIO
DE FIGURA TELLURIS
EXACTIUS COGNOSCENDA.

AUCTORE

STEPHANO RUMOVSKY.

Conventui exhibita die 11. Mart. 1799.

1) Conferenti diſquiſitiones auctorum de magnitudine et figura Telluris mox patebit ex iisdem datis diverſos auctores diverſam aliquantum rationem diametri aequatoris ad axem Telluris elicuiſſe. Originem hujus discrepantiae licet exiguae, non prorſus tamen negligendae, exinde ut plurimum promanaſſe obſervavi, quod rationem illam deduxerint e formulis proxime tantum veris: Sic poſito primo gradu meridiani 56750 et ſub Latitudine 46°. 23′ 57050 perticarum gallicarum, *Condaminus* juxta formulam Maupertuiſianam differentiam inter diametrum aequatoris et axem Telluris eruit $\frac{1}{302}$, cum ex formula geometrice vera eadem $\frac{1}{300}$ reſultet. Hac diſcrepantia inductus e re eſſe exiſtimavi omnes gradus meridiani, quot quot hucusque menſurati ſunt, conferre cum primo gradu Latitudinis, nec non cum gradu Laponiae, atque ope formulae omnimode verae valorem pro differentia inter diametrum aequatoris et axem Telluris eruere. Hunc in finem neceſſe eſt, ut brevibus repetam ſolutionem Eulerianam ſequentis problematis.

Pro-

Problema.

2) Conſiderata Tellure ut Ellipſoide, datis magnitudine et latitudine binorum meridiani graduum determinare rationem diametri aequatoris ad axem Telluris.

Solutio.

Tab. XIV Fig. 8. Sit C centrum Telluris, dimidius axis $AC = b$, et radius aequatoris $EC = a$, atque A E B meridianus ellipticus, cujus revolutione circa A B naſcitur Tellus. Denotet praeterea punctum M locum Terrae in ſuperficie, ubi gradus meridiani eſt menſuratus, et ponatur pro hoc puncto abſciſſa $CP = x$, et ſemiordmata $PM = y$, erit ex natura ellipſis $y = \frac{b}{a} \surd(aa - xx)$. Ducta ad meridianum normali MN fiet ſub normalis $PN = \frac{bbx}{aa}$. Vocetur jam angulus $MNE = \Phi$, quo definitur Latitudo loci M, habebitur $\tan g\,\Phi = \frac{PM}{PN} = \frac{a\surd(aa - xx)}{bx}$. Unde obtinebitur

$$x = \frac{aa \cos\Phi}{\surd(aa \cos\Phi^2 + bb \sin\Phi^2)}$$

$$y = \frac{aa \sin\Phi}{\surd(aa \cos\Phi^2 + bb \sin\Phi^2)}$$

atque elementum

$$Mm = \partial s = \frac{aa\,bb\,\partial\Phi}{(aa \cos\Phi^2 + bb \sin\Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hinc radius oſculi pro puncto M

$$\frac{\partial s}{\partial\Phi} = \frac{aa\,bb}{(aa \cos\Phi^2 + bb \sin\Phi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pro alio autem puncto R, cujus Latitudo ſit $= \psi$, erit radius oſculi

$$\frac{\partial s}{\partial\psi} = \frac{aa\,bb}{(aa \cos\psi^2 + bb \sin\psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cum igitur arcus meridiani exigui teneant rationem radiorum

rum oſculi ſi M et N exprimant magnitudinem graduum meridiani punctis M et R reſpondentium, habebitur

$$M : N = \frac{aa\,bb}{(aa\cos\Phi^2 + bb\sin\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{aa\,bb}{(aa\cos\psi^2 + bb\sin\psi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

Vel poſito $b = 1$ et $a = 1 + \delta$, exiſtente δ fractione ad modum exigua, fiet

$$M : N = \frac{1}{(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2\cos\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{1}{(\sin\psi^2 + (1+\delta)^2\cos\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

unde reperitur

$$(1+\delta)^2 = \frac{N^{\frac{2}{3}}\sin\psi^2 - M^{\frac{2}{3}}\sin\Phi^2}{M^{\frac{2}{3}}\cos\Phi^2 - N^{\frac{2}{3}}\cos\psi^2}.$$

Corollarium.

3) Valor ipſius δ adhibita approximatione variis modis erui poterit: ſi in formula ultimo inventa negligatur ſecunda poteſtas ipſius δ, prodit

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}(N^{\frac{2}{3}} - M^{\frac{2}{3}})}{M^{\frac{2}{3}}\cos\Phi^2 - N^{\frac{2}{3}}\cos\psi^2}$$

ſive cum ſit $(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2\cos\Phi^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3\delta\cos\Phi^2$ et $(\sin\psi^2 + (1+\delta)^2\cos\psi^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3\delta\cos\psi^2$ habebitur

$$M : N = 1 - 3\delta\cos\Phi^2 : 1 - 3\delta\cos\psi^2$$

unde

$$\delta = \frac{N - M}{3(N\cos\Phi^2 - M\cos\Phi^2)}.$$

4) Omnes igitur gradus meridiani, quorum magnitudo noviſſimis temporibus eſt definita, combinando cum gradu Peruviano et Laponiae ope formulae ſupra exhibitae quaeſivi ſemidiametrum aequatoris, et quanta inde reſultavit diffe-

differentia inter diametrum aequatoris et axem Telluris ſequenti tabula complexus ſum.

Latitudo	Magnitud. gradus.	δ resultat. ex compar. grad. Peruv	grad. Lap.	
1°	56750			*Bourguer* et *Condam.* Perv.
66 . 20′ B.	57422	$\frac{1}{219}$		*Maupertuis* Lapon.
33 . 18 A	57037	$\frac{1}{178}$	$\frac{1}{239}$	*la Caille* C. B. S.
39 . 12 B	56903	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{145}$	*Maſon* et *Dixon* Penſilv.
50 . 0	57084	$\frac{1}{299}$	$\frac{1}{128}$	
49 . 3	57069	$\frac{1}{317}$	$\frac{1}{128}$	
49 . 23	57074	$\frac{1}{303}$	$\frac{1}{134}$	
47 . 58	57071	$\frac{1}{292}$	$\frac{1}{140}$	*Caſsini* Galliae.
45 . 43	57040	$\frac{1}{302}$	$\frac{1}{146}$	
43 . 32	57048	$\frac{1}{270}$	$\frac{1}{150}$	
48 . 43	57086	$\frac{1}{287}$	$\frac{1}{140}$	
47 . 47	57074	$\frac{1}{279}$	$\frac{1}{143}$	*Liesganing* Auſtriae.
47 . 15	57064	$\frac{1}{291}$	$\frac{1}{144}$	
43 . 0	56979	$\frac{1}{337}$	$\frac{1}{144}$	*Boſcovichius* Italiae.
44 . 44	57069	$\frac{1}{263}$	$\frac{1}{168}$	*Beccaria* Pedemont.
45 . 57	56881	$\frac{1}{665}$	$\frac{1}{102}$	*Liesganing* Hungar.

5) Diſcrepantia, quae cernitur in valore ipſius δ, non nulli auctores permoti in eam abiere ſententiam, ut ſtatuant figuram Telluris non ſolum non eſſe ſphaeroidicam, verum etiam conformationem hemiſphaerii Auſtralis diverſam eſſe a conformatione Borealis, ſupponentes ſcilicet menſuras graduum diverſis in regionibus captas omnimode eſſe juſtas. Non nulli vero experientia edocti, quam difficile ſit altitudinem alicujus aſtri metiri cum praeciſione 2 aut 3 minuto-

nutorum ſecundorum, ad conciliandam Telluri figuram ſphaeroidicam cenſent in obſervationibus coeleſtibus non nullos errores eſſe admittendos, tales nempe, quales adhibita omni diligentia vix poſſunt evitari. Luculens hujus rei exemplum ſiſtit nobis Latitudo obſervatorii Pariſini, quae poſt tot repetitas obſervationes ad 2 minuta ſecunda hucusque eſt incerta. Utraque ſententia pari nititur auctoritate; probabilior tamen cenſenda videtur ea, quae cum legibus gravitatis facilius conciliatur.

6) Cum determinatio amplitudinis arcus coeleſtis inter binas ſtationes intercepti requirat binas obſervationes alicujus ſtellae, et quaelibet obſervatio diſtantiae a Zenith errorem 2 imo etiam 3 minutorum ſecundorum involvere queat, facile patet amplitudinem arcus metiti 4 imo etiam 6 minutis ſecundis in exceſſu vel in defectu a vera poſſe aberrare; et cum uni minuto ſecundo reſpondeant 16 circiter perticae gallicae, menſurae gradus meridiani correctionem ± 100 perticarum ſine praejudicio obſervatorum recipere poterunt, ut ex mutua eorum comparatione prodeat figura Telluris ſphaeroidica. Maximam tamen ſupra dictam correctionem iis tantum menſuris applicare conſultum eſt, ubi unus tantum ſemelque gradus meridiani menſuratus eſt, quales ſunt Lapponiae, ad Caput Bonae Spei, et Penſilvaniae; quoties vero plures in eadem regione fuerint menſurati, correctio pro ratione graduum erit minuenda.

7) His praeſuppoſitis obſervavi applicata correctione gradui Peruviano — 40, Capitis Bonae Spei — 105, Penſilvaniae + 99, Italiae + 75, gradui Galliae Boreali + 60, medio a Condamino aſſumto + 48, meridionali + 20, Pe-

demontii o, Auſtriae medio + 42, Laponiae — 90 perticarum, excepto gradu Hungariae omnes collatos cum gradu Peruviano, aeque ac Laponiae, eandem quam proxime rationem diametri aequatoris ad axem Telluris praebituros, prout patet ex ſequenti laterculo.

Latitudo	magnitudo gradus	correctio	δ resultans ex comparatione grad. Peruv.	grad. Lapon.	
1°	56750	— 40			Peruv.
66.20′ B	57422	— 90	1, 00434		Laponiae.
33.18 A	57037	— 105	1.00434	1.00429	C. B. S.
39.12 B	56903	+ 99	1.00431	1.00435	Penſilvan.
43.0	56979	+ 75	1.00434	1.00434	Italiae.
43.32	57048	+ 20	1.00437	1.00431	Gall. merid.
44.44	57069	0	1.00437	1.00429	Pedemont.
46.43	57050	+ 48	1.00429	1.00439	Galliae med.
47.55	57076	+ 42	1.00435	1.00432	Viennens.
50.0	57084	+ 60	1.00435	1.00434	Gall. Bor.

Medium 1,.00434 1.00433,2

Hinc $\delta = \frac{1}{230,2}$ $\frac{1}{231}$

8) Et ſi ratio diametri aequatoris ad axem Telluris hic elicita ſat bene conſentiat cum ratione ex legibus gravitatis deducta, pro vera tamen illam aſſerere nimia foret audacia ob inſignes correctiones, quas non nullis menſuris graduum tribuere fuit neceſſum. Neque minus verum eſt, in quacunque ratione creſcere ponantur gradus meridiani ab aequatore verſus polos, ſemper admitti debere correctiones non minores iis, quas ſupra applicuimus, ſi omnes menſurae graduum cum aſſumta hypotheſi ad conſenſum ſint reducen-

ducendae. Unde concludere eſt, multum adhuc nos diſtare ab exacta cognitione figurae Telluris, et recte ſentire videtur Boſcovichius dum ait, *quaeſtionem de magnitudine et figura Telluris ex menſura graduum non ſolum abſolutam adhuc non eſſe, ſed vix eſſe inchoatam.*

9) Aſtronomi Galli anno 1735 in Americam ad aequatorem ablegati in mandatis primum habuere, ut non gradum tantum meridiani, verum etiam aequatoris dimetirentur; poſt modum perpenſis procul dubio difficultatibus, quae tunc temporis menſurae gradus aequatoris officere vel eam incertam reddere potuerunt, injunctum iis fuit, ut definiendae magnitudini ſolius gradus meridiani operam navarent. Quot perpeſſi laborum et quanto ſtudio opus hoc ad finem illi perduxerint, legimus in operibus, quae reduces in patriam publici juris fecere. Inter illos *Bougeurus* in opere ſuo, cui titulus *la figure de la Terre* ea qua par eſt ſagacitate enumerat omnes errores, qui in dimetiendo gradu aequatoris vel illi paralleli poſſunt committi, et tandem concludit conjunctis omnibus erroribus, ſi intervallum inter binas ſtatiores interceptum comprehendat duos gradus Longitudinis, cui in tempore reſpondent 8′ vel 480″, atque in qualibet ſtatione aberratum ſit uno minuto ſecundo temporis, integrum errorem in menſura gradus $\frac{1}{240}$ ſui partem conſtituturum, et ſexies aut ſepties majorem errorem commiſſum iri, quam in menſura arcus meridiani tres gradus comprehendentis.

10) Ratiocinia *Bougueri* judicis in hoc negotio optimi procul dubio recte ſe habent, ſi in determinanda differentia meridianorum binarum ſtationum adhibeatur methodus

ab

ab illo propoſita et poſt modum in Gallia a *Caſſino* in uſum tracta ſc. ope ſignorum terreſtrium. Quodſi in definienda Longitudine ſtationum relativa uti liceat chronometro, quod per ſat longum temporis intervallum motu procedat aequabili, cujusmodi ſunt illa, quae poſſident Illuſtriſſimus Comes *de Brukl* et Celeberr. *Zach*, tunc maxima pars errorum, qui methodum memoratam concomitantur, evaneſcit, unusque remanet error evitandus, qui committi poteſt in aſſignanda meridie ad chronometrum per altitudines Solis correſpondentes. Jam vero per experientiam conſtat momentum meridiei cum certitudine dimidii minuti ſecundi aſſignari, adeoque differentiam meridianorum cum certitudine unius minuti ſecundi, imo etiam, ſi faveant circumſtantiae exactius poſſe definiri; methodus porro a Bouguero ad exquirendam differentiam meridianorum propoſita non permittit, ut ſtationes inter ſe majori diſtent intervallo quam duorum graduum, cum adhibendo chronometrum intervallum earum non modo ad 3 imo etiam 6 aut 8 gradus in regionibus borealibus extendi queat, patet in menſura gradus paralleli errorem inevitabilem ad $\frac{1}{1920}$ partem deprimi poſſe. Quodſi igitur ſub diverſis parallelis ſat magno intervallo a ſe remotis menſurentur gradus binorum circulorum aequatori parallelorum ex mutua eorum comparatione ratio diametri aequatoris ad axem Telluris ſequenti modo determinabitur.

11) Poſita ut ante figura Telluris ſphaeroidica ſit latitudo paralleli puncto M deſcripti $= \phi$ et alterius puncto R deſcripti $= \psi$, retentis iisdem denominationibus per problema ſupra propoſitum habebitur pro latitudine ϕ radius paralleli.

$$MQ = \frac{aa \cos \phi}{\sqrt{(aa \cos \phi^2 + bb \sin \phi^2)}}.$$

et

et pro Latitudine ψ radicis paralleli

$$RT = \frac{aa \cos \psi}{\sqrt{(aa \cos \Phi^2 + bb \sin \Phi^2)}}.$$

Cum arcus eidem numero graduum reſpondentes teneant rationem radiorum, ſi gradus paralleli ſub Latitudine Φ ponatur $= P$ et ſub Latitudine ψ ponatur $= Q$, fiet

$$P:Q = \frac{aa \cos \Phi}{\sqrt{(aa \cos \Phi + bb \sin \Phi^2)}} : \frac{aa \cos \psi}{\sqrt{(aa \cos \Phi + bb \sin \Phi^2)}}.$$

Unde poſito ut ante $b = 1$ et $a = 1 + \delta$ eruitur

$$(1 + \delta)^2 = \frac{QQ \tan \psi^2 - PP \tan \Phi^2}{PP - QQ}.$$

Hinc ſi daretur magnitudo gradus aequatoris prodiret

$$1 + \delta = \frac{Q \tan \psi}{\sqrt{(PP - QQ)}}.$$

12) Cum in Gallia ſub Latitudine $43^\circ.32'$ gradus paralleli ex menſura Caſſiniana ſit 41618 perticarum Gallicarum, ut hac methodo magnitudo et figura Telluris definiri queat, non aliud ſupererſt, quam ut in Latitudine aliqua magis auſtrali aut magis boreali menſuretur itidem gradus paralleli. Regio huic ſcopo in Imperio Ruſſiae idonea eſt, quae jacet inter 64 et 65 gradum Latitudinis, ubi ſuper mari albo ad littus meridionale glacie conſtrictum intervallum 6 circiter gradus paralleli comprehendens commode poterit menſurari, et ſi tandem aliquando fortuna Aſtronomis arriſerit, atque adhibito chronometro definita fuerit magnitudo gradus aequatoris vel paralleli aequatori propioris, ſpes eſt, ut menſuris graduum meridiani adiuti de magnitudine et figura Telluris certius judicium pronunciare queamus. Nam data magnitudine gradus paralleli, ea cum quovis gradu meridiani comparari, atque valor ipſius δ erui poterit.

13) Sit

13) Sit ſub Latitudine Φ gradus meridiani $= M$ et in Latitudine ψ gradus paralleli $= P$, habebitur ex praecedentibus radius in M

$$MO = \frac{(1+\delta)^2}{(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2 \cos\Phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et radius paralleli in puncto R

$$RT = \frac{(1+\delta)^2 \cos\Phi}{\sqrt{(\sin\psi^2 + (1+\delta)^2 \cos\psi^2)}}.$$

Quam ob rem habebimus

$$M : P = \frac{1}{(\sin\Phi^2 + (1+\delta)^2 \cos\Phi^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{\cos\psi}{\sqrt{(\sin\psi^2 + (1+\delta)^2 \cos\psi^2)}}.$$

Hic quia tollendo ſigna radicalia ad aequationem cubicam foret perventum, neceſſario confugiendum erit ad approximationem, negligendo poteſtates ipſus δ. Cum igitur ſit

$$(1 + 2\delta\cos\Phi^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 - 3\delta\cos\Phi^2$$

et $$(1 + 2\delta\cos\psi^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \delta\cos\psi^2$$

prodibit

$$M : S = 1 - 3\delta\cos\Phi^2 : \cos\psi - \delta\cos\psi^3$$

Unde obtinebitur

$$\delta = \frac{P - M\cos\psi}{3P\cos\Phi^2 - M\cos\psi^3}.$$

Quodſi in Latitudine Φ detur gradus paralleli et ſimul meridiani, tunc nulla adhibita approximatione reperitur

$$(1+\delta)^2 = \frac{P - M\cos\Phi\sin\Phi^2}{M\cos\Phi^3} = 1 + \frac{P - M\cos\Phi}{M\cos\Phi^3}$$

adhibita vero approximatione

$$\delta = \frac{P - M\cos\Phi}{2M\cos\Phi^3}.$$

14) In Gallia ſub parallelo 43°. 32′ gradus meridiani inventus eſt 57048 et paralleli 41618 perticaram gallicarum, unde repereтur $\delta = \frac{1}{103}$, idem vero gradus paralleli colla-

collatus cum Peruviano dat $\delta = \frac{1}{116}$, cum gradu Capitis Bonae Spei praebet $\delta = \frac{1}{219}$, et ex combinatione ejusdem cum gradu meridiani Laponiae prodit $\delta = \frac{1}{139}$. Determinationes has tentaminis loco hic ſubjungo, comparationi aliorum graduum meridiani cum gradu Longitudinis, ut pote non prorſus certo, ſuperſedeo.

SUPPLEMENTUM AD THEORIAM LUNAE EULERIANAM.

AUTORE

F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita die 23. Maji 1799.

§. 1.

Nova *theoria motuum lunae* noſtri quondam illuſtris *Euleri*, omnes vel minores orbitae lunaris aequationes tam plenarie tamque exacte evolutas exhibet, ut opus hoc, reſpectu indefeſſi ſtudii atque laboris autorum non minus quam reſpectu methodi ingenioſiſſimae, qua in computandis aequationibus uſi ſunt, ſumma laude dignum, tanquam pandectae theoriae lunaris conſiderari poſſit. Nemo quidem *erit*, qui libro illo perlecto non optaverit, ut nulla gravioris ſaltem momenti aequatio ibidem fuerit omiſſa, aut ut quaecunque omiſſa fuerit, formulis Eulerianis adhuc intexi poſſit. Quare ſi quis unam alteramve novam loci lunae correctionem formulis Eulerianis addiderit vel ex iisdem deduxerit, is laborem haud inutilem ſuſcepiſſe merito cenſendus erit. Saepe quidem, librum hunc pervolventi, formulasque Eulerianas cum recentius inventis comparanti, in mentem mihi incidit, operae pretium fore inveſtigationem, annon *aequatio longitudinis lunae ſecularis*, quam e principiis gravitatis Neu-

Neutonianis explicare ipſe Eulerus fruſtra conatus fuerat, in formulis, quibus motus lunae a magno illo Geometra definitus erat, jam contineatur ex iisque deduci jam poſſit, poſtquam *la Place* vir celeberrimus phyſicam aequationis hujus cauſam tam feliciter detexiſſet. Quum jam ſatis conſtet, hanc aequationem e variatione eccentricitatis orbitae telluris oriundam, quadrato hujus eccentricitatis eſſe proportionalem, facile cognovi, illam inveſtigationem abſolvi non poſſe, niſi cunctas lunae correctiones in quadratum eccentricitatis telluris ductas ſupputaſſem, quandoquidem eas autor noſter prorſus neglexerat. At calculo nondum peracto animadverti, terminos, qui inde in expreſſiones ternarum coordinatarum, quas methodus Euleriana ſuppeditat, ingreſſuri eſſent, nonniſi periodicos fore, eoque modo aequationem ſecularem erui non poſſe. Veruntamen ipſi termini periodici non videbantur negligendi, idque eo minus, quod correctiones a cubo eccentricitatis lunae dependentes aliasque minores diligentiſſime computaverat celeb. Eulerus, quamvis quadratum eccentricitatis ſolaris duplo fere majus ſit cubo eccentricitatis lunaris. Libenter itaque calculum ſatis longum atque tedioſum ad finem perduxi, pluresque novas correctiones periodicas loci lunae inveni, formulis Eulerianis addendas, quarum ſumma ad viginti minuta ſecunda pervenire poteſt. Ad aequationem ſecularem quod attinet, ejus analyſis altius eſt repetenda, ſiquidem coordinatae formularum Euleri talis formae ac indolis ſunt, ut nonniſi aequationes periodicas exponere poſſint. Quare non inutile fore theoriae lunae Eulerianae ſupplementum exiſtimavi, ſi breviter oſtenderim, quomodo aequationes Eulerianae transformandae ſint, ut ope methodi a celeb. la Place uſitatae

Ggg 2 aequa-

aequatio ſecularis inde eruatur, idque eo magis, quod facile praevidere licebat, eandem analyſin ſimul ad correctiones loci lunae periodicas haud ſpernendas eſſe perducturam. Duplex itaque diſſertationis hujus eſt objectum: aequationes ſcilicet *periodicae* a *quadrato eccentricitatis telluris* pendentes, nec non aequatio longitudinis lunae *ſecularis* ab eodem quadrato ejusque variationibus pendens. Ceterum brevitati conſulens, analyſin libri Euleriani lectoribus cognitam, ipſumque librum in eorum manibus eſſe ſuppoſui: quamobrem iisdem uſus ſum characteribus atque literis, ac ſi argumentum, de quo agitur, ibidem jam fuerit pertractatum, ipſas libri paginas allegabo; diſſertationis vero noſtrae paragraphi citabuntur.

§. 2. Characteres e libro Euleriano depromti, et in hac diſſertatione ubique adhibiti, ſunt ſequentes.

Diſtantia media ſolis a tellure . . $= 1$.
—— vera — — — . . $= u$ (pag. 13.)
—— media lunae a tellure . . $= a$ (pag. 56.)
Eccentricitas telluris $= \varkappa$ (pag. 20.).
Anomalia ſolis media $= t$ (ibid.).
Longitudo lunae media — longit. ſolis vera — $180° = \psi$ (pag. 24. conf. pag. 13. et 29).
Longitudo lunae media — longit. ſolis media $= p$ (pag. 31); $\frac{\partial p}{\partial t} = m$ (ibid.).

Binae coordinatae locum lunae in Ecliptica definientes ſunt X, Y, quarum prior e centro telluris ad locum lunae medium directa abſcinditur ab altera, quae a loco lunae in

in Ecliptica ad eam normalis eſt (pag. 23.). Tertiam videlicet ordinatam Z Eclipticae normalem hic negligimus, ubi de longitudine duntaxat quaeritur, ſiquidem correctio latitudinis lunae a quadrato eccentricitatis telluris pendens prorſus eſt inſenſibilis. Binae vero novae coordinatae, quas infra introducemus, ſunt $x = \frac{X}{a} - 1$, $y = \frac{Y}{a}$ (pag. 56.). Eſt denique

$$(m + 1)^2 + \tfrac{1}{2} = \lambda \text{ (pag. 71.)},$$

et in numeris abſolutis,

$$m = 12,36892 \text{ (pag. 132)}; \ \lambda = 179,228928 \text{ (pag. 133)}.$$

§. 3. Nunc ante omnia quantitates evolvendae ſunt, quibus in duabus aequationibus fundamentalibus opus habebimus. Quum per naturam ellipſis perque legem Kepleri ſit

$$u = 1 + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 + \varkappa \cos t - \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \cos 2t,$$

neglectis nempe altioribus eccentricitatis poteſtatibus, reperitur

$$\tfrac{1}{u^3} = 1 - 3\varkappa \cos t + \tfrac{3}{2}\varkappa^2 (1 + 3 \cos 2t);$$
$$\tfrac{1}{u^4} = 1 - 4\varkappa \cos t + \varkappa^2 (3 + 7 \cos 2t).$$

Quum praeterea per legem Kepleri ſit vera longitudo ſolis = long. ſolis media $- 2\varkappa \sin t + \frac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t$, ideoque (§. 2.)

$$\psi = -180^\circ + p + 2\varkappa \sin t - \tfrac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t,$$

reperitur

$$\sin\psi = -\sin(p + 2\varkappa \sin t - \tfrac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t) \quad \text{et}$$
$$\cos\psi = -\cos(p + 2\varkappa \sin t - \tfrac{5}{4}\varkappa^2 \sin 2t);$$

unde quum in genere ſit

$$\sin\Phi = \Phi - \tfrac{\Phi^3}{6} + \text{cet. et } \cos\Phi = 1 - \tfrac{\Phi^2}{2} + \text{cet.}$$

et

et productis ſinuum per ſinus angulorum multiplorum expreſſis,

$$\sin^2\phi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\phi,$$
$$\cos^2\phi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\phi,$$
$$\sin\phi\cos\omega = \tfrac{1}{2}\sin(\phi+\omega) + \tfrac{1}{2}\sin(\phi-\omega),$$
$$\sin\phi\sin\omega = \tfrac{1}{2}\cos(\phi-\omega) - \tfrac{1}{2}\cos(\phi+\omega),$$
$$\cos\phi\cos\omega = \tfrac{1}{2}\cos(\phi-\omega) + \tfrac{1}{2}\cos(\phi+\omega),$$

reſultat

$$\sin\psi = -\sin p + \varkappa\sin(p-t) - \varkappa\sin(p+t) + \varkappa^2\sin p - \tfrac{9}{8}\varkappa^2\sin(p-2t) + \tfrac{1}{8}\varkappa^2\sin(p+2t),$$
$$\cos\psi = -\cos p + \varkappa\cos(p-t) - \varkappa\cos(p+t) + \varkappa^2\cos p - \tfrac{9}{8}\varkappa^2\cos(p-2t) + \tfrac{1}{8}\varkappa^2\cos(p+2t),$$
$$\sin\psi\cos\psi = +\tfrac{1}{2}\sin 2p - \varkappa\sin(2p-t) + \varkappa\sin(2p+t) - 2\varkappa^2\sin 2p + \tfrac{13}{8}\varkappa^2\sin(2p-2t) + \tfrac{3}{8}\varkappa^2\sin(2p+2t),$$
$$\sin^2\psi = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2p + \varkappa\cos(2p-t) - \varkappa\cos(2p+t) + 2\varkappa^2\cos 2p - \tfrac{13}{8}\varkappa^2\cos(2p-2t) - \tfrac{3}{8}\varkappa^2\cos(2p+2t),$$
$$\cos^2\psi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2p - \varkappa\cos(2p-t) + \varkappa\cos(2p+t) - 2\varkappa^2\cos 2p + \tfrac{13}{8}\varkappa^2\cos(2p-2t) + \tfrac{3}{8}\varkappa^2\cos(2p+2t),$$
$$\sin^3\psi = -\tfrac{3}{4}\sin p + \tfrac{1}{4}\sin 3p + \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(p-t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(p+t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p-t) + \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p+t) + \tfrac{3}{4}\varkappa^2\sin p - \tfrac{9}{4}\varkappa^2\sin 3p - \tfrac{27}{32}\varkappa^2\sin(p-2t) + \tfrac{3}{32}\varkappa^2\sin(p+2t) + \tfrac{51}{32}\varkappa^2\sin(3p-2t) + \tfrac{21}{32}\varkappa^2\sin(3p+2t),$$
$$\cos^3\psi = -\tfrac{3}{4}\cos p - \tfrac{1}{4}\cos 3p + \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(p-t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(p+t) + \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p-t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p+t) + \tfrac{3}{4}\varkappa^2\cos p + \tfrac{9}{4}\varkappa^2\cos 3p - \tfrac{27}{32}\varkappa^2\cos(p-2t) + \tfrac{3}{32}\varkappa^2\cos(p+2t) - \tfrac{51}{32}\varkappa^2\cos(3p-2t) - \tfrac{21}{32}\varkappa^2\cos(3p+2t),$$

$\sin^2\psi$

$$\sin^2\psi\cos\psi = -\tfrac{1}{4}\cos p + \tfrac{1}{4}\cos 3p + \tfrac{1}{4}\varkappa\cos(p-t)$$
$$-\tfrac{1}{4}\varkappa\cos(p+t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p-t) + \tfrac{3}{4}\varkappa\cos(3p+t)$$
$$+\tfrac{1}{4}\varkappa^2\cos p - \tfrac{9}{4}\varkappa^2\cos 3p - \tfrac{9}{32}\varkappa^2\cos(p-2t)$$
$$+\tfrac{1}{32}\varkappa^2\cos(p+2t) + \tfrac{51}{32}\varkappa^2\cos(3p-2t)$$
$$+\tfrac{21}{32}\varkappa^2\cos(3p+2t),$$

$$\sin\psi\cos^2\psi = -\tfrac{1}{4}\sin p - \tfrac{1}{4}\sin 3p + \tfrac{1}{4}\varkappa\sin(p-t)$$
$$-\tfrac{1}{4}\varkappa\sin(p+t) + \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p-t) - \tfrac{3}{4}\varkappa\sin(3p+t)$$
$$+\tfrac{1}{4}\varkappa^2\sin p + \tfrac{9}{4}\varkappa^2\sin 3p - \tfrac{9}{32}\varkappa^2\sin(p-2t)$$
$$+\tfrac{1}{32}\varkappa^2\sin(p+2t) - \tfrac{51}{32}\varkappa^2\sin(3p-2t)$$
$$-\tfrac{21}{32}\varkappa^2\sin(3p+2t).$$

§. 4. Hiſce valoribus ſubſtitutis, iisque tantummodo terminis adhibitis, qui quadratum eccentricitatis $\varkappa$ continent, quia ceteri in libro Euleriano evoluti jam reperiuntur, nanciſcimur

$$\frac{3\cos^2\psi-1}{\varkappa^2 u^3} = -6\cos 2p + \tfrac{89}{8}\cos(2p-2t) + \tfrac{9}{8}\cos(2p+2t)$$
$$+ 9\cos t\,[\cos(2p-t) - \cos(2p+t)]$$
$$+ \tfrac{3}{4}(1+3\cos 2t)(1+3\cos 2p),$$

ſive per angulos multiplos producta evolvendo,

$$\frac{3\cos^2\psi-1}{\varkappa^2 u^3} = +\tfrac{3}{4} - \tfrac{15}{4}\cos 2p + \tfrac{9}{4}\cos 2t + \tfrac{51}{4}\cos(2p-2t),$$

$$\frac{3\sin\psi\cos\psi}{\varkappa^2 u^3} = -\tfrac{15}{4}\sin 2p + \tfrac{51}{4}\sin(2p-2t),$$

$$\frac{3\cos\psi(5\cos^2\psi-3)}{2\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{9}{4}\cos p + \tfrac{45}{4}\cos 3p - \tfrac{477}{64}\cos(p-2t)$$
$$-\tfrac{99}{64}\cos(p+2t) - \tfrac{1905}{64}\cos(3p-2t) - \tfrac{15}{64}\cos(3p+2t),$$

$$\frac{3\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{3}{2}\sin p + \tfrac{45}{2}\sin 3p - \tfrac{159}{32}\sin(p-2t)$$
$$-\tfrac{33}{32}\sin(p+2t) - \tfrac{1905}{32}\sin(3p-2t) - \tfrac{15}{32}\sin(3p+2t),$$

$$\frac{3\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{2\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{3}{4}\cos p - \tfrac{45}{4}\cos 3p - \tfrac{159}{64}\cos(p-2t)$$
$$-\tfrac{33}{64}\cos(p+2t) + \tfrac{1905}{64}\cos(3p-2t) + \tfrac{15}{64}\cos(3p+2t),$$

3 sin² ψ

$$\frac{3\sin^2\psi-1}{\varkappa^2 u^3} = +\tfrac{3}{4}+\tfrac{15}{4}\cos 2p+\tfrac{9}{4}\cos 2t-\tfrac{51}{4}\cos(2p-2t),$$

$$\frac{3\sin\psi(5\sin^2\psi-3)}{2\varkappa^2 u^4} = -\tfrac{9}{4}\sin p-\tfrac{45}{4}\sin 3p-\tfrac{477}{64}\sin(p-2t)$$
$$-\tfrac{99}{64}\sin(p+2t)+\tfrac{1905}{64}\sin(3p-2t)+\tfrac{15}{64}\sin(3p+2t).$$

§. 5. Quum itaque aequationes Eulerianae fundamentales ſint ſequentes (pag. 41. 44. 56. 57.):

$$\text{I. } 0=\frac{\partial\partial X}{\partial t^2}-\frac{2(m+1)\partial Y}{\partial t}-(m+1)^2X+\frac{\lambda a^3 X}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}+\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D},$$

$$\text{II. } 0=\frac{\partial\partial Y}{\partial t^2}+\frac{2(m+1)\partial X}{\partial t}-(m+1)^2Y+\frac{\lambda a^3 Y}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}+A+B+C+D,$$

ſitque

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}=-\frac{X(3\cos^2\psi-1)}{u^3}+\frac{3Y\sin\psi\cos\psi}{u^3}+\frac{3X^2\cos\psi(5\cos^2\psi-3)}{2u^4}$$
$$-\frac{3XY\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{u^4}+\frac{3Y^2\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{2u^4}\ \text{(pag. 36.)},$$

$$A+B+C+D=\frac{3X\sin\psi\cos\psi}{u^3}-\frac{Y(3\sin^2\psi-1)}{u^3}-\frac{3X^2\sin\psi(5\cos^2\psi-1)}{2u^4}$$
$$+\frac{3XY\cos\psi(5\sin^2\psi-1)}{u^4}-\frac{3Y^2\sin\psi(5\sin^2\psi-3)}{2u^4}\ \text{(pag. 37.)};$$

et termini $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, A, B, C, D, nonniſi ad primam eccentricitatis $\varkappa$ dimenſionem ſint evolutae: iis adhuc termini $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, et E, F, ſunt addendi, quorum $\mathfrak{E}$, E, unicam dimenſionem coordinatarum X, Y, continent, $\mathfrak{F}$, F, autem duo dimenſiones, utrique vero quadratum eccentricitatis $\varkappa$; ac per §. 4. reperitur

$$\mathfrak{E}=-\tfrac{3}{4}\varkappa^2 X[1-5\cos 2p+3\cos 2t+17\cos(2p-2t)]$$
$$-\tfrac{3}{4}\varkappa^2 Y[5\sin 2p-17\sin(2p-2t)],$$

$$\mathfrak{F}=-\tfrac{3}{4}\varkappa^2 X^2[3\cos p-15\cos 3p+\tfrac{159}{16}\cos(p-2t)$$
$$+\tfrac{33}{16}\cos(p+2t)+\tfrac{635}{16}\cos(3p-2t)+\tfrac{5}{16}\cos(3p+2t)]$$
$$+\tfrac{3}{2}\varkappa^2 XY[\sin p-15\sin 3p+\tfrac{53}{16}\sin(p-2t)$$
$$+\tfrac{11}{16}\sin(p+2t)+\tfrac{635}{16}\sin(3p-2t)+\tfrac{5}{16}\sin(3p+2t)]$$
$$-\tfrac{3}{4}\varkappa^2 Y^2[\cos p+15\cos 3p+\tfrac{53}{16}\cos(p-2t)$$
$$+\tfrac{11}{16}\cos(p+2t)-\tfrac{635}{16}\cos(3p-2t)-\tfrac{5}{16}\cos(3p+2t)],$$

E =

$$\mathrm{E} = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2 \mathrm{X}\,[5 \sin 2p - 17 \sin(2p - 2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 \mathrm{Y}\,[1 + 5 \cos 2p + 3 \cos 2t - 17 \cos(2p - 2t)],$$

$$\mathrm{F} = + \tfrac{3}{4}\varkappa^2 \mathrm{X}^2\,[\sin p - 15 \sin 3p + \tfrac{53}{16} \sin(p - 2t)$$
$$+ \tfrac{11}{16} \sin(p + 2t) + \tfrac{635}{16} \sin(3p - 2t) + \tfrac{5}{16} \sin(3p + 2t)]$$
$$- \tfrac{3}{2}\varkappa^2 \mathrm{X}\,\mathrm{Y}\,[\cos p + 15 \cos 3p + \tfrac{53}{16} \cos(p - 2t)$$
$$+ \tfrac{11}{16} \cos(p + 2t) - \tfrac{635}{16} \cos(3p - 2t) - \tfrac{5}{16} \cos(3p + 2t)]$$
$$+ \tfrac{3}{4}\varkappa^2 \mathrm{Y}^2\,[3 \sin p + 15 \sin 3p + \tfrac{159}{16} \sin(p - 2t)$$
$$+ \tfrac{33}{16} \sin(p + 2t) - \tfrac{635}{16} \sin(3p - 2t) - \tfrac{5}{16} \sin(3p + 2t)].$$

§. 6. Introductis jam novis coordinatis x, y (§. 2.), pars primae aequationi per a diviſae addenda, neglecto producto $\varkappa^2 a$, quod quidem ad alius formae aequationem valde exiguam perduceret, fit

$$\frac{\mathfrak{E} + \mathfrak{F}}{a} = \frac{\mathfrak{E}}{a} = \mathfrak{G} = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2\,[1 - 5 \cos 2p + 3 \cos 2t + 17 \cos(2p - 2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 x\,[1 - 5 \cos 2p + 3 \cos 2t + 17 \cos(2p - 2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y\,[5 \sin 2p - 17 \sin(2p - 2t)],$$

$$\frac{\mathrm{E} + \mathrm{F}}{a} = \frac{\mathrm{E}}{a} = \mathrm{G} = -\tfrac{3}{4}\varkappa^2\,[5 \sin 2p - 17 \sin(2p - 2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 x\,[5 \sin 2p - 17 \sin(2p - 2t)]$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y\,[1 + 5 \cos 2p + 3 \cos 2t - 17 \cos(2p - 2t)].$$

Sicque habemus binas aequationes fundamentales:

$$\text{I.}\quad 0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} - \frac{2(m+1)\partial y}{\partial t} - (m+1)^2(1+x) + \frac{\lambda(1+x)}{[(1+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}}{a} + \mathfrak{G} \text{ (pag. 57.)},$$

$$\text{II.}\quad 0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{2(m+1)\partial x}{\partial t} - (m+1)^2 y + \frac{\lambda y}{[(1+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$+ \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}}{a} + \mathrm{G} \text{ (pag. 58.)}.$$

§. 7. Ex his aequationibus eliciendi ſunt termini incogniti a quadrato eccentricitatis $\varkappa$ pendentes, qui in ex-

pres-

preſsiones coordinatarum x, y, ingrediuntur, quosque appellemus $\varkappa^2 \mathfrak{B}$ et $\varkappa^2 V$. Ex analyſi calculi perturbationum ſatis conſtat, iſtos terminos cum terminis abſolutis, iisque qui a ſimplice eccentricitate $\varkappa$ pendent, ab Eulero $\mathfrak{O}$, O, et $\varkappa \mathfrak{U}$, $\varkappa U$, dictis, eſſe combinandos; ceteros autem terminos, ab eccentricitate vel inclinatione lunae pendentes cum terminis $\varkappa^2 \mathfrak{B}$, $\varkappa^2 V$, nullo modo cohaerere, neque in eorum determinationem influere, quoniam ex eorum combinatione novi termini a producto utriusque eccentricitatis pendentes orirentur, quas hic non conſideramus. Habemus itaque ſequentes expreſsiones

$$x = \mathfrak{O} + \varkappa \mathfrak{U} + \varkappa^2 \mathfrak{B} \text{ et } y = O + \varkappa U + \varkappa^2 V \text{ (pag. 168.)}.$$

Quare quoque in aequationibus (pag. 74. 75.), ubi quantitates $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. A, B etc. jam evolutae ſunt, nonniſi terminorum abſolutorum, eorumque qui ab eccentricitate $\varkappa$ pendent, rationem habere oportet; in prioribus autem ultra quartam coordinatarum x, y, dimenſionem progredi non opus eſt, quia valores literarum $\mathfrak{O}$, O, ad centeſimam unitatis partem vix perveniunt, ideoque tertiam earum poteſtatem omnino negligere licet. Adipiſcimur itaque binas aequationes fundamentales (pag 74. 75.):

$$\text{I. } 0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} - \frac{2(m+1)\partial y}{\partial t} - 3\lambda x - \tfrac{3}{2} x \cos 2p + \tfrac{3}{2} y \sin 2p$$
$$+ 3\lambda x^2 - \tfrac{3}{2}\lambda y^2 - 4\lambda x^3 + 6\lambda x y^2 + 5\lambda x^4 - 15\lambda x^2 y^2 + \tfrac{15}{8}\lambda y^4$$
$$+ \tfrac{3}{4}\varkappa (1 + x)(2\cos t + 7\cos(2p - t) - \cos(2p + t))$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa y (7 \sin(2p - t) - \sin(2p + t)) + \mathfrak{G},$$

$$\text{II. } 0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{2(m+1)\partial x}{\partial t} + \tfrac{3}{2} x \sin 2p + \tfrac{3}{2} y \cos 2p$$
$$- 3\lambda x y + 6\lambda x^2 y - \tfrac{3}{2}\lambda y^3 - 10\lambda x^3 y + \tfrac{15}{2}\lambda x y^3$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa (1 + x)(7 \sin(2p - t) - \sin(2p + t))$$
$$+ \tfrac{3}{4}\varkappa y (2\cos t - 7\cos(2p - t) + \cos(2p + t)) + G,$$

(conf. §. 6).

§. 8.

§. 8. Methodus Euleri, aequationes iſtas ſolvendi, in eo conſiſtit, quod termini utriusque aequationis *principales*, h. e. qui neque angulum neque altiores coordinatarum poteſtates continent, a ceteris annexis ſeparari vel prorſus omitti poſſunt, modo ſequens regula integrandi obſervetur. Nuncupatis nempe terminis annexis $\mathfrak{Z}$ et Z, ut binae aequationes ſint

$$o = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} - \frac{2(m+1)\partial y}{\partial t} - 3\lambda x + \mathfrak{Z} \quad \text{et}$$
$$o = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{2(m+1)\partial x}{\partial t} + Z,$$

ſupponamus, quantitates $\mathfrak{Z}$ et Z evolutas praebuiſſe terminos $\mathfrak{M}\cos\omega$ et $M\sin\omega$, ſitque $\partial\omega = \mu\partial t$: neceſſario inde naſcentur in expreſſione coordinatarum termini ejusdem formae, puta $x = \mathfrak{N}\cos\omega$ et $y = N\sin\omega$, quibus ſubſtitutis, binae aequationes hanc induunt formam

$$o = -\mathfrak{N}\mu^2 - 2(m+1)N\mu - 3\lambda\mathfrak{N} + \mathfrak{M} \text{ et}$$
$$o = -N\mu^2 - 2(m+1)\mathfrak{N}\mu + M,$$

unde ob $\lambda = (m+1)^2 + \frac{1}{2}$ (§. 2.), coefficientes $\mathfrak{N}$, N, ita determinantur:

$$\mathfrak{N} = \frac{\frac{2(m+1)}{\mu}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - \mu^2} \text{ et } N = \frac{M}{\mu^2} - \frac{2(m+1)}{\mu}\mathfrak{N}.$$

Quodſi evolutio termini $\mathfrak{Z}$ perducit ad terminum conſtantem $\mathfrak{M}$, cui ſimilis in Z non reperitur, habemus $\mathfrak{M}\cos\omega = \mathfrak{M}$, $M\sin\omega = o$, unde ſequitur $\omega = o$, $\mu = o$, $M = o$, ideoque $o = -3\lambda\mathfrak{N} + \mathfrak{M}$, h. e. $\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{M}}{3\lambda}$ et $N = o$ (Cap. XII.).

§. 9. Suppoſitis itaque hiſce formulis pro eruendis coefficientibus $\mathfrak{N}$, N, e terminis $\mathfrak{M}$, M ſimilibus, terminis principalibus non amplius opus eſt, unde loco $\mathfrak{G}$, G, earum valoribus ſubſtitutis (§. 6.), aequationes noſtrae fiunt (§. 7.)

I.

$$\text{I.}\quad 0 = -\tfrac{3}{2}x\cos 2p + \tfrac{3}{2}y\sin 2p + 3\lambda x^2 - \tfrac{3}{2}\lambda y^2 - 4\lambda x^3$$
$$+ 6\lambda xy^2 + 5\lambda x^4 - 15\lambda x^2y^2 + \tfrac{15}{8}\lambda y^4$$
$$+ \tfrac{3}{4}\varkappa(1+x)\,(2\cos t + 7\cos(2p-t) - \cos(2p+t))$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa y\,(7\sin(2p-t) - \sin(2p+t))$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2(1+x)\,(1 - 5\cos 2p + 3\cos 2t + 17\cos(2p-2t))$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y\,(5\sin 2p - 17\sin(2p-2t));$$

$$\text{II.}\quad 0 = +\tfrac{3}{2}x\sin 2p + \tfrac{3}{2}y\cos 2p - 3\lambda xy$$
$$+ 6\lambda x^2y - \tfrac{3}{2}\lambda y^3 - 10\lambda x^3y + \tfrac{15}{2}\lambda xy^3$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa(1+x)\,(7\sin(2p-t) - \sin(2p+t))$$
$$+ \tfrac{3}{4}\varkappa y\,(2\cos t - 7\cos(2p-t) + \cos(2p+t))$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2(1+x)\,(5\sin 2p - 17\sin(2p-2t))$$
$$- \tfrac{3}{4}\varkappa^2 y\,(1 + 5\cos 2p + 3\cos 2t - 17\cos(2p-2t)).$$

§. 10. Ponamus jam compendii cauſa

$$-\tfrac{3}{2}\cos 2p + 6\lambda\mathfrak{X} - 12\lambda\mathfrak{X}^2 + 6\lambda O^2 = \mathfrak{A},$$
$$+\tfrac{3}{2}\sin 2p - 3\lambda O + 12\lambda\mathfrak{X}O = \mathfrak{B},$$
$$+3\lambda - 12\lambda\mathfrak{X} + 30\lambda\mathfrak{X}^2 - 15\lambda O^2 = \mathfrak{C},$$
$$+12\lambda O - 60\lambda\mathfrak{X}O = \mathfrak{D},$$
$$-\tfrac{3}{2}\lambda + 6\lambda\mathfrak{X} - 15\lambda\mathfrak{X}^2 + {}^{45}\lambda O^2 = \mathfrak{E},$$
$$+\tfrac{3}{2}\cos t + \tfrac{21}{4}\cos(2p-t) - \tfrac{3}{4}\cos(2p+t) = \mathfrak{F},$$
$$+\tfrac{3}{4}\sin(2p+t) - \tfrac{21}{4}\sin(2p-t) = \mathfrak{G},$$
$$+\tfrac{3}{4} - \tfrac{15}{4}\cos 2p + \tfrac{9}{4}\cos 2t + \tfrac{51}{4}\cos(2p-2t) = \mathfrak{H},$$
$$+\tfrac{15}{4}\sin 2p - \tfrac{51}{4}\sin(2p-2t) = \mathfrak{K},$$
$$+\tfrac{3}{2}\cos 2p - 3\lambda\mathfrak{X} + 6\lambda\mathfrak{X}^2 - \tfrac{9}{2}\lambda O^2 = B,$$
$$+\tfrac{3}{2}\cos t - \tfrac{21}{4}\cos(2p-t) + \tfrac{3}{4}\cos(2p+t) = G,$$
$$+\tfrac{3}{4} + \tfrac{15}{4}\cos 2p + \tfrac{9}{4}\cos 2t - \tfrac{51}{4}\cos(2p-2t) = H.$$

Deinde in aequationibus I, II, (§. 9.) ſubſtitutis valoribus (§. 7.) $x = \mathfrak{X} + \varkappa\,\mathfrak{U} + \varkappa^2\mathfrak{V}$, $y = O + \varkappa U + \varkappa^2 V$, iisque tan-

tum-

ſummodo terminis aſſervatis, qui $\varkappa^2$ continent, ſequentes aequationes, diviſione per $\varkappa^2$ inſtituta nanciſcemur:

I. $0 = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}V + \mathfrak{C}\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{U}U + \mathfrak{E}U^2 + \mathfrak{F}\mathfrak{U} + \mathfrak{G}U - \mathfrak{H}(1+\mathfrak{O}) - \mathfrak{K}O,$

II. $0 = \mathfrak{B}\mathfrak{B} + BV + \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{U}^2 + 2\mathfrak{E}\mathfrak{U}U - \tfrac{3}{8}\mathfrak{D}U^2 + \mathfrak{G}\mathfrak{U} + GU - \mathfrak{K}(1+\mathfrak{O}) - HO;$

e quibus ope cognitarum λ, $\mathfrak{O}$, O, $\mathfrak{U}$, U, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. B, etc. binae incognitae $\mathfrak{B}$, V, determinandae ſunt: quem in finem quantitates datas numeris abſolutis exprimere jam oportet.

§. 11. Ab Eulero jam computatae fuerunt quantitates ſequentes:

$\lambda = 179,228928$ (pag. 73.),

$\mathfrak{O} = +0,000024 - 0,00718 \cos 2p + 0,000006 \cos 4p$ (pag. 139.),

$O = +0,0102117 \sin 2p + 0,0000057 \sin 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{A} = +0,0264388 - 9,2212908 \cos 2p - 0,1050568 \cos 4p$ (pag. 140. conf. pag. 124.),

$\mathfrak{B} = -3,9906964 \sin 2p - 0,0819104 \sin 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{C} = +537,6335924 + 15,4425816 \cos 2p + 0,2658681 \cos 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{D} = +21,9627856 \sin 2p + 0,4064872 \sin 4p$ (ibid.),

$\mathfrak{E} = -268,7817528 - 7,72129 \cos 2p - 0,1679774 \cos 4p$ (ib.),

$B = -0,0272367 + 5,3606454 \cos 2p + 0,0665457 \cos 4p$ (ib.).

Praeterea ſequentes ſupputavimus quantitates:

$\mathfrak{H}(1+\mathfrak{O}) = +0,76348 - 3,755486 \cos 2p + 0,013467 \cos 4p$
$- 0,00001 \cos 6p + 2,2042815 \cos 2t$
$+ 12,742228 \cos(2p - 2t) - 0,008042 \cos(2p + 2t)$
$- 0,045766 \cos(4p - 2t) + 0,000006 \cos(4p + 2t)$
$+ 0,000036 \cos(6p - 2t)$,

$\mathfrak{K}O =$

$$\mathfrak{K}\mathfrak{O} = +0,0191775 + 0,0000112 \cos 2p - 0,0191775 \cos 4p$$
$$- 0,0000112 \cos 6p - 0,0652035 \cos 2t$$
$$- 0,0000382 \cos (2p + 2t) + 0,0652035 \cos (4p - 2t)$$
$$+ 0,0000382 \cos (6p - 2t),$$

$$\mathfrak{K}(1 + \mathfrak{O}) = + 3,75008 \sin 2p - 0,0134625 \sin 4p + 0,00001 \sin 6p$$
$$- 0,0457725 \sin 2t - 12,750306 \sin (2p - 2t)$$
$$+ 0,000036 \sin (2p + 2t) + 0,0457725 \sin (4p - 2t)$$
$$- 0,000036 \sin (6p - 2t),$$

$$\mathfrak{H}\mathfrak{O} = + 0,0076822 \sin 2p + 0,019182 \sin 4p + 0,0000112 \sin 6p$$
$$- 0,0652035 \sin 2t + 0,0115065 \sin (2p - 2t)$$
$$+ 0,0114683 \sin (2p + 2t) - 0,0651968 \sin (4p - 2t)$$
$$+ 0,0000067 \sin (4p + 2t) - 0,0000382 \sin (6p - 2t).$$

§. 12. Aſſumſimus praeterea e libro Euleriano (pag. 323.)

$$\mathfrak{U} = - 0,006829 \cos t + 0,029397 \cos (2p - t)$$
$$- 0,003452 \cos (2p + t) + 0,000046 \cos (4p - t)$$
$$- 0,000004 \cos (4p + t),$$

$$U = + 0,190587 \sin t - 0,043312 \sin (2p - t) + 0,005525 \sin (2p + t)$$
$$- 0,000143 \sin (4p - t) + 0,000005 \sin (4p + t);$$

unde ſequentes quantitates computavimus

$$\mathfrak{U}^2 = + 0,0004613 - 0,0000855 \cos 2p - 0,0000507 \cos 4p$$
$$- 0,0000274 \cos 2t - 0,0001004 \cos (2p - 2t)$$
$$+ 0,0000148 \cos (2p + 2t) + 0,0004321 \cos (4p - 2t)$$
$$+ 0,0000059 \cos (4p + 2t),$$

$$\mathfrak{U}U = + 0,0032572 \sin 2p + 0,0001603 \sin 4p - 0,0006443 \sin 2t$$
$$- 0,0026534 \sin (2p - 2t) - 0,0003478 \sin (2p + 2t)$$
$$- 0,0006410 \sin (4p - 2t) - 0,0000095 \sin (4p + 2t),$$

$U^2 =$

$$U^2 = +0{,}0191149 + 0{,}0046569 \cos 2p + 0{,}0001333 \cos 4p$$
$$- 0{,}0182813 \cos 2t - 0{,}0041273 \cos(2p - 2t)$$
$$- 0{,}0005265 \cos(2p + 2t) - 0{,}0009516 \cos(4p - 2t)$$
$$- 0{,}0000152 \cos(4p + 2t),$$

$$\mathfrak{E}U^2 = +0{,}2473435 - 0{,}0392358 \cos 2p - 0{,}0278166 \cos 4p$$
$$- 0{,}0153340 \cos 2t - 0{,}0508408 \cos(2p - 2t)$$
$$+ 0{,}0077989 \cos(2p + 2t) + 0{,}2315321 \cos(4p - 2t)$$
$$+ 0{,}0033179 \cos(4p + 2t),$$

$$\mathfrak{D}UU = +0{,}0358012 + 0{,}0024223 \cos 2p - 0{,}0357686 \cos 4p$$
$$- 0{,}0017603 \cos 6p - 0{,}0330895 \cos 2t$$
$$- 0{,}0141850 \cos(2p - 2t) + 0{,}0064313 \cos(2p + 2t)$$
$$+ 0{,}0290070 \cos(4p - 2t) + 0{,}0039506 \cos(4p + 2t),$$

$$\mathfrak{E}U^2 = -5{,}1557245 - 1{,}4001866 \cos 2p - 0{,}0570181 \cos 4p$$
$$- 0{,}0009057 \cos 6p + 4{,}9317261 \cos 2t$$
$$+ 1{,}1836522 \cos(2p - 2t) + 0{,}2124958 \cos(2p + 2t)$$
$$+ 0{,}2732422 \cos(4p - 2t) + 0{,}0076704 \cos(4p + 2t),$$

$$\mathfrak{F}U = +0{,}073340 + 0{,}004216 \cos 2p - 0{,}020054 \cos 4p$$
$$- 0{,}025207 \cos 2t + 0{,}004104 \cos(2p - 2t)$$
$$- 0{,}000039 \cos(2p + 2t) + 0{,}077202 \cos(4p - 2t)$$
$$+ 0{,}001292 \cos(4p + 2t),$$

$$\mathfrak{G}U = +0{,}015487 \sin 2p + 0{,}020085 \sin 4p + 0{,}001962 \sin 2t$$
$$+ 0{,}017908 \sin(2p - 2t) - 0{,}002571 \sin(2p + 2t)$$
$$- 0{,}077167 \sin(4p - 2t) - 0{,}001294 \sin(4p + 2t),$$

$\mathfrak{G}\underline{U} =$

$$\mathfrak{G}U = +0{,}115766 + 0{,}572138 \cos 2p + 0{,}030745 \cos 4p$$
$$+ 0{,}000054 \cos 6p - 0{,}030758 \cos 2t$$
$$- 0{,}500344 \cos(2p - 2t) - 0{,}071470 \cos(2p + 2t)$$
$$- 0{,}113694 \cos(4p - 2t) - 0{,}002072 \cos(4p + 2t),$$

$$GU = -0{,}599724 \sin 2p - 0{,}030849 \sin 4p + 0{,}144679 \sin 2t$$
$$+ 0{,}467753 \sin(2p - 2t) + 0{,}075601 \sin(2p + 2t)$$
$$+ 0{,}113587 \sin(4p - 2t) + 0{,}002076 \sin(4p + 2t),$$

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{U}^2 = +0{,}0053343 \sin 2p - 0{,}0003757 \sin 4p - 0{,}0002873 \sin 6p$$
$$- 0{,}0005893 \sin 2t - 0{,}0025216 \sin(2p - 2t)$$
$$- 0{,}0022874 \sin(2p + 2t) - 0{,}0005539 \sin(4p - 2t)$$
$$+ 0{,}0000787 \sin(4p + 2t),$$

$$2\mathfrak{E}\mathfrak{U}U = -1{,}7516434 \sin 2p - 0{,}1113212 \sin 4p - 0{,}0017836 \sin 6p$$
$$+ 0{,}3284438 \sin 2t + 1{,}4262868 \sin(2p - 2t)$$
$$+ 0{,}1915673 \sin(2p + 2t) + 0{,}3649576 \sin(4p - 2t)$$
$$+ 0{,}0079200 \sin(4p + 2t),$$

$$\tfrac{3}{8}\mathfrak{D}U^2 = +0{,}1572371 \sin 2p + 0{,}0220909 \sin 4p + 0{,}0009038 \sin 6p$$
$$- 0{,}0148997 \sin 2t - 0{,}0714042 \sin(2p - 2t)$$
$$- 0{,}0755346 \sin(2p + 2t) - 0{,}0183898 \sin(4p - 2t)$$
$$- 0{,}0035614 \sin(4p + 2t).$$

§. 13. Hinc ſingulis terminis homogeneis in unum collectis, ac poſito brevitatis cauſa

$5{,}4661313 = b$;	$2{,}8948287 = c$;	$0{,}1042018 = d$;
$0{,}0025908 = e$;	$2{,}6882596 = f$;	$12{,}1198421 = g$;
$0{,}1632972 = h$;	$0{,}4778518 = k$;	$0{,}0141529 = l$;
$6{,}2455454 = \mathfrak{b}$;	$0{,}1502713 = \mathfrak{c}$;	$0{,}0029959 = \mathfrak{d}$;
$0{,}6003712 = \mathfrak{e}$;	$14{,}7196300 = \mathfrak{f}$;	$0{,}3263402 = \mathfrak{g}$;
$0{,}4386378 = \mathfrak{h}$;	$0{,}0123354 = \mathfrak{k}$;	

aequa-

aequationes ſuperiores (§. 10.) in ſequentes transformabuntur:

$$\text{I.}\quad o = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}V - b + c\cos 2p - d\cos 4p - e\cos 6p$$
$$+ f\cos 2t - g\cos(2p - 2t) + h\cos(2p + 2t)$$
$$+ k\cos(4p - 2t) + l\cos(4p + 2t);$$

$$\text{II.}\quad o = \mathfrak{B}\mathfrak{B} + BV - \mathfrak{b}\sin 2p - \mathfrak{c}\sin 4p - \mathfrak{d}\sin 6p$$
$$+ \mathfrak{e}\sin 2t + \mathfrak{f}\sin(2p - 2t) + \mathfrak{g}\sin(2p + 2t)$$
$$+ \mathfrak{h}\sin(4p - 2t) + \mathfrak{k}\sin(4p + 2t).$$

§. 14. Quo termini incogniti $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}V$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{B} + BV$ cum ceteris juncti evaneſcere poſſint, neceſſario ſimilem formam, h. e. eosdem angulos pro argumentis habere debent: quapropter ſequentes formas aſſumere oportet:

$$\mathfrak{B} = \alpha + \beta\cos 2p + \gamma\cos 4p + \delta\cos 2t + \varepsilon\cos(2p - 2t)$$
$$+ \zeta\cos(2p + 2t) + \eta\cos(4p - 2t) + \vartheta\cos(4p + 2t),$$
$$V = \nu\sin 2p + \pi\sin 4p + \varrho\sin 2t + \sigma\sin(2p - 2t)$$
$$+ \tau\sin(2p + 2t) + \xi\sin(4p - 2t) + \psi\sin(4p + 2t).$$

Unde, valoribus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, B (§. 11.) ſubſtitutis, et compendii cauſa poſitis numeris

$0,0264388 = (1)$; $4,6106454 = (2)$; $0,0525284 = (3)$;
$1,9953482 = (4)$; $0,0409552 = (5)$; $9,2212908 = (6)$;
$0,1050568 = (7)$; $3,9906964 = (8)$; $0,0272367 = (9)$;
$2,6803227 = (10)$; $0,0332728 = (11)$; $0,0819104 = (12)$;

reperitur

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}V = +\alpha(1) - \beta(2) - \gamma(3) - \nu(4) - \pi(5)$$
$$+ [-\alpha(6) + \beta(1) - \beta(3) - \gamma(2) - \nu(5) - \pi(4)]\cos 2p$$
$$+ [-\alpha(7) - \beta(2) + \gamma(1) + \nu(4)]\cos 4p$$

$$+ [-\beta(3) - \gamma(2) + \nu(5) + \pi(4)] \cos 6p$$
$$+ [\delta(1) - \varepsilon(2) - \zeta(2) - \eta(3) - \vartheta(3) - \sigma(4) - \tau(4)$$
$$- \xi(5) - \psi(5)] \cos 2t$$
$$+ [-\delta(2) + \varepsilon(1) - \zeta(3) - \eta(2) - \varrho(4) - \tau(5) - \xi(4)] \cos(2p - 2t)$$
$$+ [-\delta(2) - \varepsilon(3) + \zeta(1) - \vartheta(2) + \varrho(4) - \sigma(5) - \psi(4)] \cos(2p + 2t)$$
$$+ [-\delta(3) - \varepsilon(2) + \eta(1) - \varrho(5) + \sigma(4)] \cos(4p - 2t)$$
$$+ [-\delta(3) - \zeta(2) + \vartheta(1) + \varrho(5) + \tau(4)] \cos(4p + 2t);$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{V} + BV = + [-\alpha(8) - \beta(5) + \gamma(4) - \nu(9) - \nu(11) + \pi(10)] \sin 2p$$
$$+ [-\alpha(12) - \beta(4) + \nu(10) - \pi(9)] \sin 4p$$
$$+ [-\beta(5) - \gamma(4) + \nu(11) + \pi(10)] \sin 6p$$
$$+ [-\varepsilon(4) + \zeta(4) - \eta(5) + \vartheta(5) - \varrho(9) - \sigma(10) + \tau(10)$$
$$- \xi(11) + \psi(11)] \sin 2t$$
$$+ [-\delta(4) - \zeta(5) - \varrho(10) - \sigma(9) - \tau(11) + \xi(10)] \sin(2p - 2t)$$
$$+ [-\delta(4) - \varepsilon(5) + \varrho(10) - \sigma(11) - \tau(9) + \psi(10)] \sin(2p + 2t)$$
$$+ [-\delta(5) - \varepsilon(4) + \eta(4) - \varrho(11) + \sigma(10) - \xi(9)] \sin(4p - 2t)$$
$$+ [-\delta(5) - \zeta(4) + \vartheta(4) + \varrho(11) + \tau(10) - \psi(9)] \sin(4p + 2t).$$

Hiſce valoribus in aequationibus (§. 13.) ſubſtitutis, omnes earum coefficientes determinati ſunt, quamobrem nihil jam reſtat, niſi ut quantitatum incognitarum α, β, etc. valores numerici computentur.

SUP-

SUPPLEMENTI AD THEORIAM LUNAE EULERIANAM CONTINUATIO.

AUTORE

F. T. SCHUBERT.

Conventui exhibita d. 30 Jan. 1800.

§. 15. In prima diſſertatione de hoc objecto, Academiae a me praelecta, aequationes, quarum ope coefficientes incogniti novae aequationis lunae determinandi ſunt, plenarie jam fuerant evolutae. Forma harum aequationum docet, terminos qui nonniſi angulum p continent, h. e. $\alpha, \beta, \gamma, \nu, \pi$, ſeorſim tractari poſſe, non minus quam ceteros, $\delta, \varepsilon, \varrho, \sigma$, etc quorum argumenta angulus etiam t ingreditur. Si jam valores $\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}V$ et $\mathfrak{B}\mathfrak{B} + BV$ (§. 14.) in aequationibus I, II (§. 13.), ſubſtituuntur, terminus primae aequationis conſtans, quem ſupra (§. 8.) $\mathfrak{M}$ appellavimus, eſt

$$\mathfrak{M} = +\alpha(1) - \beta(2) - \gamma(3) - \nu(4) - \pi(5) - b;$$

unde ſequitur, terminum conſtantem abſciſſae x, quem ſupra (§. 8.) $\mathfrak{N}$ appellavimus, quemque hic (§. 14.) poſuimus $= \alpha$, eſſe $= \frac{\mathfrak{M}}{3\lambda}$ (§. 8.), h. e. $\alpha = \frac{\mathfrak{M}}{3\lambda}$, unde naſcitur aequatio:

$$1)\quad 0 = +b + 3\lambda\alpha - \alpha(1) + \beta(2) + \gamma(3) + \nu(4) + \pi(5).$$

§. 16. Eodem modo reperitur coefficiens cos $2p$ in aequatione I (§. 13.) ſive

$$\mathfrak{M} = -\alpha(6) + \beta(1) - \beta(3) - \gamma(2) - \nu(5) - \pi(4) + c,$$

et coefficiens sin $2p$ in aequatione II, ſive

$$M = -\alpha(8) - \beta(5) + \gamma(4) - \nu(9) - \nu(11) + \pi(10) - \mathfrak{b}.$$

Quare quum hic ſit (§. 8.) $\omega = 2p$, ideoque $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \mu = 2m$ (§. 2.), ſequitur, coefficientes cos $2p$ et sin $2p$ in coordinatis x et y, quos ſupra $\mathfrak{N}$, N, hic autem β, ν, nuncupavimus (§. 8. 14.), eſſe

$$\mathfrak{N} = \beta = \frac{\frac{m+1}{m}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4m^2} \text{ et } N = \nu = \frac{M}{4m^2} - \frac{m+1}{m}\beta.$$

Nanciſcimur itaque has binas aequationes:

$$\beta m(\lambda - 2 - 4m^2) = M + m(M - \mathfrak{M}) \text{ et}$$

$$4m^2\nu = M - 4\beta m(m+1), \text{ h. e.}$$

2) $0 = \mathfrak{b} + \alpha(8) + \beta(5) - \gamma(4) + \nu(9) + \nu(11) - \pi(10)$
$+ m\Big[c + \mathfrak{b} + \alpha((8)-(6)) + \beta((1)-(3)+(5)) - \gamma((2)+(4))$
$+ \nu((9)+(11)-(5)) - \pi((4)+(10))\Big] + \beta m(\lambda - 2 - 4m^2)$,

3) $0 = +\mathfrak{b} + \alpha(8) + \beta\,[(5) + 4m(m+1)] - \gamma(4)$
$+ \nu[(9) + (11) + 4m^2] - \pi(10)$.

§. 17. Eſt denique coefficiens cos $4p$ in aequatione I, ſeu

$$\mathfrak{M} = -\alpha(7) - \beta(2) + \gamma(1) + \nu(4) - d,$$

et coefficiens sin $4p$ in aequatione II, vel

$$M = -\alpha(12) - \beta(4) + \nu(10) - \pi(9) - \mathfrak{c}.$$

Quapropter quum hocce caſu ſit angulus $\omega = 4p$, ideoque $\mu = 4m$, coefficientes cos $4p$ et sin $4p$ in coordinatis x et

x et y, quos ſupra $\mathfrak{N}$, N, hic autem, γ, π, vocavimus, ita determinantur (§. 8.),

$$\gamma = \mathfrak{N} = \frac{\frac{m+1}{2m}\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 16m^2} \text{ et } \pi = \mathrm{N} = \frac{\mathrm{M}}{16\,m^2} - \frac{m+1}{2m}\gamma:$$

unde reſultant aequationes

$$0 = 2\gamma m(\lambda - 2 - 16\,m^2) - \mathrm{M} + m(2\mathfrak{M} - \mathrm{M}), \text{ et}$$
$$0 = 16\,\pi m^2 - \mathrm{M} + 8\,\gamma m\,(m+1), \text{ h. e.}$$

$$4)\ 0 = +\mathfrak{c} + \alpha(12) + \beta(4) - \nu(10) + \pi(9)$$
$$+ m[\mathfrak{c} - 2d + \alpha((12) - 2(7)) + \beta((4) - 2(2))$$
$$+ 2\gamma((1) + \lambda - 2 - 16m^2) + \nu(2(4) - (10)) + \pi(9)],$$
$$5)\ 0 = +\mathfrak{c} + \alpha(12) + \beta(4) + 8\gamma m(m+1) - \nu(10) + \pi[(9) + 16m^2].$$

§. 18. Harum quinque aequationum ope quo determinentur quinque incognitae α, β, γ, ν, π, in iis loco λ, m (§. 2.), b, c, d, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (§. 13.), ceterorumque coefficientium (§. 14.), valores eorum abſolutos ſubſtituere oportet, unde ſequentes oriuntur aequationes:

$$1)\ 0 = +5{,}4661313 + \alpha . 537{,}660345 + \beta . 4{,}6106454 -$$
$$+ \nu . 1{,}9953482 + \gamma . 0{,}0525284 + \pi . 0{,}0409552;$$

$$2)\ 0 = +119{,}302118 - \alpha . 60{,}706118 - \beta . 5376{,}9389$$
$$+ \nu . 0{,}3023751 - \gamma . 83{,}704848 - \pi . 60{,}513323;$$

$$3)\ 0 = +6{,}2455454 + \alpha . 3{,}9906964 + \beta . 661{,}47726$$
$$+ \nu . 612{,}02135 - \gamma . 1{,}9953482 - \pi . 2{,}6803227;$$

$$4)\ 0 = +0{,}5687625 + \alpha . 1{,}5038251 + \beta . 87{,}381752$$
$$- \nu . 13{,}527584 + \gamma . 56169{,}436 - \pi . 0{,}3641252;$$

$$5)\ 0 = +0{,}1502713 + \alpha . 0{,}0819104 + \beta . 1{,}9953482$$
$$- \nu . 2{,}6803227 + \gamma . 1322{,}8727 + \pi . 2447{,}8706.$$

§. 19.

§. 19. Poſtrema aequatio dat

$$\pi = -0,0000614 - \alpha . 0,0000335 - \beta . 0,0008151 + \nu . 0,0010950 - \gamma . 0,5404177;$$

quo valore ſubſtituto quarta aequatio praebet

$$\gamma = -0,0000101 - \alpha . 0,0000268 - \beta . 0,0015557 + \nu . 0,0002408.$$

Hinc e tertia aequatione ſit

$$\nu = -0,0102051 - \alpha . 0,0065207 - \beta . 1,0808180;$$

unde e ſecunda aequatione reperitur

$$\beta = +0,0221876 - \alpha . 0,0112895;$$

et prima praebet

$$\alpha = -0,0102307.$$

Regrediendo jam a prima inde ad quintam aequationem, valoresque modo repertos in aequatione conſequente ſubſtituendo, ſequentes nanciſcimur valores abſolutos:

$$\alpha = -0,0102307; \quad \beta = +0,0223031;$$

$$\nu = -0,0342440; \quad \gamma = -0,0000527; \quad \pi = -0,0000883.$$

§. 20. Modo prorſus ſimili coefficientes δ, ϱ, ε, σ, etc. computantur. Eſt nempe (§. 13. 14.) coefficiens cos $2t$ in aequatione I, ſive

$$\mathfrak{M} = +\delta(1) - \varepsilon(2) - \zeta(2) - \eta(3) - \vartheta(3) - \sigma(4) - \tau(4) - \xi(5) - \psi(5) + f,$$

et coefficiens sin $2t$ in aequatione II, ſive

$$M = -\varepsilon(4) + \zeta(4) - \eta(5) + \vartheta(5) - \varrho(9) - \sigma(10) + \tau(10) - \xi(11) + \psi(11) + e,$$

eſt

eſt porro $\omega = 2t$, $\frac{\partial\omega}{\partial t} = \mu = 2$; unde fit (§. 8.) coefficiens cos $2t$ in abſciſſa x, ſeu

$$\mathfrak{N} = \delta = \frac{(m+1)M - \mathfrak{M}}{\lambda - 6},$$

et coefficiens sin $2t$ in ordinata y, h. e.

$$N = \varrho = M - (m+1)\delta.$$

Unde ſequentes naſcuntur aequationes

1) $0 = +f - (m+1)e + \delta[\lambda - 6 + (1)] + \varepsilon[(m+1)(4) - (2)]$
$- \zeta[(m+1)(4) + (2)] + \eta[(m+1)(5) - (3)]$
$- \vartheta[(m+1)(5) + (3)] + \varrho(m+1)(9) + \sigma[(m+1)(10) - (4)]$
$- \tau[(m+1)(10) + (4)] + \xi[(m+1)(11) - (5)]$
$- \psi[(m+1)(11) + (5)]$;

2) $0 = -e + 4\delta(m+1) + \varepsilon(4) - \zeta(4) + \eta(5) - \vartheta(5)$
$+ \varrho[4 + (9)] + \sigma(10) - \tau(10) + \xi(11) - \psi(11)$.

§. 21. Coefficiens cos $(2p - 2t)$ eſt

$$\mathfrak{M} = -\delta(2) + \varepsilon(1) - \zeta(3) - \eta(2) - \varrho(4) - \tau(5) - \xi(4) - g,$$

et coefficiens sin $(2p - 2t)$ vel

$$M = -\delta(4) - \zeta(5) - \varrho(10) - \sigma(9) - \tau(11) + \xi(10) + f.$$

Praeterea eſt $\omega = 2p - 2t$, ideoque $\mu = \frac{2\partial p}{\partial t} - 2 = 2(m-1)$, unde coefficientes ejusdem argumenti in coordinatis x, y, (§. 8.) ſequentes nanciſcuntur valores:

$$\mathfrak{N} = \varepsilon = \frac{\frac{m+1}{m-1}M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4(m-1)^2} \text{ et } N = \sigma = \frac{M}{4(m-1)^2} - \frac{m+1}{m-1}\varepsilon.$$

Binae hinc oriuntur aequationes

3) $0 = +g(m-1) + f(m+1) + \delta[(m-1)(2) - (m+1)(4)]$
$+ \varepsilon(m-1)[4(m-1) + 2 - \lambda - (1)] + \zeta[(m-1)(3) - (m+1)(5)]$
$+ \eta(m-1)(2) + \varrho[(m-1)(4) - (m+1)(10)] - \sigma(m+1)(9)$
$+ \tau[(m-1)(5) - (m+1)(11)] + \xi[(m-1)(4) + (m+1)(10)]$;

4) $0 =$

4) $o = + f - \delta(4) + 4(m+1)(m-1)\,\varepsilon - \zeta(5) - \varrho(10)$
$- \sigma[(9) + 4(m-1)^2] - \tau(11) + \xi(10).$

§. 22. Coeſſiciens $\cos(2p + 2t)$ eſt

$$\mathfrak{M} = -\delta(2) - \varepsilon(3) + \zeta(1) - \vartheta(2) + \varrho(4) - \sigma(5) - \psi(4) + h,$$

et coeſſiciens $\sin(2p + 2t)$ ſive

$$M = -\delta(4) - \varepsilon(5) + \varrho(10) - \sigma(11) - \tau(9) + \psi(10) + \mathfrak{g},$$

atque $\mu = 2(m+1)$; proinde coeſſicientes $\cos(2p+2t)$ et $\sin(2p+2t)$ in coordinatis x, y, h. e.

$$\mathfrak{N} = \zeta = \frac{M - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4(m+1)^2} \text{ et } N = \tau = \frac{M}{4(m+1)^2} - \zeta.$$

Unde ſequentes reſultant aequationes:

5) $o = + \mathfrak{g} - h + \delta[(2) - (4)] + \varepsilon[(3) - (5)]$
$+ \zeta[4(m+1)^2 + 2 - \lambda - (1)] + \vartheta(2) + \varrho[(10) - (4)]$
$+ \sigma[(5) - (11)] - \tau(9) + \psi[(10) + (4)];$

6) $o = + \mathfrak{g} - \delta(4) - \varepsilon(5) - 4\zeta(m+1)^2 + \varrho(10) - \sigma(11)$
$- \tau[(9) + 4(m+1)^2] + \psi(10).$

§. 23. Coeſſiciens $\cos(4p - 2t)$ eſt

$$\mathfrak{M} = -\delta(3) - \varepsilon(2) + \eta(1) - \varrho(5) + \sigma(4) + k,$$

et coeſſiciens $\sin(4p - 2t)$ ſeu

$$M = -\delta(5) - \varepsilon(4) + \eta(4) - \varrho(11) + \sigma(10) - \xi(9) + \mathfrak{h}.$$

Quum praeterea ſit $\mu = 2(2m - 1)$, coeſſicientes hujus anguli in coordinatis x, y, ſequentibus definiuntur formulis

$$\mathfrak{N} = \eta = \frac{\frac{m+1}{2m-1} M - \mathfrak{M}'}{\lambda - 2 - 4(2m-1)^2} \text{ et } N = \xi = \frac{M}{4(2m-1)^2} - \frac{m+1}{2m-1}\eta:$$

unde

unde binae eliciuntur aequationes

$$7)\ 0 = (m+1)\mathfrak{h} - (2m-1)k + \delta[(2m-1)(3) - (m+1)(5)]$$
$$+ \varepsilon[(2m-1)(2) - (m+1)(4)]$$
$$+ \eta[4(2m-1)^3 - (2m-1)(\lambda - 2 + (1)) + (m+1)(4)]$$
$$+ \varrho[(2m-1)(5) - (m+1)(11)] + \sigma[(m+1)(10) - (2m-1)(4)]$$
$$- \xi(m+1)(9);$$

$$8)\ 0 = +\mathfrak{h} - \delta(5) - \varepsilon(4) - \eta[4(m+1)(2m-1) - (4)]$$
$$- \varrho(11) + \sigma(10) - \xi[(9) + 4(2m-1)^2].$$

§. 24. Eſt denique coefficiens cos $(4p+2t)$ ſive

$$\mathfrak{M} = -\delta(3) - \zeta(2) + \vartheta(1) + \varrho(5) + \tau(4) + l,$$

et coefficiens sin $(4p+2t)$ vel

$$\mathrm{M} = -\delta(5) - \zeta(4) + \vartheta(4) + \varrho(11) + \tau(10) - \psi(9) + \mathfrak{l}$$

ac $\mu = 2(2m+1)$. Unde coefficientes ejusdem argumenti in coordinatis x, y, reperiuntur, videlicet

$$\mathfrak{N} = \vartheta = \frac{\frac{m+1}{2m+1}\mathrm{M} - \mathfrak{M}}{\lambda - 2 - 4(2m+1)^2} \text{ et } \mathrm{N} = \psi = \frac{\mathrm{M}}{4(2m+1)^2} - \frac{m+1}{2m+1}\vartheta,$$

quod ſequentes praebet aequationes:

$$9)\ 0 = +(m+1)\mathfrak{l} - (2m+1)l + \delta[(2m+1)(3) - (m+1)(5)]$$
$$+ \zeta[(2m+1)(2) - (m+1)(4)]$$
$$+ \vartheta[4(2m+1)^3 - (2m+1)(\lambda - 2 + (1)) + (m+1)(4)]$$
$$+ \varrho[(m+1)(11) - (2m+1)(5)] + \tau[(m+1)(10) - (2m+1)(4)]$$
$$- \psi(m+1)(9);$$

$$10)\ 0 = +\mathfrak{l} - \delta(5) - \zeta(4) - \vartheta[4(m+1)(2m+1) - (4)]$$
$$+ \varrho(11) + \tau(10) - \psi[(9) + 4(2m+1)^2].$$

§. 25. Si in decem iſtis aequationibus loco quantitatum m, λ, (1), (2), etc. valores eorum ſubſtituuntur nume-

rici (§. 2. 13. 14.), decem incognitae, $\delta, \varrho, \varepsilon, \sigma, \zeta, \tau, \eta, \xi, \vartheta, \psi$, inde ſequentibus aequationibus definiuntur (§. 20 — 24):

1) $$0 = -5{,}3380541 + \delta . 173{,}255367 + \varrho . 0{,}3641252 + \varepsilon . 22{,}065004 + \sigma . 33{,}83766 - \zeta . 31{,}286294 - \tau . 37{,}828356 + \eta . 0{,}4949984 + \xi . 0{,}4038662 - \vartheta . 0{,}6000552;$$

2) $$0 = -0{,}6003712 + \delta . 53{,}47568 + \varrho . 4{,}0272367 + \varepsilon . 1{,}9953482 + \sigma . 2{,}6803227 - \zeta . 1{,}9953482 - \tau . 2{,}6803227 + \eta . 0{,}0409552 + \xi . 0{,}0332728 - \vartheta . 0{,}0409552 - \psi . 0{,}0332728;$$

3) $$0 = +334{,}57506 + \delta . 25{,}742423 - \varrho . 13{,}148051 + \varepsilon . 3862{,}640 - \sigma . 0{,}3641252 + \zeta . 0{,}0496646 + \tau . 0{,}020795 + \eta . 52{,}418072 + \xi . 58{,}517965;$$

4) $$0 = -14{,}71963 + \delta . 1{,}9953482 + \varrho . 2{,}6803227 + \varepsilon . 607{,}96084 + \sigma . 517{,}03684 + \zeta . 0{,}0409552 + \tau . 0{,}0332728 - \xi . 2{,}6803227;$$

5) $$0 = -0{,}1630430 - \delta . 2{,}6152972 - \varrho . 0{,}6849745 - \varepsilon . 0{,}0115732 - \sigma . 0{,}0076824 - \zeta . 537{,}65663 + \tau . 0{,}0272367 - \vartheta . 4{,}6106454 - \psi . 4{,}6756709;$$

6) $$0 = -0{,}3263402 + \delta . 1{,}9953482 - \varrho . 2{,}6803227 + \varepsilon . 0{,}0409552 + \sigma . 0{,}0332728 + \zeta . 714{,}912 + \tau . 714{,}93924 - \psi . 2{,}6803227;$$

7) $$\sigma = +5{,}479055 - \delta . 0{,}6993838 - \varrho . 0{,}5273663 - \varepsilon . 82{,}77108 + \sigma . 11{,}532246 - \eta . 49322{,}656 + \xi . 0{,}3641252;$$

8) $$0 = -0{,}4386378 + \delta . 0{,}0409552 + \varrho . 0{,}0332728 + \varepsilon . 1{,}9953482 - \sigma . 2{,}6803227 + \eta . 1267{,}4014 + \xi . 2253{,}9665;$$

9) o

9) $0 = +0,1993540 - \delta . 0,8044407 + \varrho . 0,6092768 - \zeta . 91,9924 + \tau . 15,52294 - \vartheta . 63663,24 + \psi . 0,3641252;$

10) $0 = -0,0123354 + \delta . 0,0409552 - \varrho . 0,0332728 + \zeta . 1,9953482 - \tau . 2,6803227 + \vartheta . 1374,3532 + \psi . 2649,7727.$

§. 26. Ordiamur ab aequatione poſtrema, valoremque coefficientis ψ inde deductum ſubſtituamus in aequatione nona, unde eliciatur valor coefficientis ϑ, quo cum valore ipſius ψ in aequatione octava ſubſtituto, quaeratur valor coefficientis ξ; ſicque progrediendo ad primam usque aequationem, decem noſtrae aequationes ſequentem induent formam:

10) $\psi = +0,0000047 - \delta . 0,0000155 + \varrho . 0,0000126 - \zeta . 0,0007530 + \tau . 0,0010115 - \vartheta . 0,5186684;$

9) $\vartheta = +0,0000031 - \delta . 0,0000126 + \varrho . 0,0000096 - \zeta . 0,0014483 + \tau . 0,0002438;$

8) $\xi = +0,0001946 - \delta . 0,0000182 - \varrho . 0,0000148 - \varepsilon . 0,0008853 + \sigma . 0,0011892 - \eta . 0,5622980;$

7) $\eta = +0,0001111 - \delta . 0,0000142 - \varrho . 0,0000107 - \varepsilon . 0,0016782 + \sigma . 0,0002338;$

6) $\tau = +0,0004565 - \delta . 0,0027910 + \varrho . 0,0037491 - \varepsilon . 0,0000573 - \sigma . 0,0000465 - \zeta . 0,9999652;$

5) $\zeta = -0,0003033 - \delta . 0,0048640 - \varrho . 0,0012740 - \varepsilon . 0,0000215 - \sigma . 0,0000143;$

4) $\sigma = +0,0284700 - \delta . 0,0038590 - \varrho . 0,0051843 - \varepsilon . 1,1758622;$

3) $\varepsilon = -0,0866139 - \delta . 0,0066639 + \varrho . 0,0034036;$

2) $\varrho = +0,1062189 - \delta . 13,370206;$

1) $\delta = +0,0164786.$

§. 27. Hoc valore ipſius δ jam introducto in aequationem ſecundam, tumque valore coefficientium δ et ϱ in aequationem tertiam, et ſic porro regrediendo usque ad aequationem decimam, tandem obtinemus ſequentes decem coefficientium valores numericos:

$\delta = +0,0164786$; $\varrho = -0,1141040$; $\varepsilon = -0,0871121$;
$\sigma = +0,1314299$; $\zeta = -0,0002381$; $\tau = +0,0002197$;
$\eta = +0,0002890$; $\xi = +0,0002669$; $\vartheta = +0,0000021$;
$\psi = +0,0000023$.

§. 28. Poſtquam hoc modo omnes terminos quantitatum $\mathfrak{B}$, V, (§. 14) determinavimus, nihil jam ſupereſt, niſi ut ſingulos terminos in quadratum eccentricitatis telluris $\varkappa$ multiplicemus, quo facto reſultabit nova aequatio quaeſita abſciſſae x et ordinatae y, puta $x = \varkappa^2 \mathfrak{B}$ et $y = \varkappa^2 V$ (§. 7.). Quare quum per elementa orbitae telluris ſit $\varkappa = 0,016802$, ideoque $\varkappa^2 = 0,0002823$: invenitur (§. 19. 27.)

$\varkappa^2 \alpha = -0,0000029$; $\varkappa^2 \beta = +0,0000063$;
$\varkappa^2 \nu = -0,0000097$; $\varkappa^2 \gamma = 0$; $\varkappa^2 \pi = 0$;
$\varkappa^2 \delta = +0,0000047$; $\varkappa^2 \varrho = -0,0000322$;
$\varkappa^2 \varepsilon = -0,0000246$; $\varkappa^2 \sigma = +0,0000371$;
$\varkappa^2 \zeta = -0,0000001$; $\varkappa^2 \tau = \varkappa^2 \eta = \varkappa^2 \xi = +0,0000001$;
$\varkappa^2 \vartheta = 0$; $\varkappa^2 \psi = 0$.

Unde tandem reſultat $\varkappa^2 \mathfrak{B}$ vel nova aequatio abſciſſae

$$x = -0,0000029 + 0,0000063 \cos 2p + 0,0000047 \cos 2t - 0,0000246 \cos (2p - 2t);$$

$\varkappa^2$ V

$x^2 V$ ſeu nova aequatio ordinatae

$$y = -0,0000097 \sin 2p - 0,0000322 \sin 2t + 0,0000371 \sin (2p - 2t).$$

§. 29. Collatio aequationum ab Eulero computatarum (pag. 680. ſqq.) cum novis iſtis a quadrato eccentricitatis telluris pendentibus, quas vir celeberrimus neglexerat, docet, poſteriores aequationes majores eſſe Eulerianis ordinis quarti, ſexti, decimi ac decimi tertii, h. e. iis quae a cubo eccentricitatis lunaris, a producto utriusque eccentricitatis in diſtantiam a lunae a tellure, et a producto eccentricitatis telluris in quadratum inclinationis orbitae lunaris dependent. Quodſi explorare volumus, ad quot minuta ſecunda aequatio longitudinis lunae hinc oriunda pervenire poſſit, non opus eſt, maximos minimosve aequationum noſtrarum valores more ſolito quaerere. Pro noſtro fine, ubi ſumma exacti udo non requiritur, ſequens methodus ſufficit. Poſita aequatione abſciſſae x ſeu $x^2 \mathfrak{V} = \pm g$, et $x^2 V = \pm h$, maximi valores pervenire circiter poſſunt ad $g = \pm 0,00004$, $h = \pm 0,00003$. Quare quum poſita correctione longitudinis lunae $= \Phi$ ſit $\tang \Phi = \frac{y}{1+x}$ (pag. 600.), incrementum ejus $\partial . \tang \Phi = \frac{(1+x)\partial y - y \partial x}{(1+x)^2}$ maximum erit, quando ∂x et ∂y maximos at oppoſitos valores induunt: erit nempe $\partial . \tang \Phi = \pm \frac{h(1+x) + g y}{(1+x)^2}$, qui valor maximus erit, quando y maximum nanciſcitur valorem, x autem evaneſcit, quoniam ordinata y ratione abſciſſae $1 + x$ admodum exigua eſt. Reperitur autem (pag. 686.) valor ipſius y maximus fere $= \pm 0,15$: proinde

$$\partial . \tang \Phi = + 0,00003 + 0,15 \times 0,00004 = 0,000086.$$

Quae

Quae tangentis variatio, pro angulis non majoribus quam Φ vel aliquot gradus, reſpondet variationi anguli 15″ vel 20″, ideoque non erat negligenda.

§. 30. Simul atque conſtitueram, aequationem longitudinis lunae *ſecularem* e formulis Eulerianis deducere, examen inſtituere coepi, annon ipſae ſeries, quibus magnus ille Geometra coordinatas x, y, definivit, rite evolutae, pro aequatione anguli Φ unum alterumve terminum praeberent, qui neque ſinum neque coſinum ullius anguli, ſed alium factorem non periodicum, aut ſaltem periodo ſatis longae obnoxium, contineret; idque examen ultra terminos quadrato eccentricitatis telluris proportionales non erat extendendum, a quo ſcilicet aequationem lunae ſecularem dependere Cel. la Place demonſtraverat (*). Quem in finem calculus correctionum periodicarum ſupra evolutus praemittendus erat, qui quidem docuit, ſeriem, qua ordinata y exprimitur, nonniſi ſinus angulorum continere, ideoque hoc modo nullum terminum tempori aut quadrato temporis proportionalem reſultare poſſe, quemadmodum jam videbimus.

§. 31. Rejectis omnibus terminis in excentricitatem vel inclinationem lunae etc. ductis, quoniam inde aequationes producto utriusque eccentricitatis proportionales orientur, habemus (§. 7.)

$$x = \mathfrak{O} + \varkappa\mathfrak{U} + \varkappa^2\mathfrak{V} \text{ et } y = O + \varkappa U + \varkappa^2 V,$$

proinde poſito $\frac{1}{1+\mathfrak{O}} = P$, ob $\tang \Phi = \frac{y}{1+x}$ (§. 29.),

tang

(*) V. *Mémoires de Paris. Année 1786. Sur l'équation ſéculaire de la Lune.*

$$\text{tang}\,\Phi = \frac{P(O + \varkappa U + \varkappa^2 V)}{1 - \varkappa P\mathfrak{U} + \varkappa^2 P\mathfrak{V}} =$$
$$P(O + \varkappa U + \varkappa^2 V)(1 - \varkappa P\mathfrak{U} - \varkappa^2 P\mathfrak{V} + \varkappa^2 P^2 \mathfrak{U}^2),$$

h. e. $\text{tang}\,\Phi = PO + \varkappa P(U - PO\mathfrak{U})$
$+ \varkappa^2 P(V - PU\mathfrak{U} - PO\mathfrak{V} + P^2 O\mathfrak{U}^2)$.

Conſiderantes autem quantitatum harum valores (§. 11. 12. 14.) facile videbimus, $1 + \mathfrak{O}$, ideoque et P altioresque ejusdem poteſtates eſſe ſeries valde convergentes e termino conſtante et coſinubus compoſitas; perſpicimus porro, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^2$ et $\mathfrak{V}$, ſimiles eſſe ſeries, ſed U, O, V, nonniſi ſinus continere. Unde ſequitur, ſingulos terminos tangentis anguli Φ ſeries eſſe juxta ſinus angulorum progredientes, ideoque terminum hujus tangentis generalem ſic exprimi poſſe: $\text{tang}\,\Phi = \pm X \sin\Phi$. Quamobrem quum in genere ſit angulus

$$\Phi = \text{tang}\,\Phi - \tfrac{1}{3}\,\text{tg}^3\,\Phi + \tfrac{1}{5}\,\text{tg}^5\,\Phi - \text{cet.}$$

atque omnes poteſtates ſinuum impares nec non producta ſinuum dimenſionis imparis evoluta iterum ſint ſeries quae nonniſi ſinus continent, ſequitur, aequationem longitudinis lunae Eulerianam, ſeu Φ eſſe ſeriem, quae nonniſi ſinus h. e. terminos periodicos continet.

§. 32. Quaeri hic poteſt, unde fiat, ut methodus, qua Eulerus uſus eſt, longitudinem lunae per binas coordinatas exprimendi, et quae omnes lunae aequationes periodicas tam exacte delineat, non tamen ad ullum terminum tempori proportionalem perducat, ideoque ad aequationem ſecularem inveniendam non ſit idonea. Paradoxi hujus fons ſequens eſſe videtur, ad quem detegendum plena atque perfecta informatione analyſis Eulerianae opus eſt. Aequatio lunae ſecularis, quemadmodum infra videbimus, hujus formae eſt, $\xi = \int \varkappa^2\,\partial\tau$, denotante $\partial\tau$ tempuſculum

pro conſtante aſſumtum. Quare ſi eccentricitas telluris $\varkappa$, ut in toto libro Euleriano factum eſt, conſtans ſupponitur, haec aequatio fit $\xi = \varkappa^2 \tau$, ideoque ſpeciem motus medii mentietur: erit ſcilicet illa longitudinis lunae mediae ſeu motus medii pars, quae ex actione ſolis oritur, ſiquidem e theoria gravitatis Neutoniana conſtat, ſingulas lunae periodos, ob actionem ſolis tellurisque compoſitam, parte ſua fere 18cma longiores, motumque ejus medium tardiorem eſſe, quam ſi tellus ſola in lunam ageret. Unde ſequitur, completam *problematis trium corporum* ſolutionem terminos quoque continere debere tempori proportionales, qui termini minime ſunt negligendi neque ſimpliciter ut pars motus medii conſiderandi, ſi in factorem ducuntur, qui non ſenſu ſtrictiſſimo conſtans, ſed vel leviſſimae variationi plurium ſeculorum ſpatio obnoxius eſt, quod ipſum caſu, quem jam contemplamur, contingit, ſiquidem factor $\varkappa^2$ expreſſionis $\int \varkappa^2 \partial \tau$, vi actionis planetarum in tellurem, lentam quidem, at longo temporis intervallo ſatis ſenſibilem commutationem ſuffert.

§. 33. Quibus attente perpenſis facile videbimus, cur iſta methodo aequatio lunae ſecularis pateſieri non poterat, non ſolum quia Cel. Eulerus eccentricitatem telluris ceu conſtantem ſemper conſideravit, ſed praeſertim, quoniam pro axe abſciſſarum non, uti fieri ſolet, lineam fixam ſed lineam mobilem aſſumſit, quae perpetuo ad locum lunae *medium* dirigatur (pag. 29.), ideoque non *motum* ſed *locum* medium tanquam cognitum deſideravit, quod, conceſſa aequatione longitudinis mediae ſeculari, petitio principii eſt: unde factum eſt, ut omnes aequationes ſeu perturbationes motus medii prorſus e calculo egrederentur, quippe quae dun-

duntaxat ſitum axis, qui pro cognito aſſumitur, non autem ordinatas ſuper hoc axe captas, quas ſolas Eulerus examini ſubjecerat, afficiunt. Praeterea forma pro coordinatis x, y, ſeu portionibus earum $\varkappa^2 \mathfrak{V}$ et $\varkappa^2 V$ (§. 14.) aſſumta ſenſu ſtricto non eſt completa, ſiquidem factor $\varkappa^2$ conſtans ſupponitur. Quodſi enim ob variationem eccentricitatis telluris ponimus $\varkappa^2 = A + B\tau +$ cet. ſiet

$$\varkappa^2 \mathfrak{V} = x = (A + B\tau)(\alpha + \beta \cos 2p + \text{cet.}) \text{ et}$$
$$\varkappa^2 V = y = (A + B\tau)(\nu \sin 2p + \text{cet.});$$

unde neceſſario in expreſſiones coordinatarum x, y, termini ingredientur, qui ſunt functiones temporis τ; atque hi termini ad aequationem ſecularem perducerent, ſi pro axe abſciſſarum linea fuiſſet aſſumta, non ad locum lunae medium, ſed ad punctum quodpiam fixum, e. gr. punctum aequinoctiale directa. Hinc tandem perſpicimus, terminos, quibus aequatio ſecularis continetur, introductione novarum coordinatarum X, Y, (pag. 23 — 29.) evanuiſſe, ideoque in aequationibus (pag. 28. 29.) non amplius exiſtere: unde pro eruenda aequatione ſeculari aequationes ſuperiores (pag. 22.) ſunt examinandae, in quibus axis abſciſſarum fixus eſt. Quomodo ex his aequationibus aequatio longitudinis lunae ſecularis erui poſſit, breviter nunc oſtendemus.

§. 34. In aequationibus (pag. 22.)

$$\text{I. } 0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{\mu x}{v3} + \nu . \frac{x - u \cos \Phi}{w3} + \nu . \frac{\cos \Phi}{u^2},$$
$$\text{II. } 0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{\mu y}{v3} + \nu . \frac{y - u \sin \Phi}{w3} + \nu . \frac{\sin \Phi}{u^2},$$

quantitates x, y, u, etc. ad *Figuram* 1. referuntur. Suppoſito nempe loco lunae ad Eclipticam reducto in Y, centro

 ſolis

ſolis in S, telluris in T, ductisque TP, YX, normalibus ad axem abſciſſarum SX, eſt (pag. 12. 13.)

$$SX = x,\ XY = y,\ ST = u,\ SY = v,\ TY = w,\ PST = \Phi,$$

ideoque

$$SP = u \cos \Phi,\ PT = u \sin \Phi,$$

eſtque ∂t motus ſolis medius tempuſculo $\partial \tau$ (pag. 20.),

$$\mu = \frac{S}{S+T} = 1,\ \nu = \frac{T}{S+T} = \frac{T}{S},$$

deſignatis nempe maſſis ſolis et telluris literis S, T (pag. 13.).
Tab. XIV Fig. 1. At coordinatis non e centro ſolis ſed e centro telluris captis, aequationes fundamentales fini noſtro magis erunt idoneae; quod quidem obtinetur, tellure in S, ſole in T transpoſito, maſſisque S, T, permutatis. Hinc fit

$$\mu = \frac{T}{S},\ \nu = \frac{S}{T+S} = 1,\ ST = u \text{ diſtantia ſolis a tellure,}$$

$$SY = v \text{ diſtantia lunae a tellure,}$$

$$TY = w \text{ diſtantia lunae a ſole,}$$

et $x = SX$, $y = XY$, ſunt coordinatae e centro telluris captae et locum lunae definientes, at

$$SP = u \cos \Phi = x',\ PT = u \sin \Phi = y',$$

locum ſolis determinant. Sicque aequationes noſtrae ductae in $\frac{S}{T} = m$, fient

$$\text{I. } 0 = \frac{m\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{x}{v^3} + \frac{m(x-x')}{w^3} + \frac{mx'}{u^3};$$

$$\text{II. } 0 = \frac{m\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{y}{v^3} + \frac{m(y-y')}{w^3} + \frac{my'}{u^3}.$$

§. 35. Jam opus erit loco anguli ∂t introducere elementum temporis $\partial \tau$. Poſito nempe motu ſolis medio, illo temporis ſpatio quod pro unitate accipitur, $= n'$, fiet $n' : \partial t = 1 : \partial \tau$, ſeu $\partial t = n' \partial \tau$. Quum praeterea per theo-

-riam

riam Neutonianam maſſae corporum centralium ſint in ratione compoſita e cubo diſtantiae mediae planetae circa corpus centrale gyrantis nec non quadrato motus medii ejusdem planetae, poſito motu medio lunae $= n$, radio orbis telluris $= A = 1$, lunae $= a$, habemus

$$S : T = A^3 n'^2 : a^3 n^2, \text{ proinde}$$

$$n'^2 = m a^3 n^2, \text{ et } \partial t^2 = m a^3 n^2 \partial \tau^2.$$

Unde aequationes noſtrae (§. 34.) hanc formam induunt:

$$\text{I. } 0 = \frac{\partial\partial x}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3 x}{v^3} + \frac{m n^2 a^3 (x - x')}{w^3} + \frac{m n^2 a^3 x'}{u^3};$$

$$\text{II. } 0 = \frac{\partial\partial y}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3 y}{v^3} + \frac{m n^2 a^3 (y - y')}{w^3} + \frac{m n^2 a^3 y'}{u^3}.$$

§. 36. Quodſi jam prior aequatio in x ducta, poſteriori in y ductae additur, nova oritur aequatio

$$\text{III. } 0 = \frac{x \partial\partial x + y \partial\partial y}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3 (x^2 + y^2)}{v^3} + \frac{m n^2 a^3 (x^2 + y^2 - x x' - y y')}{w^3}$$
$$+ \frac{m n^2 a^3 (x x' + y y')}{u^3}.$$

Eſt autem $x^2 + y^2 = SY^2 = v^2$, et $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, elementum arcus orbitae lunaris, quare poſita vera lunae longitudine $= \xi$, fit

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \partial v^2 + v^2 \partial \xi^2, \text{ ideoque}$$

$$\partial . v^2 = 2 v \partial v = 2 x \partial x + 2 y \partial y, \text{ et}$$

$$\tfrac{1}{2} \partial\partial . v^2 = \partial v^2 + v \partial\partial v = x \partial\partial x + y \partial\partial y + \partial v^2 + v^2 \partial \xi^2;$$

unde ſequitur

$$x \partial\partial x + y \partial\partial y = v \partial\partial v - v^2 \partial \xi^2.$$

Quibus valoribus ſubſtitutis, et poſito brevitatis ergo

$$\frac{v^2 - x x' - y y'}{w^3} + \frac{x x' + y y'}{u^3} = R,$$

aequatio poſtrema ita transformatur:

$$\text{III. } 0 = \frac{v \partial\partial v - v^2 \partial \xi^2}{\partial \tau^2} + \frac{n^2 a^3}{v} + m n^2 a^3 R.$$

§. 37. Supponamus jam, actione ſolis radium vectorem lunae v et longitudinem ξ augeri portionibus vel variationibus δv et $\delta\xi$, quae tam exiguae erunt, ut poteſtates earum altiores, earumque producta in R negligere liceat, quoniam quantitates $\frac{x}{w3}$, $\frac{y}{w3}$, $\frac{x}{u3}$, $\frac{y}{u3}$, e quibus R componitur, minimae ſunt. Scripto itaque $v + \delta v$ loco v et $\xi + \delta\xi$ loco ξ, per calculum *variationum* ſcribendum eſt

$$\partial\partial v + \partial\partial\delta v \text{ loco } \partial\partial v, \quad \partial\xi + \partial\delta\xi \text{ loco } \partial\xi,$$
$$v^2 + 2v\delta v \text{ loco } v^2, \quad \partial\xi^2 + 2\partial\xi\partial\delta\xi \text{ loco } \partial\xi^2, \text{ et } \frac{1}{v} - \frac{\delta v}{v^2} \text{ loco } \frac{1}{v}:$$

unde aequatio noſtra fit

$$\text{III. } o = \frac{v\partial\partial v - v^2\partial\xi^2 + \delta v\partial\partial v + v\partial\partial\delta v - 2v\delta v\partial\xi^2 - 2v^2\partial\xi\partial\delta\xi}{\partial\tau^2}$$
$$+ \frac{n^2 a3}{v} - \frac{n^2 a3\delta v}{v^2} + m n^2 a^3 R.$$

§. 38. Termini factores m, δv, vel $\delta\xi$ continentes, ex actione ſolis in lunam oriuntur, unde illi cum perturbationibus, quas exprimunt, evaneſcunt, ceteri vero termini motum lunae inturbatum exprimunt. Motus itaque lunae ellipticus definitur aequatione

$$1) \quad o = \frac{\partial v - v\partial\xi^2}{\partial\tau^2} + \frac{n^2 a3}{v^2},$$

motus autem a ſole perturbatus aequatione

$$2) \quad o = \frac{\delta v\partial\partial v + v\partial\partial\delta v - 2v\delta v\partial\xi^2 - 2v^2\partial\xi\partial\delta\xi}{\partial\tau^2} - \frac{n^2 a3\delta v}{v^2} + m n^2 a^3 R.$$

Eſt autem $\frac{v^2\partial\xi}{2}$ aequalis ſectori orbis lunaris elliptico, qui eſt motui medio vel tempori proportionalis, unde poſita ſeccentricitate lunae $= k$, atque numero rationem perimetri circuli ad diametrum exprimente, puta 3, 14.... $= \pi$, ſequens naſcitur proportio: integra area elliptica orbitae lunae $(\pi a^2 \sqrt{1 - k^2})$ eſt ad ſectorem $(\frac{v^2\partial\xi}{2})$, ut menſis ad tem-

pus

pus $\partial\tau$ quo ſector deſcribitur. Quum praeterea ſit tempus pro unitate aſſumtum (1) ad menſem, ut motus lunae medius eo tempore peractus (n) ad integram peripheriam (2π); ſequitur eſſe menſem $= \frac{2\pi}{n}$; unde prior analogia ſic exprimitur:

$$\pi a^2 \surd(1 - k^2) : \frac{v^2 \partial\xi}{2} = \frac{2\pi}{n} : \partial\tau, \text{ h. e.}$$

$$v^2 \partial\xi = n a^2 \partial\tau \surd(1 - k^2).$$

Verum eſt quoque per aequationem 1)

$$\frac{v \partial\xi^2}{\partial\tau^2} = \frac{\partial\partial v}{\partial\tau^2} + \frac{n^2 a^3}{v^2};$$

quibus valoribus in aequatione 2) ſubſtitutis, nanciſcimur

$$\text{IV. } 0 = \frac{v \partial\partial\delta v - \delta v \partial\partial v}{\partial\tau^2} - \frac{2 n a^2 \partial\delta\xi}{\partial\tau} \surd(1 - k^2)$$
$$- \frac{3 n^2 a^3 \delta v}{v^2} + m n^2 a^3 R.$$

§. 39. Simili modo obtinemus (§. 35.), aequatione I in ∂x ducta et adjuncta aequationi II in ∂y ductae,

$$0 = \frac{\partial x \partial\partial x + \partial y \partial\partial y}{\partial\tau^2} + \frac{n^2 a^3 (x \partial x + y \partial y)}{v^3} + \frac{m n^2 a^3 ((x - x') \partial x + (y - y') \partial y)}{w^3}$$
$$+ \frac{m n^2 a^3 (x' \partial x + y' \partial y)}{u^3};$$

unde ob $x\partial x + y\partial y = v\partial v$ (§. 36.), poſito compendii cauſa

$$\frac{(x - x') \partial x + (y - y') \partial y}{w^3} + \frac{x' \partial x + y' \partial y}{u^3} = \partial S,$$

integrando obtinetur

$$\text{V. } 0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial\tau^2} - \frac{2 n^2 a^3}{v} + 2 m n^2 a^3 S + C,$$

ubi eſt C conſtans per integrationem ingreſſa. Evaneſcente igitur actione ſolis ſeu maſſa m, motus lunae ellipticus definitur aequatione

$$3)\ 0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial\tau^2} - \frac{2 n^2 a^3}{v} + C,$$

ſive poſito arcu elliptico orbis lunaris $= \partial s$,

$$3)\ 0 = \frac{\partial s^2}{\partial\tau^2} - \frac{2 n^2 a^3}{v} + C.$$

De-

Deſignata jam anomalia lunae media et vera literis μ, v, conſtat per leges Kepleri eſſe in motu elliptico

$$\frac{\partial s}{\partial \mu} = a\sqrt{\frac{1 - 2k\cos v + k^2}{1 - k^2}}, \text{ et } \cos v = \frac{v - a(1 - k^2)}{k v},$$

proinde $\frac{\partial s}{\partial \mu} = a\sqrt{\left(\frac{2a}{v} - 1\right)}$. Quum autem ſit $\partial \mu$ motus lunae medius tempore $\partial \tau$, ideoque $\partial \mu = n \partial \tau$, habemus

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = n a \sqrt{\frac{2a - v}{v}};$$

quo valore in aequatione 3) ſubſtituto naſcitur

$$0 = -n^2 a^2 + C \text{ ſeu } C = n^2 a^2.$$

Hinc aequatio V hanc formam induit:

$$\text{V. } 0 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial \tau^2} - \frac{2n^2 a^3}{v} + n^2 a^2 + 2mn^2 a^3 S.$$

§. 40. Quod ſi huic aequationi additur aequatio I in x ducta ſimul cum II in y ducta (§. 36.), reſultat

$$\text{VI. } 0 = \frac{v \partial\partial v + \partial v^2}{\partial \tau^2} - \frac{n^2 a^3}{v} + n^2 a^2 + mn^2 a^3 (2S + R).$$

Scripto jam iterum $v + \delta v$ loco v, ut ſupra (§. 37.) ∂v^2 abit in $\partial v^2 + 2\partial v \partial \delta v$ et $v \partial\partial v$ in $v\partial\partial v + \delta v \partial\partial v + v \partial\partial \delta v$; quo valore ſubſtituto aequatio poſtrema permutatur in hanc:

$$\text{VI. } 0 = \frac{\partial v^2 + v\partial\partial v}{\partial \tau^2} + \frac{2\partial v \partial \delta v + \delta v \partial\partial v + v \partial\partial \delta v}{\partial \tau^2} - \frac{n^2 a^3}{v}$$
$$+ \frac{n^2 a^3 \delta v}{v^2} + n^2 a^2 + mn^2 a^3 (2S + R);$$

unde pro motu elliptico, ubi δv et m evaneſcunt, nec non pro motu perturbato ſeorſim evaneſcere debent termini factoribus δv aut m affecti et non affecti. Motus itaque perturbatus ſequente aequatione definitur:

$$\frac{n^2 a^3 \partial v}{v^2} = -\frac{2\partial v \partial \delta v + \delta v \partial\partial v + v \partial\partial \delta v}{\partial \tau^2} - mn^2 a^3 (2S + R).$$

Quo valore in aequatione IV §. 38.) ſubſtituto nanciſcimur

$$\text{VII. } \frac{2na^3 \partial \delta \xi}{\partial \tau} \sqrt{(1 - k^2)} = \frac{6\partial v \partial \delta v + 2\delta v \partial\partial v + 4v\partial\partial \delta v}{\partial \tau^2}$$
$$+ 6mn^2 a^3 S + 4mn^2 a^3 R;$$

cujus

cujus integrale eſt

$$\delta\xi\sqrt{(1-k^2)} = \frac{2v\,\partial\delta v + \delta v\,\partial v}{na^2\,\partial\tau} + 3mna\int S\,\partial\tau + 2mna\int R\,\partial\tau.$$

§. 41. En aequationem completam, qua omnes omnino continentur aequationes longitudinis lunae $\delta\xi$ e vi ſolis oriundae, cujuscunque ſint argumenti. Primi tres termini evoluti ad nullum terminum formae $\int A\,\partial\tau$ perducunt, ſed aequationes duntaxat periodicas praebent, ſinubus vel coſinubus angulorum variabilium proportionales: quod quidem ſibimet ipſe quisque facile perſvaſerit, qui operae in ſingulos terminos evolvendos conferendae parcere non voluerit. Quare determinandae aequationi lunae ſeculari poſtremum duntaxat membrum

$$\delta\xi\sqrt{(1-k^2)} = 2mna\int R\,\partial\tau$$

inſervire poteſt, ideoque totum negotium reducitur ad evolutionem quantitatis R, cujus quidem illi tantummodo termini aſſervandi ſunt, qui forma $A\kappa^2$ induuntur, quoniam aequationem lunae ſecularem a quadrato eccentricitatis telluris dependere jam conſtat. Aequatio itaque ſecularis ſequente definitur aequatione:

$$\text{VIII.}\quad \delta\xi = \frac{2mna}{\sqrt{(1-k^2)}}\int R\,\partial\tau = mna\,(2+k^2)\int R\,\partial\tau.$$

§. 42. Pro evolvenda quantitate R ponamus brevitatis gratia $xx' + yy' = z^2$, ut ſit (§. 36.) $R = \frac{v^2 - z^2}{w^3} + \frac{z^2}{u^3}$. Quum praeterea axis abſciſſarum x ad punctum aequinoctiale verum dirigatur (pag. 12.), unde longitudines ξ computantur, appellemus ξ' veram longitudinem ſolis, ut ſit (§. 34.) $x = v\cos\xi$, $y = v\sin\xi$, $x' = u\cos\xi'$, $y' = u\sin\xi'$,

$z^2 = uv\cos(\xi - \xi')$,

$w^2 =$

$$w^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x'x' + y'y' + x^2 + y^2 - 2z^2$$
$$= u^2 + v^2 - 2uv\cos(\xi - \xi'):$$

unde poſito angulo $\xi - \xi' = \Phi$ fit

$$\frac{1}{w^3} = (u^2 + v^2 - 2uv\cos\Phi)^{-\frac{3}{2}}.$$

Quum v ratione diſtantiae u admodum exigua ſit, quantitas $\frac{1}{w^3}$ irrationalis in ſeriem juxta poteſtates quoti $\frac{v}{u} = r$ progredientem reſoluta valde converget. Fit nempe

$$\frac{1}{w^3} = \frac{1}{u^3}[1 + 3r\cos\Phi - \tfrac{3}{2}r^2 + \tfrac{3.5}{2}r^2\cos^2\Phi - \tfrac{3.5}{2}r^3\cos\Phi + \tfrac{5.7}{2}r^3\cos^3\Phi$$
$$+ \tfrac{3.5}{8}r^4 - \tfrac{3.5.7}{4}r^4\cos^2\Phi + \tfrac{5.7.9}{8}r^4\cos^4\Phi + \text{cet.}].$$

Quare quum termini periodici in aequationem ſecularem non ingrediantur, pro quantitate $\frac{v^2}{w^3}$ termini duntaxat conſtantes hujus ſeriei ſunt aſſervandi, pro quantitate vero $\frac{z^2}{w^3}$ nonniſi termini in $\cos\Phi$ ducti, ob $z^2 = uv\cos\Phi$. Habemus itaque

$$\frac{1}{w^3} = \frac{1}{u^3}[1 + \tfrac{3.3}{2.2}r^2 + \tfrac{3.3}{2.2}.\tfrac{5.5}{4.4}r^4 + \text{cet.} + 3r(1 + \tfrac{3}{2}.\tfrac{5}{4}r^2)\cos\Phi + \text{cet.}].$$

§. 43. Hinc obtinemus

$$\frac{v^2}{w^3} = \frac{v^2}{u^3}(1 + \tfrac{3.3}{2.2}r^2 + \tfrac{3.3}{2.2}.\tfrac{5.5}{4.4}r^4),$$
$$\frac{z^2}{w^3} = \frac{3v^2}{2u^3}(1 + \tfrac{3.5}{2.4}r^2), \text{ et } \frac{z^2}{u^3} = 0: \text{ unde fit (§. 42.)}$$
$$R = \frac{-v^2}{2u^3}(1 + \tfrac{9}{8}r^2),$$

neglectis nempe poteſtatibus quantitatis r ſecunda altioribus. Poſitis jam anomalia media lunae $= \mu$, ſolis $= \mu'$, per naturam ellipſis eſt

$$v = a(1 + \tfrac{1}{2}k^2 + k\cos\mu + \text{cet.}), \text{ et}$$
$$u = 1 + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 + \varkappa\cos\mu' + \text{cet.}$$

unde

unde neglectis terminis periodicis fit

$$v^2 = a^2 (1 + \tfrac{3}{2} k^2),\ \tfrac{1}{u^2} = 1 + \tfrac{1}{2} \varkappa^2,\ \tfrac{1}{u^3} = 1 + \tfrac{3}{2} \varkappa^2,$$

ideoque

$$r^2 = a^2 (1 + \tfrac{3}{2} k^2 + \tfrac{1}{2} \varkappa^2),$$

unde ſequitur

$$\mathrm{R} = -\tfrac{a^2}{2} (1 + \tfrac{3}{2} k^2 + \tfrac{3}{2} \varkappa^2)(1 + \tfrac{9}{8} a^2 (1 + \tfrac{3}{2} k^2 + \tfrac{1}{2} \varkappa^2)),\ \text{h. e.}$$

$$\mathrm{R} = -\tfrac{a^2}{2} (1 + \tfrac{3}{2} k^2 + \tfrac{3}{2} \varkappa^2 + \tfrac{9}{8} a^2 + \tfrac{27}{8} a^2 k^2 + \tfrac{9}{4} a^2 \varkappa^2),$$

proinde (§. 41.)

$$\text{VIII.}\quad \delta\xi = -mna^3 \int \partial\tau [1 + \tfrac{9}{8} a^2 + (2 + \tfrac{63}{16} a^2) k^2 + \tfrac{3}{2}(1 + \tfrac{3}{2} a^2) \varkappa^2].$$

§. 44. Primus hujus ſeriei terminus, puta

$$-mna^3 \int \partial\tau (1 + \tfrac{9}{8} a^2) = -mna^3 \tau (1 + \tfrac{9}{8} a^2),$$

tempori τ proportionalis, pars motus lunae medii eſt. Alter terminus formae $\int k^2 \partial\tau$, quatenus k conſtans ſupponitur, itidem ad motum medium pertinet; quatenus autem k variabilis ſtatuitur, ex hoc termino aequatio orietur, quae eandem periodum habet quam variationes eccentricitatis lunae, h. e. ſex circiter menſium, de qua infra nonnulla dicemus. Quamobrem pro aequatione ſeculari unicus ſupereſt terminus

$$\delta\xi = -\tfrac{3}{2} mna^3 (1 + \tfrac{3}{2} a^2) \int \varkappa^2 \partial\tau;$$

quae expreſſio cum illa, quam cel. la Place (*loc. cit.*) reperit, convenit, excepto poſtremo termino in a^5 ducto, quem magnus ille Geometra neglexerat. Haec igitur aequatio a quadrato eccentricitatis telluris pendens, ejusdem erit periodi ac variationes eccentricitatis telluris, h. e. periodi plurium millium annorum, ideoque ſpeciem aequationis ſecularis mentietur.

§. 45. Quia ſcilicet actione planetarum eccentricitas telluris continuo immutatur, veram eccentricitatem tanquam functionem temporis conſiderare oportet, unde patet, ponendum eſſe

$$\varkappa^2 = A + B\tau + C\tau^2 + \text{cet.}$$

Calculo autem generali pro omnibus planetarum perturbationibus inſtituto reperimus (*), anno 1750 pro epocha aſſumto, eſſe $\varkappa = 0{,}016802$; variationem vero ſecularem $\delta\varkappa = -0{,}0000469$; praeterea ad annum 750 h. e. mille annos ante epocham aſſumtam, computavimus ſitum apſidum nec non eccentricitatem orbitarum omnium planetarum, ac inde invenimus eccentricitatem telluris anno 750 ſeu $\varkappa' = 0{,}016333$ et variationem ſecularem $\delta\varkappa' = -0{,}0000413$. Si jam tempus τ integris ſeculis exprimitur, ſeu centum anni pro unitate aſſumuntur, motum ſecularem $\delta\varkappa$ ceu velocitatem, qua $\varkappa$ variatur, conſiderare licet, unde fit $\delta\varkappa = \frac{\partial\varkappa}{\partial\tau}$, $\delta\varkappa' = \frac{\partial\varkappa'}{\partial\tau}$. Eſt autem, aequationem $\varkappa^2 = A + B\tau + C\tau^2$ differentiando, $\frac{2\varkappa\partial\varkappa}{\partial\tau} = B + 2C\tau$, atque pro anno 1750, $\tau = 0$, pro anno 750, $\tau = -10$: unde obtinetur

$$2\varkappa\delta\varkappa = B \text{ et } 2\varkappa'\delta\varkappa' = B - 20C.$$

Quare quum, valoribus ſuperioribus ſubſtitutis, ſit

$$2\varkappa\delta\varkappa = -0{,}000001579 \text{ et } 2\varkappa'\delta\varkappa' = -0{,}000001350;$$

ſequitur

$$B = -0{,}000001579 \text{ et } C = -0{,}0000000114 5.$$

Valo-

(*) Singula calculi hujus capita plenarie evoluta ſunt in noſtra *Aſtronomia Theoretica* ſermone Germanico edita, *Vol. III. Sect. V. Cap.* 3.

Valore $\varkappa^2 = A + B\tau + C\tau^2$ introducto, habemus

$$\int \varkappa^2 \partial\tau = A\tau + \tfrac{1}{2} B\tau^2 + \tfrac{1}{3} C\tau^3 + \text{cet.}$$

cujus ſeriei terminus primus $A\tau$ pars motus medii eſt: unde ſupereſt aequatio ſecularis (§. 44.)

$$\delta\xi = -\tfrac{3}{2} mna^3 (1 + \tfrac{3}{2} a^2) (\tfrac{1}{2} B\tau^2 + \tfrac{1}{3} C\tau^3).$$

§. 46. Quum intervallum centum annorum hic pro unitate ſit aſſumtum, eſt n motus lunae medius uno ſeculo, h. e.

$$n = 1732564400'';$$

a eſt radius orbis lunaris per radium orbis telluris, ſeu parallaxis ſolis per parallaxin lunae diviſa, ideoque

$$a = \frac{8'',65}{57'21''} = 0,0025138;$$

m denique maſſa eſt ſolis per maſſam telluris diviſa, h. e.

$$m = 365361:$$

unde invenitur

$$\tfrac{3}{2} mna^3 = 15083328'',$$
$$\tfrac{9}{4} mna^5 = 143''.$$

proinde (§. 45.)

$$\delta\xi = + \tau^2 . 11'',908 + \tau^3 . 0'',05757.$$

Quae expreſſio aequationis longitudinis lunae ſecularis ab ea, quam cel. la Place reperit, puta

$$\delta\xi = + \tau^2 . 11'',135 + \tau^3 . 0'',04398$$

vix ſenſibiliter differt.

§. 47. E termino (§. 43.)

$$\delta\xi = - mna^3 (2 + \tfrac{63}{16} a^2) \int k^2 \partial\tau, \text{ ſive}$$
$$\delta\xi = - 2mna^3 (1 + 2a^2) \int k^2 \partial\tau,$$

 aequa-

aequatio longitudinis lunae periodica oritur, a variationibus eccentricitatis lunae pendens, quam Ptolemaeus jam animadverterat. Eſt nempe vera lunae eccentricitas k modo minor modo major eccentricitate media

$$K = 0,05505;$$

atque innumerae obſervationes a Ptolemaeo ad noſtram usque aetatem docuerunt, eccentricitatem lunae correctione indigere, cujus maximus valor eſt

$$\delta = 0,01172732,$$

et quae ſemper proportionalis eſt ſinui duplae elongationis ſolis a medio loco apogaei lunae. Quare, poſita longitudine ſolis $= \odot$, longitudine media apogaei lunae $= A$, ſeu anomalia lunae media $= q$, elongatione lunae a ſole $= p$ (§. 2.), erit vera eccentricitas lunae

$$k = K + \delta \cos 2 (\odot - A),$$

vel quum ſit $q = ☾ - A$, ideoque $\odot - A = \odot - ☾ + q = q - p$,

$$k = K + \delta \cos 2 (q - p) \; (*):$$

unde oritur

$$\delta\xi = -2mna^3(1 + 2a^2)\int\partial\tau\,(K^2 + 2K\delta\cos(2q - 2p) + \delta^2\cos^2(2q - 2p)),$$

h. e. $\delta\xi = -2mna^3(1 + 2a^2)\int\partial\tau\,(K^2 + \tfrac{1}{2}\delta^2 + 2K\delta\cos 2(q - p) + \tfrac{1}{2}\delta^2 \operatorname{coſ} 4(q - p))$,

ſive rejecto termino $K^2 + \frac{1}{2}\delta^2$, qui integratus formam $(K^2 + \frac{1}{2}\delta^2)\tau$ induit, ideoque ad motum medium pertinet,

$$\delta\xi = -mna^3\delta(1 + 2a^2)\int\partial\tau\,(4K\cos 2(q - p) + \delta\cos 4(q - p)).$$

§. 48.

(*) V. *loc. cit. Vol. II. Sect. IV. Cap.* 4. §. 177.

§. 48. Reſtituto jam valore (§. 35.) $\partial t = n' \partial \tau$, variationes angulorum q, p, per motum ſolis medium ∂t exprimere oportet. Eſt autem

$$\partial p = 12,36892\ \partial t\ (\text{§. } 2.),\ \text{et}$$
$$\partial q = 13,255865\ \partial t\ (\text{V. Theor. lunae pag. } 86.\ 87.):$$

unde poſito $12,36892 = p'$, $13,255865 = q'$, nanciſcimur

$$\delta \xi = -\tfrac{n}{n'} m a^3 \delta (1 + 2a^2) \int \partial t\, (4K \cos 2(q-p) + \delta \cos 4(q-p)).$$

Quare quum ſit

$$\partial q - \partial p = (q' - p')\, \partial t = 0,886945\, \partial t,$$

et motus medius lunae (n) ad motum medium ſolis (n') ut annus ſideralis (31558151 min. ſec.) ad menſem ſideralem (2360591,5 min. ſec.), ideoque

$$\tfrac{n}{n'} = 13,3687472;$$

poſito $q - p = r$, reſultat

$$\delta \xi = -\frac{13,3687472}{0,886945} m a^3 \delta (1 + 2a^2) \int \partial r\, (4K \cos 2r + \delta \cos 4r),$$

ac integrando

$$\delta \xi = -\frac{13,3687472}{0,886945} m a^3 \delta (1 + 2a^2)\, (2K \sin 2r + \tfrac{\delta}{4} \sin 4r).$$

Adhibitis ſuperioribus valoribus (§. 46.) reperitur

$$\frac{13,3687472}{0,886945} m a^3 \delta (1 + 2a^2) = 0,0010025917;$$

quod in $2K$ et $\frac{\delta}{4}$ ductum praebet valores

$$0,000112953 \quad \text{et} \quad 0,0000030078.$$

Nume-

Numeris hiſce, qui angulos partibus radii exprimunt, ad minuta ſecunda reductis, nanciſcimur tandem novam longitudinis lunae aequationem

$$\delta\xi = + 23'', 3 \sin 2(p - q) + 0'', 6 \sin 4(p - q):$$

quas autem aliis aequationibus periodicis ejusdem argumenti ab eccentricitate lunae pendentibus, quae in libro Euleriano ſupputatae ſunt, jungere oportet.

PAS-

PASSAGE
DE MERCURE SUR LE SOLEIL
DU 7 MAY 1799.

PAR

Mr. L'ABBÉ HENRY.

Préſenté et lû le 4 Juillet 1799.

Le ciel qui avoit été entièrement couvert tous les jours précédens, s'éclaircit heureuſement le jour même de ce phénomène, environ une demi-heure avant l'entrée de Mercure, et reſta en apparence aſſez pur tout le reſte du jour, de manière qu'on ne ceſſa pas de voir Mercure pendant toute la durée de ſon paſſage. Je dis que le ciel reſta aſſez pur en apparence, car dans la réalité l'atmosphère étoit remplie de vapeurs qui faiſoient paroître les bords du ſoleil dans un mouvement d'ondulation aſſez conſidérable, ſurtout vers le tems de la ſortie de Mercure, le ſoleil étant déjà aſſez proche de l'horiſon. Cette circonſtance rendant les limites du disque ſolaire incertaines et y produiſant des échancrures aſſez ſenſibles, étoit un obſtacle pour ſaiſir avec préciſion les inſtans des contacts des bords du ſoleil et de Mercure; auſſi il me ſemble que cette obſervation n'a pas toute l'éxactitude qu'elle auroit pû avoir ſans cette circonſtance.

Je

Je n'ai trouvé la durée de l'entrée et de la ſortie de Mercure que 2′ 50″, tandis que ſelon le calcul elle devoit être de 3′ 20″ du moins, en employant le diamètre de Mercure tel que le donnent les tables de la nouvelle édition de l'Aſtronomie de Mr. de la Lande.

Pour ſatisfaire à mon obſervation il faudroit donc diminuer le diamètre de Mercure de 1″ 92. Ainſi au lieu de l'employer de 12″ 4, comme le donnent les Tables pour cette époque, il ne faudroit le ſuppoſer que de 10″ 5. D'un autre côté Mr. Bode ayant bien voulu communiquer ſon obſervation à l'Académie, j'y remarque que les durées de l'entrée et de la ſortie de Mercure, telles qu'il les a obtenues, ſe rapprochent beaucoup des durées tirées du calcul. En effet il trouve pour la durée de l'entrée 3′ 18″ et de la ſortie 3′ 13″, tandis que le calcul donne pour Berlin 3′ 18″ 9 et 3′ 20″ 4. La durée de l'entrée s'accorde donc fort bien avec le diamètre tiré des tables mais la durée de la ſortie le ſuppoſe un peu plus petit d'environ une demi-ſeconde.

Au reſte cette ſorte d'obſervations ne me paroît pas ſuſceptible d'une grande préciſion; il ſuffit, pour s'en convaincre de jetter les yeux ſur celles des précédens paſſages de cette planète; et l'on y pourra remarquer que des obſervateurs habiles, ont différé entr'eux dans le même obſervatoire, de près d'une minute ſur le tems de la même phaſe. (Voyez les Ephémérides de Milan pour 1788.)

Quoiqu'il en ſoit j'ai calculé mon obſervation, ainſi que celle de Mr. Bode, par la méthode de Mr. Du Sejour, (Traité analytique des mouvemens apparens des corps celéſtes

Tome

Tome I. pag. 434 et ſuivantes) et je me contente de préſenter les équations de condition entre les élémens du paſſage, ſans en tirer, quant à préſent, aucun réſultat, attendant pour cela que quelques autres obſervations de ce paſſage nous ſoient parvenues.

L'entrée de Mercure ayant précédée midi, j'ai auſſi obſervé les paſſages au méridien du ſoleil et de cette planète, ainſi que leurs diſtances au zénith. J'en ai conclu les aſcenſions droites et les déclinaiſons de ces deux aſtres, et enſuite leurs longitudes et latitudes qui, comparées à celles que donnent les tables, m'en ont fait connoître les erreurs. Enfin au moyen de la différence en longitude de ces deux aſtres et de leur mouvement horaire relatif, j'en ai déduit l'inſtant de leur conjonction ainſi que leur longitude et la latitude de Mercure en conjonction.

Le 16 Avril 1799.

La pendule marquoit lors de la culmination de

α de l'Hydre $9^h\ 19'\ 12''\ 7$
α du Lion . $9\ 59\ 9''\ 5$

mais ce jour là on avoit:

Aſcenſion droite apparente en tems de

α de l'Hydre $9^h\ 17'\ 40''\ 92$
α du Lion . $9\ 57'\ 37''\ 53$

partant la pendule avançoit le 16 Avril ſur le tems ſidéral de $1'\ 32''\ 0$.

Le 7 May.

Paſſage de Mercure ſur le diſque du ſoleil.

La pendule marquoit lors de

		l'entrée	la ſortie
du	premier bord . . .	2^h 9′ 43″ 0	9^h 32′ 35″ 0
	centre (par eſtimation)	2 11′ 5″ 0	9 34 0″ 0
	ſecond bord . . .	2 12′ 30″ 0	9 35′ 22″ 0

et lors du paſſage au méridien

du premier bord du ſoleil	2^h 56′ 59″ 5
du centre de Mercure	2 58′ 59″ 0
du ſecond bord du ſoleil	2 59 12″ 6
d'Aldebaran	4 25′ 16″ 4
de Regulus	3^h 58′ 31″ 5

mais le 7 May on avoit:

Aſcenſion droite apparente en tems de

α du Taureau . . .	4^h 24′ 23″ 80
α du Lion	3 57′ 39″ 48.

Ces quantités comparées aux précédentes donnent pour avancement de la pendule ſur le tems ſidéral le 7 May 52″ 3 et pour retardement diurne 2″ 5.

La diſtance apparente au zénith

du bord intérieur du ſoleil étoit de	43° 19′ 18″ 2
du centre de Mercure étoit de	43° 3′ 14 3
le tems moyen à midi étoit le 7 May de .	23^h 56′ 15″ 7

Les tables du ſoleil donnent pour cet inſtant:

Longitude vraye du ſoleil	1^s 16° 46′ 30″ 0

Décli-

Déclinaiſon boréale du ſoleil . . . . . . 16° 52′ 8″ 9

en employant pour obliquité apparente de l'écliptique . . . . 23° 28′ 9″ 9

Demi-diamètre horiſontal . . . . . . 15′ 51″ 44

Parallaxe horiſontale . . . . 8″ 42

Mouvement horaire . . . . 2′ 24″ 91

Equation du tems . . . . 3′ 44″ 3

Lors de la culmination du centre du ſoleil la pendule marquoit . . . . 2^h 58′ 6″ 0

Mais elle avançoit alors ſur le tems ſydéral de 52″ 8

On avoit donc pour le tems ſydéral de ſa culmination . . . . 2^h 57′ 13″ 2

D'où ſuit ſon aſcenſion droite . . . . . 1^s 14° 18′ 18″ 0

Et ſa longitude vraye . . . . 1^s 16° 46′ 39″ 1

Avec la diſtance apparente du bord inférieur du ſoleil au zénith ci-deſſus on trouve, en employant + 53″ 6 pour refraction et — 6″ 08 pour parallaxe de hauteur:

Déclinaiſon vraye boréale du centre du ſoleil 16° 52′ 9″ 2

L'erreur des tables du ſoleil en longitude étoit = + 9″ 1

Lors de la culmination de Mercure la pendule marquoit . . . . 2^h 58′ 59″ 0

Son avancement étoit de . . . . 52″ 8

Le tems ſydéral du paſſage de Mercure étoit donc 2^h 58′ 6″ 2

et partant ſon aſcenſion droite . . . . 1^s 14° 31′ 33″ 0

On avoit pour tems moyen correſpondant . 23^h 57′ 27″ 7

Les Tables de Mercure donnent pour cet inſtant:

Longitude vraie géocentrique de Mercure 1^s 16° 58′ 32″ 8

Latitude vraie géocentrique de Mercure . . 0° 3′ 38″ 2

 Paral-

Parallaxe horiſontale	15″ 45
Diamètre horiſontal	12″ 40
Mouvement horaire géocentrique en longitude .	3 55″ 7
Mouvement horaire géocentrique en latitude .	43″ 7

D'ailleurs avec la diſtance au zénith de Mercure ci-deſſus on trouve, en enployant la réfraction de + 53″ 1 et la parallaxe de hauteur — 10″ 5.

Déclinaiſon boréale de Mercure . . .	16° 52′ 26″ 0
On a donc longitude géocentrique de Mercure	1ˢ 16° 58′ 50″ 6
Latitude géocentrique auſtrale de Mercure .	0° 3′ 38″ 1

Ces deux dernières quantités, comparées avec celles qui ſont tirées des tables, donnent l'erreur des tables de Mercure nulle en latitude et de + 27″ 8 en longitude.

Lors de la culmination de Mercure, c'eſt-à-dire	23^h 57′ 27″ 9
La longitude vraye du ſoleil étoit de .	1ˢ 16° 46′ 41″ 2
Et par conſéquent la différence de longitude géocentrique de Mercure au ſoleil étoit de .	12′ 16″ 2
Mais à raiſon du mouvement horaire relatif .	— 3′ 55″ 7
de Mercure au ſoleil cette différence répond à	3^h 7′ 24″ 5
de tems, qui ajoutées à	23^h 57′ 27″ 9
Donnent pour tems moyen de la conjonction .	3^h 4′ 52″ 4
On trouve enſuite longitude des deux aſtres	1ˢ 16° 54′ 13″ 8
et latitude géocentrique auſtrale de Mercure	0° 5′ 54″ 7

Maintenant voici mon obſervation du paſſage de Mercure, corrigée de l'avancement de la pendule et réduite en tems moyen et vrai, celle de Mr. Bode vient enſuite:

à St.

à St. Pétersbourg.

	Tems de l'entrée moyen	Tems de l'entrée vrai	Tems de la ſortie moyen	Tems de la ſortie vrai
Premier bord	23^h 7′ 57″ 8	23^h 11′ 41″ 4	6^h 29′ 42″ 0	6^h 33′ 26″ 5
Centre . .	23 9 23 6	23 13 7″ 2	6 31′ 4″ 8	6 34 49″ 3
Second bord	23 10′ 47″ 3	23 14 30 9	6 32 32″ 5	6 36 17″ 0

à Berlin.

Premier bord	22^h 0′ 28″ 0	22^h 4′ 11″ 6	5^h 22′ 17″ 0	5^h 26′ 1″ 5
Second bord	22 3′ 46″ 0	22 7′ 29″ 6	5 25 30″ 0	5 29 14″ 5

Pour former l'angle horaire du ſoleil je retrancherai 4′ 31″ 0 du tems vrai de chaque phaſe, pour avoir égard à l'aberration de la lumiere.

Elémens, du calcul relatif au paſſage de Mercure ſur le disque du ſoleil, dans ſon noeud deſcendant le 7 May 1799, tirés des tables aſtronomiques.

Heure vraie que l'on comptoit à Paris a l'inſtant de la conjonction

de Mercure et du ſoleil vuë du centre de la terre	1^h 7′ 34″ 0
Longitude héliocentr: de Mercure et de la terre	7^s 16° 53′ 43″ 9
Longitude géocentrique du ſoleil à l'inſtant de la conjonction	1^s 16° 53′ 43″ 9
Obliquité apparente de l'écliptique . . .	23° 28 9″ 9
Déclinaiſon boréale du ſoleil	16° 54′ 15″ 1
Diſtance de la terre au ſoleil	1, 009624

Paral-

Parallaxe horiſontale du ſoleil	8″ 42
Demi-diamètre horiſontal du ſoleil . .	15′ 51″ 84
Mouvement horaire du ſoleil	2′ 24″ 91
Latitude héliocentrique de Mercure en conjontion	7′ 2″ 2
Latitude géocentrique de Mercure . . .	5′ 44″ 2
Diſtance de Mercure au ſoleil	0, 443136
Diſtance de Mercure à la terre	0, 556471
Trajet de la lumiere de Mercure à la terre .	4′ 31″ 0
Parallaxe horiſontale de Mercure . . .	15″ 45
Diamètre horiſontal de Mercure	12″ 40
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en longitude	7′ 13″ 8
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en latitude	+ 53″ 6
Mouvement horaire géocentrique de Mercure en longitude	1′ 30″ 8
Mouvement horaire géocentrique de Mercure en latitude	+ 43″ 7
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure au ſoleil	4′ 48″ 9
Mouvement horaire géocentrique de Mercure au ſoleil	− 3′ 55″ 7

De

De ces élémens on conclue.

Longit. Sol.	$= 46^\circ\ 53'\ 43''$	9
ω	$= 23\ 28\ 9''$	9
δ	$= 16^\circ\ 54\ 15''$	1
2δ	$= 33\ 48'\ 30''$	2
p	$= 0^\circ\ 0'\ 8''$	42
σ	$= 0\ 15'\ 51''$	84
μ'	$= -\ 4'\ 48''$	9
μ	$= 3'\ 55''$	7
ν	$= +\ 0'\ 53''$	6
ϑ	$= 190^\circ\ 30'\ 38''$	3
Φ	$= 207\ 2'\ 7''$	8
λ'	$= -\ 7'\ 2''$	2
λ	$= -\ 5'\ 44''$	2
π	$= 0^\circ\ 0'\ 15''$	45
$(\pi-p)$	$= 0^\circ\ 0'\ 7''$	03
s	$= 0'\ 0'\ 6''$	20
$\Delta=\sigma+s$	$= 0^\circ\ 15\ 58''$	04
$\Delta'=\sigma-s$	$= 0^\circ\ 15'\ 45''$	64
s	$= 1,\ 00335$	
∂	$= 0,\ 438512$	
$\frac{\partial}{1-\partial}$	$= 0,\ 782252$	

Logarithmes

cosin longit. ☉	$+ 9.8346311$
sin ω	$+ 9.6001661$
cos ω	$+ 9.8624984$
tang ω	$+ 9.6376677$
sin δ	$+ 9.4635538$
cos δ	$+ 9.9808176$
tang δ	$+ 9.4827362$
sin 2δ	$+ 9.7454006$
sin p	$+ 5.6101480$
sin μ'	$- 7.1463226$
sin μ	$- 7.0579335$
sin m	$- 3.5016310$
sin ϑ	$- 9.2610670$
cos ϑ	$- 9.9926499$
tang ϑ	$+ 9.2684171$
sin Φ	$- 9.6575744$
cos Φ	$+ 9.9497441$
tang Φ	$- 9.7078303$
sin λ'	$- 7.3110926$
sin λ	$- 7.2223852$
sin π	$+ 5.8742789$
sin $(\pi-p)$	$+ 5.5324127$
ϱ	$+ 0,0014501$
arc 15°	$+ 9.4179686$
∂	$+ 9.6423775$
$\frac{\partial}{1-\partial}$	$+ 9.8933465$

Quan-

Quantités conſtantes.

R.

(1) Logar. $\cos\delta\ \cos\Phi$ $+ 9.9305617$
(2) Logar. $\varrho\ \sin\Phi$ $- 9.6590245$
(3) Logar. $\varrho\ \sin\delta\ \cos\Phi$ $+ 9.4147480$

S.

(1) Logar. $\cos\delta\ \sin\Phi$ $- 9.6383920$
(2) Logar. $\varrho\ \cos\Phi$ $+ 9.9511942$
(3) Logar. $\varrho\ \sin\delta\ \sin\Phi$ $- 9.1225783.$

E

(1) — — — — — $- 1.0000000$
(2) Logar. $\sin\delta\ \sin\pi$ $+ 5.3378327$
(3) Logar. $\varrho\ \cos\delta\ \sin\pi$ $+ 5.8565466$

K.

(1) Logar. $\varrho\ \sin\delta\ \sin\Phi$ $- 9.1225783$
(2) Logar. $\varrho\ \cos\Phi$. $+ 9.9511942$

D.

(1) Logar. $\varrho\ \sin\delta\ \cos\Phi$ $+ 9.4147480$
(2) Logar. $\varrho\ \sin\Phi$. $- 9.6590245$

$\sin\psi$.

(1) $\sin\lambda\ \cos\vartheta$ . . $+ 0,0016407$
(2) Logar. $\sin(\pi - p)$ $+ .5.5324127$

n

(1) Log. $\left(\frac{\cos\vartheta\sin(\pi-p)}{\cos\lambda\sin m}\right) + 2.0234322$ (3) Log. $\left(\frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda\sin m}\right) + 6.4910195$

(2) $\frac{\cos\vartheta}{\cos\lambda\ \sin m}\ \sin\vartheta\ \sin\lambda + 942''\,91$

δy.

Logar. $\frac{\cos\vartheta\sin(\pi-p)}{13751\sin m} + 7.8850973$ ... Log. $\frac{\cos\vartheta}{206265\ \sin m} + 1.1765938$

Logar. $\frac{\cos\vartheta}{206\,65\sin m}\left(\frac{\partial}{1-\partial}\right) + 1,0699403$ ...

compl. arithm. Log. $\frac{1}{206.64\sin\mu} - 7.6276414$

Cal-

Calcul de l'obſervation de St. Pétersbourg.

On avoit lors de

	l'entrée du premier bord	l'entrée du second bord	la ſortie du premier bord	la ſortie du second bord
Latitude vraie $= 59° 56' 23'' 0$, d'où $l = 59° 51' 24'' 2$				
heure vraie	$23^h 7' 10'' 3$	$23\ 9' 59'' 8$	$6^h 28\ 55'' 7$	$6^h 31' 46'' 2$
d'où h . .	$346° 47' 34'' 5$	$347° 29' 57'' 0$	$97° 13\ 55'' 5$	$97\ 56' 33'' 0$
Δ . . .	$15' 58'' 04$	$15\ 45'' 64$	$15' 45'' 64$	$15' 58'' 04$
sin *l*.	$+ 9 . 9369018$			
cos *l*.	$+ 9 . 7008459$			
Logarithmes: sin h	$- 9 . 3588315$	$9 . 3353653$	$+ 9 . 9965296$	$9 . 9958?38$
cos h	$+ 9 . 9883587$	$9 . 9895801$	$- 9 . 9999869$	$9 . 1404427$
sin h cos l	$- 9 . 9596774$	$8 . 9362112$	$+ 9 . 6973755$	$9 . 6966?97$
cos h cos l	$+ 9 . 6892046$	$9 . 6904260$	$- 8 . 8008328$	$8 . 8412886$
tang Δ	$+ 7 . 6655995$	$7 . 6599237$	$+ 7 . 6599237$	$7 . 6655995$

Avec ces quantités on trouve:

R	$+ 0,557626$	$+ 0,570213$	$+ 0,980617$	$+ 0,981847$
S	$- 0,413796$	$- 0,388240$	$+ 0,060740$	$+ 0,059188$
E	$+ 0,9999466$	$+ 0,999946$	$+ 9,999986$	$+ 0,999936$
ψ	$159° 29' 47'' 8$	$159° 13' 11'' 4$	$20° 35' 30'' 0$	$20° 18' 40'' 0$
n	$- 14419'' 6$	$- 14218'' 3$	$+ 12314'' 9$	$+ 12515'' 6$
K	$+ 0,451531$	$+ 0,449602$	$- 0,122559$	$- 0.127966$
D . . .	$+ 0,193147$	$+ 0,201152$	$- 0,100625$	$- 0,097598$
y	$1^h 59' 54'' 9$	$1^h 59' 24'' 0$	$1^h 56' 6'' 8$	$1^h 55' 38'' 6$

On avoit donc à St. Pétersbourg.

Lors du contact extérieur des limbes à l'entrée:

$$y + \delta y = + 1^h 59' 54'' 9 - 0,997089\, \delta k + 16,0330\, \delta\Delta$$
$$+ 2,7821\, \delta\lambda + 7.3106\, \delta p + 61,1779\, \delta\mu.$$

Lors du contact intérieur des limbes à l'entrée:

$$y' + \delta y' = + 1^h\, 59'\, 24''0 - 0,997134\, \delta h' + 16,0623\, \delta \Delta$$
$$+ 2,8635\, \delta \lambda + 7,1027\, \delta p + 60,3239\, \delta \mu.$$

Lors du contact intérieur des limbes à la ſortie:

$$'y + \delta' y = + 1^h\, 56'\, 6''\, 8 + 1,001231\, \delta' h - 16,0423\, \delta \Delta$$
$$- 8,2869\, \delta \lambda - 5,0416\, \delta p - 52,2483\, \delta \mu.$$

Lors du contact extérieur des limbes à la ſortie:

$$y'' + \delta y'' = 1^h\, 55'\, 38''6 + 1,001262\, \delta h'' - 16,0130\, \delta \Delta$$
$$- 8,2045\, \delta \lambda - 5,0063\, \delta p - 53,0998\, \delta \mu.$$

d'où l'on tire les équations de condition ſuivantes:

Equation de condition entre les contacts extérieurs des limbes lors de l'entrée et de la ſortie:

$$0 = - 256''3 + 1,001262\, \delta h'' - 0,997089\, \delta h - 32,0460\, \delta \Delta$$
$$- 10,9866\, \delta \lambda - 12,3169\, \delta p - 114,2777\, \partial \mu.$$

Equation de condition entre les contacts intérieurs des limbes lors de l'entrée et de la ſortie:

$$0 = - 197''2 + 1,001231\, \delta h + 0,997134\, \delta h' - 32,3046\, \delta \Delta$$
$$- 11,1504\, \delta \lambda - 12,1443\, \delta p - 112,5722\, \delta \mu.$$

Cal-

Calcul de l'obſervation de Berlin.

On avoit lors de

	L'entrée du		La ſortie du	
	premier bord	second bord	premier bord	second bord

Latitude vraie = 52° 31″ 30′ 0, d'où l = 52° 25′ 57″ 4

heure vraie	21ʰ 59′ 40′ 5	22 2′ 58″ 7	5ʰ 21′ 30″ 4	5ʰ 24′ 43″ 6
d'ou h .	329° 55″ 7″5	330 44 40 ″5	80° 22 30″ 6	81° 10′ 54″ 0
Δ . .	15′ 58″ 04	15′ 45″ 64	15 45 64	15 58″ 04

sin l + 9 . 8930741
cos l + 9 . 7851123

Logarithmes

sin b	− 9 . 7000349	9 . 6890456	+ 9 . 9938453	9 . 9948358
cos b	+ 9 . 9371745	9 . 9407405	− 9 . 2231591	9 . 1855480
sin b cos l	− 9 . 4851472	9 . 4741579	+ 9 . 7789576	9 . 7799481
cos b cos l	+ 9 . 7222868	9 . 7258528	+ 9 . 0082714	8 . 9706603
tang Δ	+ 7 . 6655995	7 . 6599237	+ 7 . 6599237	7 . 6655995.

Avec ces quantités on trouve:

R	+ 0, 399046	+ 0, 401398	+ 0, 923176	+ 0, 925999
S	− 0, 547870	− 0, 54469	+ 0, 206016	+ 0, 206121
E	+ 0, 999945	+ 0, 999944	+ 0, 99975	+ 0, 999976
ψ	159° 25 31″ 7	159° 8′ 32″2	20° 37 2 4	20° 20 11″ 0
n	− 14428″ 2	− 14227 6	+ 12328 ′0	+ 12526 9
K	+ 0, 512024	+ 0, 51490	+ 0, 011375	+ 0, 003636
D	+ 0, 161195	+ 0, 165163	− 0, 109726	− 0, 042627
y	52′ 34″ 7	52′ 32″ 3	48′ 28″ 4	48′ 22″ 7

On avoit donc à Berlin:

Lors du contact extérieur des limbes à l'entrée:

$$y + \delta y = + 52' 34'' 7 - 0,996533\, \delta h + 16,0405\, \delta \Delta + 2,8030\, \delta \lambda + 8,1956\, \delta p + 61,2144\, \delta \mu.$$

 Lors

Lors du contact intérieur des limbes à l'entrée :

$$y' + \delta y' = + 52\ 32''\ 3 - 0,996530\ \delta h' + 16,0705\ \delta\Delta + 2,8865\ \delta\lambda + 8.1457\ \delta p + 60,3632\ \delta\mu.$$

Lors du contact intérieur des limbes à la ſortie :

$$'y + \delta' y = + 48'\ 28''\ 4 + 1,000230\ \delta' h - 16,0450\ \delta\Delta - 8.2945\ \delta\lambda - 6,5002\ \delta p - 52,3039\ \delta\mu.$$

Lors du contact extérieur des limbes à la ſortie:

$$y'' + \delta y'' = + 48\ 22''\ 7 + 1,000296\ \delta h'' - 16,0156\ \delta\Delta - 8.2119\ \delta\lambda - 6.4532\ \delta p - 53.1476\ \delta\mu ;$$

d'où l'on tire ces équations de condition :

Equation de condition entre les contacts extérieurs des limbes lors de l'entrée et de la ſortie

$$0 = - 252''\ 0 + 1,000296\ \delta h'' + 0,996533\ \delta h - 32,0561\ \delta\Delta - 11,0149\ \delta\lambda - 14,6488\ \delta p - 114,3620\ \delta\mu.$$

Equation de condition entre les contacts intérieurs des limbes lors de l'entrée et de la ſortie :

$$0 = - 243''\ 9 + 1,000230\ \delta' h + 0,996530\ \delta h' - 32,1155\ \delta\Delta - 11,1810\ \delta\lambda - 14,6459\ \delta p - 112,6669\ \delta\mu.$$

ESSAI

ESSAI
SUR LA METHODE
DE TROUVER LA LATITUDE SUR MER
PAR LES HAUTEURS SIMULTANÉES
DE DEUX ASTRES.

PAR
Mr. KRAFFT.

Préſenté et lû le 28. Nov. 1799.

La détermination exacte de la latitude ſur Mer eſt non ſeulement en elle même un point eſſentiel de la Navigation hauturiere; le Pilote en a encore un beſoin continuel pour corriger ſon éſtime des routes, qu'il n'a d'autres moyens de faire que ſur le témoignage aſſez incertain du Lock et du Compas de route. Malgré ce beſoin et le nombre des méthodes qu'on a imaginées pour déterminer la latitude, la Marine n'en poſſede guerre qu'une ſeule, celle des hauteurs meridiennes des Aſtres, qui ſoit propre à ſes uſages, parceque contrarié dans la préciſion de ſes obſervations par bien de circonſtances ſur Mer, le Pilote trouve dans cette méthode le grand avantage, d'en obtenir pour ſa latitude un reſultat préciſement auſſi exact, que l'eſt l'obſervation dont il ſe ſert, aulieu que dans l'emploi des autres méthodes l'erreur commiſe dans l'obſervation en produit une plus grande encore ſur la latitude qu'on en deduit. Il s'enſuit, que pour employer avec ſureté ces ſortes de méthodes, il faut être à même de mettre une grande préciſion dans les obſervations qui leur ſervent de baſe, et que par conſéquent leur

leur utilité pour la Marine dépend du perfectionnement des Inſtrumens dont on ſe ſert ſur Mer pour obſerver les Aſtres; auſſi bientôt après que la Marine ſe vit en poſſeſſion des Octans à reflexion, à la place des anciens quartiers anglois, pour prendre hauteur, elle commença à ſe ſervir auſſi en certains cas des hauteurs des Aſtres priſes hors du meridien mais dans le voiſinage du midi. Or cet inſtrument, vraiment précieux à la Marine, étoit d'abord encore bien éloigné de ce haut degré de perfection où il eſt porté aujourd'hui; il a reçu ſurtout une nouvelle augmentation très-importante par l'invention ingenieuſe des horizons artificiels de Gerſon; les experiences nombreuſes de l'illuſtre Mr de Zach font voir la préciſion étonante avec la quelle donne les hauteurs des Aſtres jusqu'aux ſecondes un Sextant de Hadley ſeulement de 6 pouces en rayon, garni d'un Vernier à louppe et accompagné d'un horiſon artificiel à Niveau. Ces conſidérations m'ont porté à faire une ſorte de revue des méthodes que je pouvois recueillir pour déterminer la latitude, afin d'examiner, quelles etoient celles, qui aprés un ſi grand perfectionnement des Sextans de Hadley meritoient d'être tirées de l'abandon où la Marine devoit les laiſſer jusqu'ici par la ſeule raiſon de l'imperfection de ſes anciens inſtrumens à prendre hauteur; la méthode enoncée dans le titre de ce Mémoire m'a parûe entr'autres meriter une attention particulière à cet egard. Je reſerve à la fin de ce mémoire de faire voir et les avantages de cette méthode et les objections qu'on pourroit y faire encore. Le calcul d'après les procedés ordinaires de la Trigonometrie ſphèrique en eſt ſans doute trop embaraſſant pour les Navigateurs aſtronomes; je me ſuis donc appliqué

à le

à le ſimplifier et à l'accommoder autant que poſſible, à l'uſage de la Marine. Expoſer jusqu'à quel point il me ſemble y avoir reuſſi, c'eſt l'objet de ce mémoire.

Problême.

§. 1. Ayant obſervé les hauteurs ſimultanées de deux Aſtres connûs, trouver la latitude du lieu de l'obſervation.

Préparation à la Solution.

Après avoir appliqué aux hauteurs obſervées les corrections neceſſaires et tiré des ephèmerides aſtronomiques pour le tems de l'obſervation les déclinaiſons des deux Aſtres et leur différence en aſcenſion droite, ſoit

Pour l'aſtre qui ſelon le mouvement diurne	La hauteur vraie	La déclinaiſon	Leur différence en aſcenſion droite
précède . .	$= H$	$= D$	$= \vartheta$
ſuit	$= H^*$	$= D^*$	

Suppoſons la latitude cherchée boréale $= l$ et les déclinaiſons des deux Aſtres du coté du Pôle élevé et partant auſſi boréales, de ſorte qu'une latitude negative eſt auſtrale et qu'une déclinaiſon auſtrale eſt negative.

Soient enſuite les quantités calculées d'après ces données

$$\frac{\sin H}{2\cos D\cos\frac{1}{2}\vartheta} + \frac{\sin H^*}{2\cos D^*\cos\frac{1}{2}\vartheta} = M \quad \Big| \quad \frac{\sin(D + D^*)}{2\cos D.\cos D^*\cos\frac{1}{2}\vartheta} = N$$

$$\frac{\sin H}{2\cos D.\sin\frac{1}{2}\vartheta} - \frac{\sin H^*}{2\cos D^*\sin\frac{1}{2}\vartheta} = m \quad \Big| \quad \frac{\sin(D - D^*)}{2\cos D.\cos D^*\sin\frac{1}{2}\vartheta} = n.$$

Solu-

Solution.

1) Qu'on calcule par les nombres M, m, N et n les valeurs

$$A = \frac{MN + mn}{N^2 + n^2 + 1} \text{ et } B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 + 1}.$$

2) Si la valeur B eſt *poſitive*: il y aura deux latitudes l et λ, également ſatisſaiſantes à l'obſervation et de même denomination, ſcavoir toutes les deux boréales, ſi la valeur A eſt poſitive, et toutes les deux auſtrales, ſi la valeur A eſt negative. Pour les trouver, qu'on cherche un angle Φ par l'équation $\sin\Phi = \frac{\sqrt{B}}{A}$ et on aura

$$\sin l = \frac{\sqrt{B}}{\tang \frac{1}{2}\Phi} \text{ et } \sin\lambda = \tang \tfrac{1}{2}\Phi . \sqrt{B}.$$

3) Si la valeur B eſt *negative*: il y aura deux latitude l et λ également ſatisſaiſantes à l'obſervation, mais de différente denomination, l'une boreale, l'autre auſtrale. Pour les trouver, qu'on prenne la valeur B poſitive et qu'on cherche un angle ψ par l'équation $\tang\psi = \frac{\sqrt{B}}{A}$ et on aura

$$\sin l = \frac{\sqrt{B}}{\tang \frac{1}{2}\psi} \text{ et } \sin\lambda = -\tang \tfrac{1}{2}\psi . \sqrt{B}.$$

Demonſtration.

§. 2. Soient les angles horaires inconnûs des deux Aſtres, celui de l'Aſtre précédant $= t$ et celui de l'Aſtre ſuivant $= t^*$, l'un et l'autre vers l'orient de la partie auſtrale du meridien, de ſorte que $t^* = t + \vartheta$. Les principes de la Trigonometrie ſphérique donnent

$$\cos t = \frac{\sin H - \sin D . \sin l}{\cos D . \cos l} \text{ et } \cos t^* = \frac{\sin H^* - \sin D^* \sin l}{\cos L^* . \cos l},$$

d'où

d'où, moyennant des transformations connûes de la différence et de la ſomme des coſinus de deux angles, on obtient

$$\sin(t+\tfrac{1}{2}\vartheta) = \frac{m - n \sin l}{\cos l} \text{ et } \cos(t+\tfrac{1}{2}\vartheta) = \frac{M - N \sin l}{\cos l}.$$

Il s'enſuit, que, quelle que ſoit la poſition des deux Aſtres à l'égard du Meridien, on a toujours

$$\cos l^2 = (m - n \sin l)^2 + (M - N . \sin l)^2$$

ou bien, par le developpement des quarrés

$$\sin l^2 - 2A . \sin l + B = 0.$$

Par la forme de cette équation et par la théorie connue des racines des équations qui en ont de réelles, on voit, que, ſi B eſt une quantité poſitive, les deux racines de l'équation ſont de même nom, ſcavoir toutes les deux poſitives ou toutes les deux negatives, ſelon que la quantité A eſt poſitive ou negative, et partant que les deux latitudes ſatisfaiſantes à l'obſervation ſont de même denomination, boréales, ſi A eſt une quantité poſitive; auſtrales en cas du contraire. Si B eſt une quantité negative, on voit par la même theorie, que, quelle que ſoit la valeur A, l'une des deux racines eſt poſitive et l'autre negative et partant que les deux latitudes également, ſatisfaiſantes à l'obſervation ſont de différente denomination. Soit l'une $= l$; l'autre $= \lambda$, et on aura

$$\sin. l = A + \sqrt{(A^2 - B)} \text{ et } \sin\lambda = A - \sqrt{(A^2 - B)}.$$

Donc ſi B eſt une quantité poſitive; elle ne ſauroit en aucun cas poſſible du problême ſurpaſſer la quantité A^2; il y aura donc toujours un angle Φ tel, que $B = A^2 . \sin\Phi^2$ et partant $\sin\Phi = \frac{\sqrt{B}}{A}$; moyennant quoi on a

$$\sin l = A(1 + \cos\Phi) = \frac{(1 + \cos\Phi)\sqrt{B}}{\sin\Phi} = \frac{\sqrt{B}}{tg\tfrac{1}{2}\Phi} \text{ et}$$

$$\sin\lambda = A(1 - \cos\Phi) = \frac{(1 - \cos\Phi)\sqrt{B}}{\sin\Phi} = tg\tfrac{1}{2}\Phi\sqrt{B}.$$

De même, ſi la quantité B eſt negative, ayant

$$\sin l = A + \sqrt{(A^2 + B)} \text{ et } \sin \lambda = A - \sqrt{(A^2 + B)},$$

quelle que ſoit la relation entre B et A^2, il y aura toujours un angle ψ tel, que $B = A^2 \cdot tg.\psi^2$ et partant $tg\,\psi = \frac{\sqrt{B}}{A}$, moyennant quoi on a

$$\sin l = A \frac{(1 + \cos\psi)}{\cos\psi} = \frac{(1 + \cos\psi)\sqrt{B}}{\sin\psi} = \frac{\sqrt{B}}{tg\,\frac{1}{2}\psi} \text{ et}$$

$$\sin \lambda = A \frac{(\cos\psi - 1)}{\cos\psi} = -\frac{(1 - \cos\psi)\sqrt{B}}{\sin\psi} = -\,tg\,\tfrac{1}{2}\psi \cdot \sqrt{B}.$$

Corollaires.

§. 3. Joignons à cette ſolution du problême les Corollaires ſuivans:

1) La ſolution que je viens de donner, eſt bien plus ſimple et ſurtout beaucoup moins ſujette aux mepriſes dans le calcul, que la ſolution ordinaire qui ſe fait par des procedés connus de la Trigonometrie ſphèrique; celle-cy pour trouver l'une et l'autre des deux latitudes également ſatisfaiſantes à l'obſervation, demande la reſolution de quatre triangles ſpheriques, dont trois dans le cas des deux cotés donnés avec l'angle compris, et un dans le cas de tous les trois cotès donnés; or on ſcait, que ce ſont préciſement les deux cas les plus embaraſſans et ſujets aux mepriſes dans le calcul des triangles ſphèriques obliquangles.

2) Quoique le calcul des quantités

$$A = \frac{M \cdot N + mn}{N^2 + n^2 + 1} \text{ et } B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 + 1}$$

ne ſoit pas fort compliqué: il eſt pourtant ſujet à l'inconveniant, d'obliger le calculateur trop ſouvent de repaſſer des logarithmes aux nombres et reciproquement; et cet inconvenient

con-

convenient eſt d'autant plus grand, quand un ou quelques uns des nombres M, m, N et n ſont grands. Voici un moyen de reduire le calcul des deux quantités A et B à autant de ſimplicité, qu'il ſemble qu'on puiſſe deſirer. Après avoir calculé les nombres M, m, N et n, qu'on cherche quatre angles α, β, γ et δ par les équations

$$\tang \alpha = \frac{m}{M};\ \tang \beta = \frac{n}{N};\ \tang \gamma = \frac{\cos \alpha}{M} \text{ et } \tang \delta = \frac{\cos \beta}{N}$$

et on trouvera facilement, qu'on aura

$$M . N + mn = \frac{M . N \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha . \cos \beta}$$

$$M^2 + m^2 - 1 = \frac{\cos 2\gamma}{\sin \gamma^2} \text{ et}$$

$$N^2 + n^2 - 1 = \frac{1}{\sin \delta^2}$$

ce qui donne pour A et B les expreſſions ſuivantes

$$A = \frac{M . N \cos(\alpha - \beta) \sin \delta^2}{\cos \alpha . \cos \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta) . \sin 2\delta}{2\, g\gamma} \text{ et } B = \frac{\cos 2\gamma \sin \delta^2}{\sin \gamma^2}$$

qu'on calculera à l'aide des Logarithmes ſans aucune difficulté.

3) Malgré ce moyen d'abreger beaucoup le calcul je ne donne point encore la ſolution précédente pour une methode propre à l'uſage de la Marine; les calculs des angles ſubſidiaires, ſur leſquels eſt fondée la ſimplification précédente, pourroient bien être trop longs pour que dans l'application du problême ſur Mer on puiſſe aiſément s'en acquitter. Mais je remarque, que la ſolution que j'ai donnée du problême, eſt ſuſceptible d'être reduite facilement en Tables bien compendieuſes, dont l'application paroit très-propre à la pratique de la Marine.

Maniere de former pour l'application de cette methode des Tables propres à l'uſage de la Marine.

§. 4. L'idée et la formation de ces Tables ſont fondées ſur les conſidérations ſuivantes:

1) Les valeurs N et n étant independantes des hauteurs des deux Aſtres, et les expreſſions pour les valeurs M et m étant de la forme:

$$M = p \sin H + q \,.\, \sin H^* \quad \text{et} \quad m = r \sin H + t \,.\, \sin H^*$$

où les coëfficians p, q, r et t n'en dependent non plus: il eſt clair, que les valeurs:

$$A = \frac{MN + mn}{N^2 + n^2 + 1} \text{ et } B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 + 1} \text{ ſont de la forme:}$$

$$A = a \sin H + b \sin H^* \quad \text{et} \quad B = c \sin H^2 + d \sin H^{*2}$$
$$+ e \sin H \,.\, \sin H^* + f$$

et que les coëfficians a, b, c, d, e et f, également independans des hauteurs ne ſe rapportent qu'à la poſition des deux Aſtres, c'eſt à dire, à leurs déclinaiſons et à leur différence en aſcenſion droite.

2) Faiſant donc dans les expreſſions des valeurs A et B les ſubſtitutions $M = p \sin H + q \sin H^*$ et $m = r \sin H + t \sin H^*$, on trouve d'abord:

$$A = \frac{N \,.\, p + n \,.\, r}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H + \frac{N \,.\, q + n \,.\, t}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H^* \quad \text{et}$$

$$B = \frac{p^2 + r^2}{N^2 + n^2 + 1} \sin H^2 + \frac{q^2 + t^2}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H^{*2}$$
$$+ \frac{2(pq + rt)}{N^2 + n^2 + 1} \,.\, \sin H \,.\, \sin H^* - \frac{1}{N^2 + n^2 + 1}$$

de

de façon, que

$$a = \frac{N.p + n.r}{N^2 + n^2 + 1};\ b = \frac{N.q + n.t}{N^2 + n^2 + 1};\ c = \frac{p^2 + r^2}{N^2 + n^2 + 1}$$

$$d = \frac{q^2 + t^2}{N^2 + n^2 + 1};\ e = \frac{2(pq + rt)}{N^2 + n^2 + 1};\ f = \frac{-1}{N^2 + n^2 + 1}.$$

Faiſant maintenant, comme cy-deſſus (§. 3.)

$$\frac{n}{N} = \text{tang}\,\beta;\ \frac{\cos\beta}{N} = \text{tang}\,\delta \text{ et partant } N^2 + n^2 + 1 = \frac{1}{\sin\delta^2}$$

on obtient

$$\frac{N}{N^2 + n^2 + 1} = \frac{\cos\beta\ \sin 2\delta}{2} \text{ et } \frac{n}{N^2 + n^2 + 1} = \frac{\sin\beta\ \sin 2\delta}{2}$$

et par conſéquant

$$a = \frac{\sin 2\delta}{2}\,(p.\cos\beta + r.\sin\beta)$$

$$b = \frac{\sin 2\delta}{2}\,(q.\cos\beta + t.\sin\beta)$$

$$c = (p^2 + r^2)\sin\delta^2;\ d = (q^2 + t^2)\sin\delta^2$$

$$e = 2\,(pq + rt)\ \sin\delta^2 \text{ et } f = -\sin\delta^2.$$

Or ayant (§. 1)

$$p = \frac{1}{2\cos D.\cos\frac{1}{2}\vartheta};\ q = \frac{1}{2\cos D^*.\cos\frac{1}{2}\vartheta};$$

$$r = \frac{1}{2\cos D.\sin\frac{1}{2}\vartheta} \text{ et } t = \frac{-1}{2\cos D^*\sin\frac{1}{2}\vartheta}$$

et partant

$$p^2 + r^2 = \frac{1}{\cos D^2.\sin\vartheta^2};\ q^2 + t^2 = \frac{1}{\cos D^{*2}.\sin\vartheta^2} \text{ et}$$

$$pq + rt = \frac{-\cos\vartheta}{\cos D.\cos D^*\sin\vartheta^2}$$

on obtient pour le calcul de ces coefficians les expreſſions ſuivantes ſimples et commodes:

$a =$

$$a = \frac{\sin(\frac{1}{2}\vartheta + \beta) . \sin 2\delta}{2 \cos D . \sin \vartheta}$$

$$b = \frac{\sin(\frac{1}{2}\vartheta - \beta) . \sin 2\delta}{2 \cos D^{*} . \sin \vartheta}$$

$$c = \frac{\sin \delta^{2}}{\cos D^{2} . \sin \vartheta^{2}}$$

$$d = \frac{\sin \delta^{2}}{\cos D^{*2} \sin \vartheta^{2}}$$

$$e = \frac{-2 \sin \delta^{2} . \cos \vartheta}{\cos D . \cos D^{*} . \sin \vartheta^{2}} \text{ et}$$

$$f = - \sin \delta^{2}.$$

Il eſt clair, qu'à l'aide de ces formules il eſt facile, de calculer les valeurs de ces coëfficians pour tel couple et pour autant de couples d'etoiles fixes connûes qu'on voudra, et de former de Tables dont chacune préſente pour le couple auquel elle appartient, les valeurs de A et B ſous la forme $A = a . \sin H + b . \sin H^{*}$ et $B = c . \sin H^{2} + d . \sin H^{*2} + e . \sin H . \sin H^{*} + f$ et qui par conſéquent ſera applicable à toutes les hauteurs des deux etoiles qu'on aura pu obſerver.

3) Comme le problême propoſé a ſon application principale dans le cas deſaſtreux où le Pilote preſſé de connoître ſa latitude n'a pour reſource qu'un ciel peu ſerein qui ne lui fait voir que les étoiles les plus luiſantes, et ſe couvrant des nuages fait craindre, qu'on ne manque le moment unique de leurs paſſages par le meridien: il ſuffi-

ſuffiroit de choiſir pour la formation de pareilles tables les étoiles de la premiere grandeur.

4) Ces Tables ſerviroient aux Pilotes de trouver leur latitude par des operations du calcul ordinaire dans la Navigation hauturiere et elles leur rendroient ce ſervice auſſi long-tems que les déclinaiſons et les aſcenſions droites des étoiles aux quelles elles ſe rapportent, n'auront pas changé trop conſiderablement. Or parmi les étoiles de la premiere grandeur la plus grande variation annuelle en aſcenſion droite eſt de 66 ſec. et la plus petite de 30 ſec. et comme il ne s'agit ici que de la différence en aſcenſion droite, la plus grande variation annuelle de l'angle ϑ ne va qu'à 36 ſec.; et encore n'a-t-elle lieu que pour le couple d'étoiles *α* de la Chevre et la luiſante de la Lyre; pour les autres elle eſt beaucoup moindre; p. e. pour Aldebaran et Rigel elle n'eſt, que de 8 ſec. par an. Pour ce qui regarde la declinaiſon, la plus grande variation annuelle pour les étoiles de la premiere grandeur n'en va qu'à 20 ſec. pour quelques unes; pour la plupart elle eſt bien moindre encore p. e. pour Aldebaran elle eſt de 8 ſec. et de 5 ſec. ſeulement pour Rigel; d'ailleurs il eſt aſſes facile de calculer d'avance les petites corrections pu'il faudroit appliquer à la latitude calculée par les Tables, lorsque l'époque des obſervations aura conſidérablement devancé celle qu'on a miſe pour baſe dans la formation des Tables.

5) Pour donner un echantillon de pareilles Tables choiſiſſons les deux étoiles brillantes, Aldebaran dans la Conſtellation du Taureau et Rigel dans celle d'Orion. On trou-

trouve dans les catalogues des étoiles pour le commencement de l'année 1800:

	la déclinaiſon	L'ascension droite
d'Aldébaran	16° 5′ 45″. Bor.	66° 6′ 49″
de Rigel . .	8° 26′ 35″. Auſtr.	76° 13′ 53″

Comme Aldebaran précéde Rigel dans le ſens du mouvement diurne et que la déclinaiſon de Rigel eſt auſtrale: on a

$$D = 16° 5' 45''; \; D^* = - 8° 26' 35'' \text{ et } \vartheta = 10° 7' 4''.$$

Avec ces élémens je trouve

$$N = 0,0703346; \; n = 2,4778491;$$

$$\beta = 88° 22' 26''.7 \text{ et } \delta = 21° 58' 11''.4;$$

moyennant quoi j'obtiens par les équations données cy-deſſus (§. 4. nro. 2.)

$la = 0,3121514 +$	$a = + 2,051878$
$lb = 0,2973340 -$	$b = - 1,983052$
$lc = 0,6913466 +$	$c = + 4,912998$
$ld = 0,6660768 +$	$d = + 4,635288$
$le = 0,9729348 -$	$e = - 9,395822$
$lf = 9,1460180 -$	$f = - 0,139964$

De forte que pour le couple d'étoiles: Aldébaran et Rigel, on a

$$A = 2,051878 . \sin H - 1,983052 . \sin H^* \text{ et}$$

$$B = 4,912998 . \overline{\sin H}^2 + 4,635288 . \overline{\sin H^*}^2$$
$$- 9,395822 . \sin H . \sin H^* - 0,139964.$$

Comme dans le calcul de la latitude on n'a nul beſoin de connoître ces coefficiens mêmes, excepté le nombre abſolu f qui n'eſt affecté d'aucun ſinus, et qu'il ſuffit d'avoit les loga-

logarithmes des autres: je les donne ſous le titre: Logarithme du multiplicateur, et je forme la Table ſuivante:

Echantillon des Tables:

Couple d'Etoiles: Aldebaran et Rigel. (H A) deſigne la hauteur vraie d'Aldebarani et (H R) celle de Rigel			
Pour calculer A		Pour calculer B	
	Logar. du multiplicateur.		Logar. du multiplicateur.
+ sin (H A)	0, 3121514	+ sin $(HA)^2$	0, 6913466
− sin (H R)	0, 2973340	+ sin $(HR)^2$	0, 6660768
		− sin(H A) . sin(H R)	0, 9729348
		− 0, 1399645.	

§. 5. Si donc le Pilote ne voit que ces deux étoiles et s'il ne les voit que pour le peu de tems qu'il lui faut pour en prendre les hauteurs ſimultanées: il pourra trouver à l'aide de cette Table la latitude du vaiſſeau par un calcul ſimple et facile et qui eſt neceſſairement à la portée de tout Pilote hauturier. Eclairciſſons ce calcul par un exemple:

Exemple.

On a obſervé ſur Mer les hauteurs ſimultanées d'Aldebaran et de Rigel, et après les avoir corrigées en raiſon de la hauteur d'oeil au deſſus de la ſurface de la Mer et en raiſon de la refraction, on en a conclu la hauteur vraie d'Aldebaran 40° 30′ et celle de Rigel 17° 10′. On demande la latitude du Vaiſſeau.

On a donc (H A) = 40° 30′ et (H R) = 17° 10′ et le calcul ſe fera de la façon ſuivante:

Calcul pour les valeurs A et B.

Pour A.	Pour B.	
$l.\sin(HA) = 9{,}8125444+$	$l\ \sin(HA)^2 = 9{,}6250888\ +$	Partie I $= +2{,}072214$
$l.$ multipl. $= 0{,}3121514$	l multipl. $= 0{,}6913466$	Part. II $= +0{,}403802$
$l.$ Part. I $= 0{,}1246958+$	$l.$ Partie I $= 0{,}3164354+$	$+2{,}476016$
$l.\sin(HR) = 9{,}4700461\ -$	$l.\ \sin(HR)^2 = 8{,}9400922+$	Part. III $= -1{,}801045$
$l.$ multipl. $= 0{,}2973340$	$l.$ multiplic. $= 0{,}6660768+$	$+0{,}674971$
$l.$ Part. II $= 9{,}7673801-$	$l.$ Partie II $= 9{,}6061690+$	Nombr.abs. $= -0{,}139964$
Partie I $= +1{,}332586$	$l.\sin(HA) = 9{,}8125444+$	B $= +0{,}535007$
Partie II $= -0{,}585302$	$l.\sin(HR) = 9{,}4700461\ -$	
A $= +0{,}747284$	$l.$ multiplic. $= 0{,}9729348$	
	$l.$ Partie III. $= 0{,}2555253\ -$	

Calcul pour les latitudes.

$l.\,B = 9{,}7283595$	$\frac{1}{2}\Phi = 39°\ 5'\ 26''$
$l.\sqrt{B} = 9{,}8641797$	$l.\sqrt{B} = 9{,}8641797$
$l.\,A = 9{,}8734858$	$l.\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}\Phi = 9{,}9097722$
$l.\frac{\sqrt{B}}{A} = 9{,}9906939 = l\sin\Phi$	$l.\ \frac{\sqrt{B}}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\Phi} = 9{,}9544075 = l.\sin l$
$\Phi = 78°\ 10'\ 52''$	$l.\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}\Phi\sqrt{B} = 9{,}7739519 = l.\sin\lambda$

et partant les deux latitudes ſont:

$l = 64°\ 12'\ 11'$. Bor. et $\lambda = 36°\ 27'\ 27'$ Bor.

Comme

Comme donc le Pilote connoit toujours à quelque choſe près l'endroit où il ſe trouve, il lui ſera facile de diſtinguer, la quelle de ſes deux latitudes eſt celle de ſon vaiſſeau.

Quelques cas particuliers du Problême.

§. 6. Dans le nombre de cas différens qui ſont compris dans ce Problème, il y a quelques uns, qui meritent un developpement particulier:

1) Les deux Aſtres ayant la même aſcenſion droite.

Pour ce cas on a $\vartheta = o$; donc $m = \infty$ et $n = \infty$; ce qui donne

$$A = \frac{M . N + m . n}{N^2 + n^2 + 1} = \frac{m}{n} \text{ et } B = \frac{M^2 + m^2 - 1}{N^2 + n^2 - 1} = \frac{m^2}{n^2} \text{ et partant}$$

$$\frac{\sqrt{B}}{A} = \sin\Phi = 1 \text{ et } tg\tfrac{1}{2}\Phi = 1. \text{ D'où l'on trouve}$$

$$\sin l = \sin\lambda = \sqrt{B} = A = \frac{m}{n} = \frac{\cos\iota^* \sin H - \cos\iota . \sin H^*}{\sin(\iota - \iota^*)}.$$

On obtient le même reſultat auſſi par les formules données cy-deſſûs (§. 3. nro. 2); car ayant $m = \infty$ et $n = \infty$, on a $\alpha = 90°$; $\beta = 90°$; $\gamma = o$ et $\delta = o$ et par conſéquent

$$A = \frac{\cos(\gamma - \beta) \sin 2\delta}{2\, tg\, \gamma} = \frac{\sin\delta}{tg\, \gamma} \text{ et}$$

$$B = \frac{\cos 2\gamma . \sin\delta^2}{\sin\gamma^2} = \frac{(1 - tg\gamma^2) \sin\delta^2}{tg\gamma^2} = \frac{\sin\delta^2}{tg\gamma^2} \text{ donc}$$

$$\frac{\sqrt{B}}{A} = 1 = \sin\Phi; \; tg\tfrac{1}{2}\Phi = 1 \text{ et}$$

$\sin l = \sin\lambda = \sqrt{B} = A = \frac{\sin\delta}{tg\, \gamma} = \frac{0}{0}$. Pour trouver la valeur de cette quantité indeterminée, on remarque, que

$$\frac{tg\,\delta}{tg\,\gamma} = \frac{M . \cos\beta}{N . \cos\alpha}; \text{ et partant } \frac{\sin\delta}{tg\,\gamma} = \frac{M . \cos\beta}{N . \cos\alpha} = \frac{m . \sin\beta}{n . \sin\alpha} = \frac{m}{n};$$

comme cy-deſſûs.

2) Les

2) Les deux Aſtres ayant la même déclinaiſon.

Pour ce cas à cauſe de $D^* = D$, on a $n = 0$:

$$M = \frac{\sin H + \sin H^*}{2 \cos D . \cos \frac{1}{2} \vartheta}; \quad m = \frac{\sin H - \sin H^*}{2 \cos D . \sin \frac{1}{2} \vartheta} \text{ et } N = \frac{\operatorname{tg} D}{\cos \frac{1}{2} \vartheta}$$

donc $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{M} = \frac{\sin H - \sin H^*}{(\sin H + \sin H^*) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \vartheta}$

$\beta = 0$; $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \alpha}{M}$ et $\operatorname{tg} \delta = \frac{\cos \frac{1}{2} \vartheta}{\operatorname{tg} D}$ d'où l'on obtient

$$A = \frac{\cos \alpha \sin 2\delta}{2 \operatorname{tg} \gamma} \text{ et } B = \frac{\cos 2\gamma . \sin \delta^2}{\sin \gamma^2}.$$

Ayant trouvé les valeurs A et B, le reſte du calcul s'achève, comme cy-deſſus.

3) Les deux Aſtres ayant la même hauteur.

Pour ce cas, à cauſe de $H = H^*$, on aura (§. 4.)

$$A = (a + b) . \sin H \text{ et } B = (c + d + e) . \sin H^2 + f.$$

C'eſt ainſi p. e. que pour Aldebaran et Rigel on a., en cas d'égalité des hauteurs ſimultanées, $A = 0,0688258 . \sin H$ et $B = 0,1524683 \sin H^2 - 0,1399645$, et le calcul de la latitude eſt bien ſimple et court; mais ce n'eſt pas le cas, que peut attendre le Pilote preſſé de connoître ſa latitude.

4) Les deux Aſtres ſe levant ou ſe couchant en même tems.

Pour ce cas on a $H = H^* = 0$, et partant $A = 0$ et $B = f = -\sin \delta^2$; d'où en prenant B poſitif, on obtient

tg ψ

$\text{tg}\,\psi = \frac{\sin\delta}{A} = \infty$ et partant $\text{tg}\,\frac{1}{2}\psi = 1$. On a donc $\sin l = \sin\delta$ et $\sin\lambda = -\sin\delta$; les deux latitudes ſont donc l'une et l'autre, $= \delta$, l'une boréale, l'autre auſtrale.

§. 7. Aprés la methode des hauteurs meridiennes, qui, quand on peut en faire uſage, eſt ſans contredit la plus directe et la plus ſure, il paroit, que la methode, que je viens d'expoſer et d'accommoder à l'uſage de la Marine, merite d'être miſe au niveau de celle de deux hauteurs ſucceſſives d'un même Aſtre. 1) parce qu'elle eſt independante de toute meſure du tems, par la quelle celle-cy n'eſt que trop bornée et qui ſur Mer eſt toujours ſujette à bien de précautions et pourroit bien en cas d'accidens y manquer abſolument. 2) Parce qu'elle ne demande aucune correction en raiſon du ſillage et du rhum de vent que le vaiſſeau a couru dans l'intervalle du tems qui ſepare les deux hauteurs ſucceſſives d'un même aſtre et 3) parce qu'elle eſt practicable même dans le tems le moins favorable, où le ciel n'accorderoit au Navigateur, que l'apparition courte et paſſagere de deux étoiles connues. Mr. Bezout dans la ſuite de ſon cours de mathematiques à l'uſage de la Marine, fait une courte mention de cette methode et y oppoſe des objections; d'abord qu'elle demande le concours de deux obſervateurs, et puis qu'on ne ſauroit être aſſuré, qu'avec deux obſervateurs les deux obſervations ſeront parfaitement ſimultanées. Comme Mr. Bezout ajoute lui même des moyens de remedier à ces difficultés, ſi elles avoient reellement lieu; je ne m'y arrete pas d'avantage.

SUR

SUR L'OCCULTATION DE ε DES GEMAUX du 8 Août 1798.

Par *Mr. L'ABBÉ HENRY.*

Préſenté et lû le 27 Fevrier 1800.

Je vais commencer par expoſer l'obſervation que j'ai faite de cette éclipſe avec le détail des circonſtances qui l'ont accompagnées, j'y joindrai enſuite les obſervations de la même éclipſe faites à Leipzick, Dantzick, Ofen et Celle, telles qu'elles ont été publiées par la voye des éphemerides géographiques de Mr. de Zach; et après avoir calculé chacune ſéparément, j'en comparerai les réſultats, à l'effet d'en déduire la différence des Méridiens de ces différentes villes avec celui de Péterſboug.

La nuit de cette éclipſe le ciel fut très ſérein jusques vers les deux heures du matin, où quelques légers nuages s'élèverent au nord oueſt. Ces nuages en ſe portant de cette plage vers l'oppoſée, paſſèrent devant la lune et la couvrirent par intervalles. Cette circonſtance m'empècha d'obſerver l'inſtant précis de l'immerſion de l'étoile qui d'un inſtant à l'autre diſparoiſsoit et reparoiſsoit alternativement à mes yeux. Cependant comme l'inſtant, où elle me parût réellement cachée par la lune, n'eſt éloigné de celui où je l'apperçus pour la dernière fois, que de quatre à cinq ſecondes

condes, l'erreur ſur le tems précis de cette phaſe ne ſurpaſſe pas cette quantité. Lors de l'émerſion de l'étoile le ciel étoit pûr, au moins dans la région de la lune, et malgré la grande clarté du crépuſcule je ſaiſis très-bien l'inſtant où elle reparût.

La petite incertitude qu'il y a ſur le tems de l'immerſion de l'étoile, ne m'a pas empêché de la faire concourir avec l'émerſion à la détermination de la conjonction des deux aſtres.

La pendule reglée ſur le tems ſydéral marquoit le 8 Août lors de

l' { immerſion $0^h\ 5'\ 10''\ 0$
émerſion $0^h\ 51'\ 32''\ 5$.

Le paſſage de Vega au méridien eut lieu, les

7		18^h	$30'$	$3''$	5
8	à	18^h	$29'$	$57''$	0
9		18^h	$29'$	$50''$	5.

Le tems du paſſage de la même étoile, calculé d'aprés le catalogue de Mr. Maſkeline, ou ſon aſcenſion droite apparente en tems, étoit à cette époque de $18^h\ 30'\ 7''\ 84$. La comparaiſon de cette quantité avec les précédentes fait voir que le retard de la pendule, à l'inſtant de la culmination de Vega, étoit le 7, de $4''\ 3$; le 8, de $10''\ 84$ et le 9, de $17''\ 3$, tandisque le retardement diurne, ou plus exactement, le retardement dans l'eſpace de 24 heures ſydérales étoit de $-6''\ 5$.

Retran-

Retranchant le tems du paſſage de Vega au méridien le 8 Août des tems marqués par la pendule lors de l'immerſion et de l'émerſion de ε des gemaux, on a $5^h\ 35'\ 13''$ et $6^b\ 21'\ 35''\ 5$ pour les intervalles qui ſéparent la culmination de Vega de l'immerſion de ε des gemaux, mais a raiſon de $6''\ 5$ en $23^b\ 56$ la pendule a dû retarder pendant ces intervalles de $1''\ 48$ et de $1''\ 72$, ce qui ajouté a $10''\ 84$ donne $12''\ 3$ et $12''\ 6$ pour le retard total de la pendule, lors de l'immerſion et de l'émerſion de cette étoile. On avoit donc

	en tems sydéral	en dégrés de l'équateur
Immerſion . .	$0^b\ 5'\ 22''\ 3$	$1°\ 20'\ 30''\ 7$
Emerſion . .	$0^b\ 51'\ 45''\ 1$	$12°\ 56'\ 16''\ 5$

On trouve pour le tems moyen correſpondant à ce tems ſydéral

Immerſion .	$14^b\ 54'\ 21''\ 7$
Emerſion . .	$15^b\ 40'\ 37''\ 0.$

L'aſcenſion droite moyenne et la déclinaiſon moyenne de ε des gemaux ont été tirées du Catalogue de Mr. de Zach. J'en ai conclu pour le 8 Août le

Lieu apparent de l'étoile

Aſcenſion droite apparente	$97°\ 53'\ 1''\ 8$
Déclinaiſon boréale apparente	$25°\ 19'\ 5''\ 1$
Obliquité apparente de l'écliptique	$23°\ 27'\ 58''\ 9$
Longitude apparente	$97°\ 7'\ 51''\ 6$
Latitude boréale apparente	$2°\ 2'\ 46''\ 4$

On avoit le 8 Août a $15^b\ 17'\ 29''\ 4$ tems moyen du milieu de l'eclipſe, au méridien de Pétersbourg, d'après les

les tables de la lune, qui ſont dans la troiſième édition de l'aſtronomie de Mr. de la Lande)

Longitude vraie de la lune		3^s 6° 34′ 0″ 5
Latitude vraie boréale (croiſſante) . . .		2° 55′ 34″ 5
Mouvement horaire en longitude pour l'heure	précéd.	35′ 1″ 61
	suiv. . .	35′ 3″ 95
Mouvement horaire en latitude pour l'heure	précéd.	2′ 33″ 51
	suiv. .	2′ 32″ 28
Logar. $\left(\frac{\text{mouv. hor. longit.}}{1^h}\right)$ pour l'heure	précéd.	9.7662476
	suiv. . .	9.7667226
Logar. $\left(\frac{\text{mouv. hor. latit.}}{1^h}\right)$ pour l'heure	précéd.	8.6298342
	suiv. . .	8.6263404
Parallaxe horiſontale de la lune à St. Pétersbourg		58′ 48″ 5
Demi-diamètre horiſontal de la lune . . .		32′ 11″ 01
Variation horaire de la parallaxe pour l'heure	précéd.	. + 3″ 2
	suiv. .	. + 2″ 2
Variativn horaire du diamètre pour l'heure	précéd.	. + 1″ 7
	suiv. .	. + 1″ 2

Tels ſont les élémens qui vont ſervir de baſe aux calculs de cette éclipſe.

Voici maintenant les obſervations, annoncées au commencement de ce mémoire, auxquelles je joins auſſi la mienne

Tems moyen des phaſes

Lieux	Immerſion	Emerſion
Pétersbourg .	14^h 54′ 21″ 7	15^h 40′ 37″ 0
Ofen	13^h 57′ 27″ 6	14^h 35′ 37″ 2
Dantzick . .	14^h 1′ 39″ 4	14^h 46′ 45″ 1
Leipzick . .	13^h 35′ 17″ 5	14^h 19′ 31″ 3
Celle	13^h 27′ 42″ 5	14^h 13′ 29″ 2

Va maintenant ſuivre l'expoſé des données et des principaux réſultats du calcul de chacune de ces obſervations, dans le même ordre qu'elles ſont préſentées ici.

Calcul de l'obſervation de St. Pétersbourg.

On avoit lors de	l'Immerſion	Emerſion
Lieu vrai de la lune:		
Longitude de la lune . . .	$3^s 6° 20' 30'' 4$	$3^s 6° 47' 31'' 5$
Latitude vraie boréale . . .	$2° 54' 35'' 3$	$2° 56' 33'' 2$
Parallaxe horiſontale . . .	$58' 47'' 3$	$58' 49'' 3$
Demi-diamètre horiſontal . .	$16' 5'' 2$	$16' 5'' 7$
On avoit auſſi:		
Tems ſydéral en dégrès ou . . .		
Aſcenſion droite du zénith .	$1° 20' 30'' 7$	$12° 56' 16'' 5$
Latitude de Pétersbourg . . .	$59° 56' 23'' 0$	
Angle de la verticale correſpondant	$— 9' 58'' 6$	
Déclinaiſon du zénith	$59° 46' 24'' 4$	
Longitude du zénith	$35° 11' 20'' 8$	$42° 25' 1'' 4$
Latitude boréale du zénith .	$51° 59' 16'' 7$	$48° 23'' 35'' 2$
Longitude lune moins long. zénith .	$61° 9' 9'' 6$	$54° 22' 30'' 1$
Au moyen de quoi on trouve:		
Parallaxe de longitude . . .	$+ 31' 54'' 7$	$+ 32'' 0'' 6$
Latitude boréale apparente . .	$2° 8' 56'' 8$	$2° 13' 31'' 5$
Demi-diamètre apparent . . .	$16' 10'' 5$	$16' 13'' 0$
On tire de ce qui précède:		
Differ. longit. appar. lune et étoile	$— 14' 55'' 9$	$+ 12' 10'' 3$
Differ. latit. appar. lune et étoile	$+ 6' 2'' 5$	$+ 10' 37'' 2$

Ajour

À	l'Immerſion	Emerſion
Ajoutant ces quantités au lieu de étoile, on a d'après l'obſervation:		
Longitude apparente de la lune .	3ˢ 6° 52′ 55″ 7	3ˢ 7° 20′ 4″ 9
Latitude boréale appar. de la lune	2° 8′ 48″ 9	2° 13′ 23″ 6
Mais on a ſelon les tables de la lune citées:		
Longitude appar. de la lune . . .	3ˢ 6° 52 25″ 1	3ˢ 7° 19′ 52″ 1
Latitude boréale appar. de la lune	2° 8′ 56″ 8	2° 13′ 31″ 5
D'où réſulte pour erreur des tables de la lune		
En longitude par défaut . . .	30″ 6	29″ 8
En latitude par excés . . .	7″ 9	7″ 9
On trouve enfin:		
Differ. longit. vraie lune et étoile .	46′ 50″ 2	19′ 50″ 6
Diſtance en tems à la conjonction	1ʰ 20′ 14″ 1	33′ 57″ 2
Tems moyen des phaſes	14ʰ 54′ 21″ 7	15ʰ 40′ 37″ 0
Tems moyen de la conjonction . .	16 14′ 35″ 8	16 14′ 34″ 2
Longit. des deux aſtres en conjonct. . .	3ˢ 7° 7′ 51″ 6	
Latitude vraie boréale de la lune . .	2° 57′ 51″ 9	

Calcul de l'obſervation d'Ofen.

On avoit lors de	l'Immerſion	Emerſion
Lieu vrai de la lune:		
Longitude vraie de la lune . .	3ˢ 6° 13′ 42″ 8	3ˢ 6° 35′ 59″ 5
Latitude vraie boréale	2° 54′ 5″ 1	2° 55′ 43″ 1
Parallaxe horiſontale	58′ 49″ 6	58′ 51″ 5
Demi-diamètre horiſontal . . .	16′ 5″ 2	16′ 5″ 7

 On

	Immerſion	Emerſion
On avoit auſſi:		
Longitude moyenne du ſoleil . . .	$4^s 17^\circ 45' 34'' 2$	$4^s 17^\circ 47' 48'' 0$
Tems moyen des phaſes en dégrés	$6^s 29^\circ 21' 54'' 0$	$7^s 8^\circ 54' 18'' 0$
Aſcenſion droite du zénith	$11^s 17^\circ 6' 28'' 2$	$11^s 26^\circ 42' 6'' 0$
Latitude d'Ofen	$47^\circ 29' 44'' 0$	
Angle de la verticale correſpondant	$- 11' 26'' 0$	
Déclinaiſon du zénith	$47^\circ 18' 18'' 0$	
Longitude du zénith	$13^\circ 6' 22'' 1$	$20^\circ 46' 47'' 6$
Latitude boréale du zénith	$47^\circ 15' 33'' 8$	$43^\circ 36' 29'' 7$
Longit. lune moins long. zénith . . .	$83^\circ 7' 16'' 4$	$75^\circ 49'' 7'' 6$

Au moyen de quoi on trouve :

Parallaxe de longitude	$+ 39' 44'' 3$	$+ 41' 29'' 7$
Latitude boréale apparente	$2^\circ 11' 5'' 6$	$2^\circ 15' 33'' 5$
Demi-diamètre apparent	$16' 7'' 0$	$16' 8'' 9$

On tire de ce qui précède :

Differ. longit. appar. lune et étoile	$13' 55'' 5$	$10' 6'' 6$
Differ. latit. appar. lune et étoile	$8\ 8'' 8$	$12' 35'' 9$

Ajoutant ces quantités au lieu de l'étoile, on a d'après l'obſervation :

Longit. appar. de la lune	$3^s 6^\circ 53' 56'' 1$	$3^s 7^\circ 17' 58'' 2$
Latitude appar. boréale de la lune	$2^\circ 10' 54'' 4$	$2^\circ 15' 22'' 3$

Mais ſelon les tables de la lune on a

Longit. appar. de la lune	$3^s 6^\circ 53' 27'' 1$	$3^s 7^\circ 17' 29'' 2$
Latit. appar. boréale de la lune . . .	$2^\circ 11' 5'' 6$	$2^\circ 15' 33'' 5$

Ces

A	l'Immerſion	Emerſion
Ces quantités comparées aux précédentes donnent pour erreurs des tables:		
En longitude par défaut	29″ 0	29″ 0
En latitude par excès	11″ 2	11″ 2
On trouve enfin		
Différ. longit. vraie lune et étoile	53′ 39″ 8	31′ 23″ 1
Diſtance en tems à la conjonction	1ʰ 31′ 52″ 4	53′ 43″ 9
Tems moyen des phaſes	13ʰ 57′ 27″ 6	14ʰ 35′ 37″ 2
Tems moyen de la conjonction . .	15ʰ 29′ 20″ 0	15 29′ 21″ 1
Long. des deux aſtres en conjonction	3ˢ 7° 7′ 51″ 6	
Latit. vraie boréale de la lune . . .	2° 57′ 48″ 9.	

Calcul de l'obſervation de Dantzick.

On avoit lors de	l'Immerſion	Emerſion
Lieu vrai de la lune:		
Longit. vraie de la lune	3ˢ 6° 17′ 5″ 1	3ˢ 6° 43′ 24″ 8
Latit. vraie boréale	2° 54′ 20″ 4	2° 56′ 15″ 5
Parallaxe horiſontale	58′ 45″ 9	58′ 49″ 6
Demi-diamètre horiſontal	16′ 5″ 2	16′ 5″ 7
On avoit auſſi:		
Longit. moyenne du ſoleil	4ˢ 17° 44′ 57″ 0	4ˢ 17° 46′ 42″ 1
Tems moyen de phaſes en dégrés .	7ˢ 0° 24 51″ 0	7ˢ 11° 41′ 13″ 5
Aſcenſion droite du zénith	11ˢ 18° 9′ 48″ 0	11ˢ 29° 27′ 55″ 6
Latitude de Dantzick	54° 20′ 48″ 0	
Angle de la verticale correſpondant	— 10′ 52″ 8	
Déclinaiſon du zénith	54° 9 55′ 2	

Longi-

	Immerſion	Emerſion
Longitude du zénith	20° 21′ 47″ 8	28° 29′ 50″ 0
Latitude boréale du zénith	52° 19′ 26″ 1	48° 13′ 51″ 1
Longitude lune moins long. zénith	75° 55′ 19″ 2	68° 13′ 36″ 6
Au moyen de quoi on trouve:		
Parallaxe de longitude	+ 35′ 3″ 9	+ 36′ 35″ 2
Latitude boréale apparente . . .	2° 8′ 25″ 1	2° 12′ 58″ 2
Demi diamètre apparent	16′ 10″ 3	16′ 10″ 2
On tire de ce qui précède:		
Differ. longit. appar. lune et étoile	15′ 12″ 1	12′ 38″ 9
Differ. latit. appar. lune et étoile .	5′ 42″ 2	10′ 5″ 3
Ajoutant ces quantités au lieu de l'étoile, on à d'après l'obſervation:		
Longitude apparente de la lune .	3s 6° 52′ 39″ 7	3s 7 20′ 30″ 7
Latitude boréale appar. de la lune	2° 8′ 18″ 6	2° 12′ 51″ 7
Mais ſelon les tables de la lune on a:		
Longitude appar. de la lune.	3s 6° 52′ 10″ 6	3s 7° 20′ 1″ 5
Latit. boréale appar. de la lune . .	2° 8′ 25″ 6	2° 12′ 58″ 7
La comparaiſon de ces quantités aux précédentes donne pour erreurs des tables:		
En longitude par défaut	29″ 1	29″ 2
En latitude par excès	7″ 0	7″ 0
On a enfin:		
Differ. longit. vraie lune et étoile	50′ 16″ 0	23′ 56″ 3
Diſtance en tems à la conjonction .	1h 26′ 6″ 3	41′ 0″ 3

Tems

	l'Immerſion	Emerſion
Tems moyen des phaſes	$14^h\ 1'\ 34''\ 4$	$14\ 46\ 44''\ 9$
Tems moyen de la conjonction .	$15^h\ 27'\ 46''\ 7$	$15^h\ 27'\ 45''\ 2$
Longit. des deux aſtres en conjonct.	$3^s\ 7^\circ\ 7'\ 51''\ 6$	
Latit. vraie boréale de la lune . .	$2^\circ\ 57'\ 52''\ 8$	

Calcul de l'obſervation de Leipzick.

On avoit lors de	l'Immerſion	Emerſion
Lieu vrai de la lune:		
Longitude vraie de la lune . . .	$3^s\ 6^\circ 16' 17''\ 1$	$3^s\ 6^\circ\ 42'\ 6''\ 8$
Latitude vraie boréale	$2^\circ 54' 16''\ 7$	$2^\circ\ 56' 9''\ 5$
Parallaxe horiſontale	$58'\ 48''\ 4$	$58'\ 50''\ 6$
Demi-diamètre horiſontal	$16'\ 5''\ 5$	$16'\ 6''\ 2$

On avoit auſſi:

Aſcenſion droite moyenne du ſoleil	$137^\circ 44' 47''\ 1$	$137^\circ 46'\ 36''\ 1$
Tems moyen des phaſes en degrés	$203^\circ 49' 22''\ 5$	$214^\circ\ 52' 49''\ 5$
Aſcenſion droite du zénith	$341^\circ\ 34\ 9''\ 6$	$352^\circ\ 39'\ 25''\ 6$
Latitude de Leipzick	$51^\circ\ 19'\ 14''\ 0$	
Angle de la verticale correſpondant	$-\ 11'\ 12''\ 3$	
Déclinaiſon du zénith	$51^\circ\ 8'\ 1''\ 7$	
Longitude du zénith	$12^\circ\ 8'\ 26''\ 2$	$20^\circ 48'\ 21''\ 5$
Latitude boréale du zénith . . .	$52^\circ 29' 12''\ 2$	$48\ 15'\ 29''\ 8$
Longit. lune moins longit. zénith	$84^\circ\ 7'\ 50''\ 9$	$75^\circ\ 53'\ 45''\ 3$

Au moyen de ces quantités on trouve:

Parallaxe de longitude	$+\ 35'\ 42''\ 5$	$+\ 38'\ 12''\ 4$
Latitude boréale apparente . . .	$2^\circ\ 7'\ 48''\ 1$	$2^\circ\ 12\ 34''\ 9$
Demi-diamètre apparent	$16'\ 7''\ 1$	$16\ 9''\ 4$

A

À	l'Immerſion	Emerſion
On tire de ce qui précède:		
Differ. longit. appar. lune et étoile	15′ 22″ 3	22′ 57″ 3
Differ. latit. appar. lune et étoile .	4′ 53″ 1	9′ 49″ 9
Ajoutant ces quantités au lieu de l'étoile, on a d'après l'obſervation:		
Longitude apparente de la lune	3ˢ6°52′ 29″3	3ˢ 7° 20′ 48″9
Latitude apparente boréale lune	2° 7′ 39″5	2° 12′ 26″3
Mais les tables de la lune donnent:		
Longit. appar. de la lune -	3ˢ6° 51′59″6	3ˢ 7° 20′ 19″ 2
Latitude boréale appar. de la lune	2° 7′ 48″ 1	2° 12′ 34″ 9
De la comparaiſon de ces quantités aux précéd. réſulte pour erreur des tables:		
En longitude par défaut	29″ 7	29″ 7
En latitude par excès	8″ 6	8″ 6
On trouve enfin:		
Differ. longit. vraie lune et étoile	51′ 4″ 8	25′ 15″ 1
Diſtance en tems à la conjonction	1ʰ 27′ 27″ 1	43′ 13″ 9
Tems moyen des phaſes	13 35′ 17″ 5	14ʰ 19′ 31″ 3
Tems moyen de la conjonction .	15 2′ 44″ 6	15ʰ 2′ 45″ 2
Longit. des deux aſtres en conjonct.	3ˢ 7° 7′ 51″ 6	
Latit. vraie boréale de la lune . . .	2° 57′ 51″ 1	

Calcul de l'obſervation de Celle.

On avoit lors de	l'Immerſion	Emerſion
Lieu vrai de la lune:		
Latitude vraie boréale	3ˢ6°17′23″9	3ˢ 6° 44′ 8″ 1
Longitude vraie de la lune . . .	2° 54′ 21″ 9	2° 56′ 18″ 8

Paral-

	Immerſion	Emerſion
Parallaxe horiſontale	58′ 48″ 0	58′ 49″ 9
Demi-Diamètre horiſontal	16′ 5″ 2	16′ 5″ 7
On avoit auſſi:		
Aſcenſion droite moyenne du ſoleil	137° 44′ 55″ 8	137° 46′ 48″ 6
Tems moyen des phaſes en dégrés	201° 55′ 37″ 5	213° 22′ 17″ 8
Aſcenſion droite du zénith	339° 40′ 33″ 3	351° 9′ 6″ 4
Latitude de Celle	52° 37′ 12″ 0	
Angle de la verticale correſpondant	— 11′ 4″ 9	
Déclinaiſon du zénith	52° 26′ 7″ 1	
Longitude du zénith	11° 59′ 20″ 4	20° 51′ 57″ 2
Latitude boréale du zénith . . .	54° 14′ 8″ 5	49° 51′ 28″ 6
Longit. lune moins longit. zénith .	84° 17′ 53″ 1	75° 52′ 0″ 5
On trouve à l'aide de ces quantités:		
Parallaxe de longitude	+ 34′ 14″ 2	+ 36′ 55″ 5
Latitude boréale apparente . . .	2° 6′ 41″ 5	2° 11′ 43″ 2
Demi-diamètre apparent	16′ 5″ 8	16′ 8″ 8
On tire de ce qui précède:		
Differ. longit. appar lune et étoile	16′ 23′ 9	13′ 1″ 6
Differ. latit. appar. lune et étoile	3′ 54″ 1	8′ 55″ 8
Ajoutant ces différences à la longitude et à la latitude de l'étoile on a:		
Longitude appar. de la lune . . .	3^s 6° 52′ 8″ 5	3^s 7° 21′ 34″ 0
Latitude apparente boréale lune .	2° 6′ 17″ 6	2° 11′ 19″ 3
Mais les tables de la lune donnent:		
Longitude boréale appar. lune . .	3^s 6° 51′ 38″ 1	4^s 7 21′ 3″ 6
Latitude boréale appar. lune . . .	2° 6′ 41″ 5	2° 11′ 43″ 2

	Immerſion	Emerſion
La comparaiſon de ces quantités aux précéd. donne pour erreurs des tables:		
En longitude, par défaut	$30''\,4$	$30''\,4$
En latitude, par excès	$23''\,9$	$23''\,9$
Enfin on trouve:		
Differ. longit vraie lune et étoile .	$49'\,57''\,3$	$23'\,13''\,1$
Diſtance en tems à la conjonction	$1^h\,25'\,32''\,2$	$39'\,45''\,7$
Tems moyen des phaſes	$13^h\,27'\,42''\,5$	$14^h\,13'\,29''\,2$
Tems moyen de la conjonction . .	$14^h\,53'\,14''\,7$	$14^h\,53'\,14''\,8$
Longit lune et étoile en conjonct.	$3^s\,7^\circ\,7'\,51''\,6$	
Latit. vraie boréale de la lune . .	$2^\circ\,57'\,35''\,9$	

Maintenant réuniſſons ſous un même point de vüe les tems que l'on comptoit, à St. Pétersbourg, Ofen, Dantzick, Leipzick et Celle, lors de la conjonction de la lune avec ε de gémaux, ce qui nous fournira cette petite table:

Tems moyen de la conjonction de la lune avec ε des gémaux.

Lieux	par l'immerſion	par l'émerſion	milieu
Pétersboug	$10^h\,14'\,35''\,8$	$16^h\,14'\,34''\,2$	$16^h\,14'\,35''\,0$
Ofen . . .	$15^h\,29'\,20''\,0$	$15^h\,29'\,21''\,1$	$15^h\,29'\,20''\,5$
Dantzick .	$15^h\,27'\,45''\,7$	$15^h\,27'\,45''\,2$	$15^h\,27'\,45''\,5$
Leipzick .	$15^h\,2'\,44''\,6$	$15^h\,2'\,45''\,2$	$15^h\,2'\,44''\,9$
Celle . . .	$14^h\,53'\,14''\,7$	$14^h\,53'\,14''\,8$	$14^h\,53'\,14''\,7$

Supoſant la différence des méridiens entre Paris et St. Pétersbourg de $1^h\,51'\,58''$, on a.

Diffé-

Différence des méridiens entre

		Pétersbourg	Paris
et	Ofen . . .	45′ 14″ 5	1ʰ 6′ 43″ 5
	Dantzick	46′ 49″ 5	1ʰ 5′ 8″ 5
	Leipzick . .	1ʰ 11′ 50″ 1	40′ 7″ 9
	Celle. . . .	1ʰ 21′ 20″ 3	30′ 37″ 7

Toutes ces obſervations s'accordent à donner environ 30″ ſecondes pour erreur des tables de la lune en longitude. En prenant un milieu entre les erreurs des tables de la lune en latitude qui réſultent des obſervations de Pétersbourg, Dantzick et Leipzick, dont la différence ne va qu'à 1″, ½, on a pour erreur des tables en latitude 7″ 8, qui eſt à un dixième de ſeconde près celle que donne l'obſervation de St. Pétersbourg.

L'obſervation d'Ofen porte cette erreur jusqu'à 11 ſecondes et celle de Celle jusqu'à 23″ 9. J'ignore à quoi tient préciſément cette différence; mais je préſume qu'une partie peut venir de l'influence qu'à ſur la parallaxe de latitude de la lune, la latitude du lieu que je ſuppoſe n'être pas auſſi exactement connue dans ces deux villes que dans les autres; et peut-être une autre partie eſt elle düe à une petite inexactitude ſur le tems des phaſes.

RÉSULTATS
DE
L'OBSERVATION DE LA LUNE
AU MÉRIDIEN
ET DE L'OCCULTATION DE Φ DU SAGITTAIRE,
du 21. Août 1798;
faite à la tour aſtronomique de St. Pétersbourg.

Par *Mr. L'ABBÉ HENRY.*

Préſenté et lû à l'Académie le 27 Fevr. 1800.

Je vais expoſer le détail de mon obſervation et les réſultats que j'en ai tiré; j'y joindrai enſuite le calcul des obſervations de la même éclipſe, qui ont été faites à Mirepoix et à Paris, et j'en comparerai les réſultats avec les miens, à l'effet d'en déduire la différence des méridiens de ces deux villes avec celui de Péteisbourg.

Le ciel, après avoir été couvert le 21 Août toute la journée, s'éclaircit peu de tems après le coucher du ſoleil et j'apperçus aſſez diſtinctement l'étoile qui devoit être occultée par la lune, quoiqu'à peine élevée de plus de trois-à-quatre dégrés au deſſus de l'horiſon. Il me fût donc poſſible d'obſerver d'abord les paſſages de la lune et de l'étoile au méridien, et enſuite l'immerſion de l'étoile. Mais l'émerſion n'ayant précédé le coucher de ces deux aſtres que de quelques minutes, et les bords de l'horiſon étant d'ailleurs chargés de vapeurs, je ne pus obſerver cette phaſe.

La

La pendule reglée ſur le tems ſidéral marquoit lors de la culmination du premier bord de la lune $18^h\ 29'\ 7''\ 8$
de la culmination de Φ du sagittaire . . . $18^h\ 32\ 32''\ 0$
de l'immerſion de Φ du ſagittaire . . . . . $19^h\ 7'\ 8''\ 0$
de la culmination d'α de l'aigle . . . . . $19^h\ 40'\ 25''\ 0$
de la culmination d'α du cygne . . . . . $20^h\ 34'\ 4''\ 5$

Le lendemain 22 Août la pendule marquoit à l'inſtant

de la culmination d'α de l'aigle . . . . . $19^h\ 40'\ 20''\ 5$
de la culmination d'α du cygne . . . . . $20\ 34'\ 39''\ 0$
Ces tems comparés aux précédens donnent $4''\ 5$ pour le retardement de la pendule en un jour ſidéral. Mais on avoit le 21 Août d'après les meilleurs catalogues connus.

Aſcenſions droites apparentes en tems
de Φ du ſagittaire . . . . $18^h\ 33'\ 14''\ 13$
d'α de l'aigle . . . . $19^h\ 40'\ 57''\ 28$
d'α du cygne . . . . $20^h\ 34'\ 36''\ 81$
Ces aſcenſions droites comparées avec les paſſages réſpectiſs de ces mêmes étoiles au méridien, donnent les quantités ſuivantes pour le retardement de la pendule lors de ces paſſages $32''\ 13$, — $32''\ 28$; — $32''\ 31$. D'où il ſuit que le retardement de la pendule étoit lors des paſſages de la lune et de l'étoile au méridien et de l'immerſion de l'étoile, de — $32''\ 1$, — $32''\ 1$, — $32''\ 4$.

Partant on avoit le 21 Août, tems ſidéral:
de la culmination du premiere limbe de la lune $18^h\ 29'\ 39''\ 9$
de la culmination de Φ du ſagittaire . . . $18^h\ 33'\ 4''\ 1$
de l'immerſion de Φ du ſagittaire . . . . . $19^h\ 7'\ 40''\ 4$

Ce

Ce tems converti en tems moyen donne tems moyen:

de la culmination du premier limbe de la lune	8^h 28′ 27″ 4
de la culmination de Φ du ſagittaire . .	8 31′ 51″ 1
de l'immerſion de Φ du ſagittaire . . .	9^h 6′ 21″ 7

On tire des tables de la lune (qui ſont dans la troiſième édition de l'aſtronomie de Mr. de la Lande) pour l'inſtant de la culmination du premier bord de la lune:

Longitude vraie de la lune	9^s 6° 54′ 39″ 9
Latitude vraie auſtrale de la lune . . .	3° 1′ 21″ 3
Parallaxe horiſontale à Pétersbourg . .	55′ 36″ 1
Demi-diamètre horiſontal	15′ 12″ 75
Mouvement horaire en longitude . . .	31′ 19″ 52
Mouvement horaire en latitude	2′ 9″ 74

On conclue de ces données pour l'inſtant de l'occultation de Φ du ſagittaire les quantités ſuivantes:

Longitude vraie de la lune	9^s 7° 14 27″ 8
Latitude vraie auſtrale de la lune . . .	3° 2′ 45″ 3
Parallaxe horiſontale à Pétersbourg . .	55′ 35″ 1
Demi-diamètre horiſontal	15′ 12″ 2

On avoit d'ailleurs le 21 Août ſuivant les Catalogues:

Aſcenſion droite apparente de Φ du ſagittaire	278° 16′ 2″ 0
Déclinaiſon auſtrale apparente	27° 11′ 0′ 6
D'où on tire avec l'obliquité appar. de l'écliptique	23 27 58″ 9
Longitude apparente de Φ du ſagittaire . .	277 21 58″ 1
Latitude auſtrale apparente	3° 55′ 42″ 7
Diſtance au zénith obſervée du bord inférieur de la lune	87° 10′ 27″ 3
Diſtance au zénith obſervée de Φ du ſagittaire	86° 53′ 22″ 9

Le

Le Barométre marquoit alors 28″ 3 et le Thermométre + 13, 3
On a la réfraction relative à la premiere de . . 15′ 1″ 5
et pour la réfraction de l'etoile . . . . . 14′ 5″ 2
La parallaxe en hauteur de la lune étant d'ailleurs de . . . . 55′ 32″ 7
et ſon demi-diamètre en déclinaiſon, ou horiſontal, de 15′ 12″ 7
On trouve pour différence de déclinaiſon de la lune et de l'étoile . . . . 52′ 44″ 7
Cette quantité retranchée de la déclinaiſon de l'étoile . . . . 27° 11′ 0″ 6
Il reſte pour la déclinaiſon vraie du centre de la lune . . . . 26° 18′ 15″ 9
Au moyen du demi-diamètre horiſontal de la lune et de ſa déclinaiſon, on trouve ſon demi-diamètre en aſcenſion droite de . . . 16′ 58″ 1
Ainſi l'aſcenſion droite du premier bord étant de 277° 24′ 58″ 5
On a pour aſcenſion droite du centre de la lune 277 41′ 56″ 6
d'où on tire, en employant pour obliquité de l'écliptique . . . . 23° 27′ 58″ 9
Longitude vraie de la lune . . . . . 276° 54′ 27″ 0
Latitude vraie auſtrale de la lune . . 0° 1′ 20″ 9

Comparant cette longitude et cette latitude de la lune avec la longitude et la latitude que nous avons tirées des tables de la lune, on a pour erreurs des tables:

En longitude, par excès . . . . 12″ 9
En latitude par défaut . . . . 0″ 4

Maintenant ſi l'on convertit en degrés le tems ſidéral de l'occultation de Φ du ſagittaire, on trouve pour aſcenſion droite du zénith . . . 286° 55′ 1″ 8

La

La latitude de Pétersbourg étant de . . . . 59° 56′ 23″ 0
et l'angle de la verticale correſpondant de — 9′ 58″ 6
On a pour déclinaiſon du zénith corrigée . . 59 46′ 24″ 4
d'où on tire avec la même obliquité de l'écliptique, que ci-deſſus . . . . . . 23° 27′ 58″ 9
Longitude vraie du zénith de Pétersbourg 326° 17′ 21″ 8
Latitude vraie boréale du zénith . . 79° 51′ 27″ 0

Au moyen de la longitude vraie et de la latitude vraie de la lune, de la longitude et de la latitude du zénith on trouve les trois quantités ſuivantes:

Parallaxe de longitude de la lune . . . 7′ 25″ 0
Latitude auſtrale apparente de la lune . 3° 57′ 43″ 3
Demi-diamètre apparent . . . . . . 15′ 14″ 5
et puisque la longitude vraie de le lune eſt 277° 14′ 27″ 4
On a pour ſa longitude apparente . . 277° 7′ 2″ 4

La longitude et la latitude apparentes de la lune que nous venons de trouver étant comparées reſpectivement avec celles de l'étoile trouvée plus haut, on trouve:

Différence de longitude appar. ſur l'écliptique 14′ 55″ 7
Différence de latitude apparente . . . . . 2′ 0″ 6

Avec le demi-diamètre apparent de la lune et la différence de latitude apparente on trouve auſſi:

Différence de longit. apparente ſur l'écliptique . 15′ 9″ 4
Cette dernière différence, comparée à la précédente, donne pour excès de la longitude de la lune tirée des tables citées . . . 13″ 7
La même différence de longitude que nous venons de trouver, diminuée de la parallaxe en longitude, laiſſe pour
Différence de longitude vraie de la lune et de l'étoile 7′ 44″ 4

Le

La tems correſpondant à cette différence, eſt à raiſon du mouvement horaire de la lune en longitude de	14′ 50″ 7
Cette quantité ajoutée au tems moy. de l'immerſion	9^h 6′ 21″ 7
Donne le tems moyen de la conjonction à .	9^h 21′ 12″ 4
L'équation du tems (souſtractive) étant alors de	— 2′ 41″ 5
Le tems vrai de la conjonction étoit . . .	9^h 18′ 30″ 9
La longitude vraie de la lune étant alors .	9^s 7° 21′ 58″ 1
Et ſa latitude vraie auſtrale de . . .	3° 3′ 15″ 1

Calcul de l'obſervation de Mirepoix.

On avoit à	tems vrai	tems moyen	tems moyen en dégrés
l'émerſion	7^h 44′ 38″ 7	7^h 47′ 20″ 2	116° 50′ 3″ 0

Les tables de la lune donnent pour cet inſtant:

Longitude vraie de la lune	9^s 7° 32′ 37″ 7
Latitude vraie auſtrale de la lune . .	3° 3′ 58″ 5
Parallaxe horiſontale à Mirepoix	55′ 37″ 6
Demi-diamètre horiſontal	15′ 12″ 2

On avoit auſſi:

Longitude ou aſcenſion droite moyenne du ſoleil	150° 21′ 16″ 3
Tems moyen de l'émerſion en dégrés . .	116° 50′ 3″ 0
Aſcenſion droite du zénith de Mirepoix .	267° 11′ 19″,3
Latitude de Mirepoix	43° 5′ 19″ 0
Angle de la verticale correſpondant . .	— 11′ 26″ 9
Déclinaiſon du zénith	42° 53′ 52″ 1
Longitude du zénith	264° 48′ 43″ 6
Latitude boréale du zénith	66° 18′ 50″ 2
Longitude lune moins longitude zénith .	12° 43′ 54″ 1

Au

Au moyen de quoi on trouve:

Parallaxe de longitude de la lune	4′ 57″ 9
Latitude apparente de la lune (auſtrale) . .	3° 56′ 17″ 6
Demi-diamètre apparent de la lune . . .	15′ 17″ 7
Longitude apparente de la lune	9ˢ 7° 37′ 35″ 6
La longitude apparente et la latitude apparente de la lune que nous venons de trouver, comparées avec la longitude apparente et la latitude apparente de l'étoile, on a	— — —
Différence de longitude apparente calculée . .	15′ 37″ 5
Différence de latitude apparente	0′ 34″ 9
Au moyen de cette différence de latitude apparente et du demi-diamètre apparent de la lune on trouve auſſi la différence de longitude apparente ſur l'écliptique . . .	15′ 19″ 2
On a donc pour excès de la longitude des tables	18″ 3
Retranchant la parallaxe de longitude de la différence de longitude apparente on a pour différence de longitude vraie	10′ 21″ 3
Cette quantité répond en tems à	19′ 50″ 0
Ce qui étant retranché du tems moyen de l'émerſion	7ʰ 47′ 20″ 2
On a pour le tems moyen de la conjonction .	7ʰ 27′ 30″ 2
Longitude vraie de la lune en conjonction .	9ˢ 7° 21′ 58″ 1
Latitude vraie auſtrale de la lune , . . .	3° 3′ 15″ 1

Calcul de l'obſervation de Paris.

On avoit à l'émerſion	tems moyen	tems moyen en dégrés
	7ʰ 52′ 12″ 2	118° 3′ 3″ 0.

Les tables de la lune donnent pour cet inſtant:

Logitude vraie de la lune	9ˢ 7° 34′ 11″ 0
Latitude vraie auſtrale de la lune	3° 4′ 5″ 0

Paral-

Parallaxe horiſontale à Paris	55′ 37″ 0
Demi-diamètre horiſontal	15′ 12″ 2

On avoit auſſi:

Aſcenſion droite moyenne du ſoleil . . .	150° 21′ 23″ 7
Tems moyen de l'emerſion en dégrés . .	118 3′ 3″ 0
Aſcenſion droite du zénith de Paris . . .	268 24 26″ 7
Latitude de Paris	48° 50′ 15″ 0
Angle de la verticale correſpondant . . .	— 11 22″ 2
Déclinaiſon du zénith	48° 38′ 52″ 8
Longitude du zénith	266° 34′ 33″ 6
Latitude boréale du zénith	72° 6′ 1″ 6
Longitude de la lune moins celle du zénith	10° 59′ 37″ 4

Avec ces quantités on trouve:

Parallaxe de longitude de la lune	3′ 16″ 9
Latitude apparente auſtrale de la lune . .	3° 58′ 2″ 7
Demi-diamètre apparent de la lune . . .	9ˢ 7° 37′ 27″ 9

La longitude apparente de la lune et la latitude apparente que nous venons de trouver, comparées avec la longitude et la latitude apparente de l'étoile on trouve:

Différence de longitude apparente calculée . .	15′ 29″ 8
Différence de latitude apparente	2′ 20″ 0

Au moyen de cette différence de latitude apparente et du demi-diamètre apparent de la lune, on trouve auſſi:

Différence de longitude appar. ſur l'écliptique .	15′ 7″ 2
Et partant pour excès de la longitude des tables	22″ 6
Retranchant la parallaxe de longitude de la différence de longitude appar. on a pour différence longitude vraie	11′ 50″ 3
Cette quantité qui répond en tems à . . .	22′ 40″ 5
Etant retranchée du tems moyen de l'émerſion .	7ʰ 52′ 12″ 2

On trouve pour le tems moyen de la conjonction $7^h\ 29'\ 31''\ 7$
La longitude vraie de la lune étant alors de $9^s\ 7^\circ\ 21'\ 58''\ 1$
et ſa latitude vraie boréale de . . . . . . $3^\circ\ 3'\ 15''\ 1$

Maintenant comparant les tems que l'on comptoit lors de la conjonction à Paris, Mirepoix et St. Pétersbourg, on trouve pour différence des méridiens entre Paris et Mirepoix $2'\ 1''\ 5$, entre Paris et St. Pétersbourg $1^h\ 51'\ 40''\ 7$. Ces différences s'eloignent aſſez conſidérablement de celles qui ſont d'ailleurs connues et que j'ai ſuppoſées dans mon calcul du lieu de la lune, ſavoir $1'\ 51''\ 0$ et $1^h\ 51'\ 58''$. Mais j'obſerve que l'excès de la premiere $9''\ 5$ et le défaut de la ſeconde $17''\ 2$ ſont reſpectivement proportionelles à l'excès de l'erreur des tables que donne chacune de ces obſervations ſur celle que j'ai déduite de la mienne, c'eſt-à-dire à $4''\ 6$ et $8''\ 9$, ce qui ſuppoſe ſur le tems de l'obſervation de Mirepoix une erreur de $8''\ 8$ et ſur celle de Paris, une de $17''$. En admettant ces corrections, on trouve par les trois obſervations la même erreur des tables $13''\ 7$ et pour différences des méridiens $1'\ 53''\ 3$ et $1^h\ 51'\ 58''\ 7$, qui diffèrent à peine de celle qu'on connoît déjà d'ailleurs, et que j'ai ſuppoſée dans ces calculs.

Au reſte ces erreurs ſur le tems de l'obſervation n'auront pas de quoi ſurprendre, ſi on fait attention que c'eſt l'émerſion de l'étoile qui a été obſervée à Mirepoix et à Paris, et que cette phaſe a eu lieu du côté du bord éclairé de la lune qui, étant d'ailleurs dans ſa plus grande déclinaiſon auſtrale, n'étoit pas fort elevée ſur les horiſons de ces lieux, ce qui a pu nuire à l'exactitude de l'obſervation.

SUP-

SUPPLEMENT AU MÉMOIRE SUR LA REDUCTION DES DISTANCES LUNAIRES.

PAR

Mr. *KRAFFT.*

Préſenté et lû le 13. Mai 1800.

Dans un Mémoire inſeré au Tome 7me des nouveaux Actes de l'Académie (*) j'ai donné une nouvelle méthode de degager les diſtances apparentes de la Lune au Soleil ou à une étoile fixe, de l'effet combiné de la refraction et de la parallaxe, et partant de réduire en diſtances vraies les diſtances des deux aſtres obſervées ſur Mer pour en conclure la longitude du vaiſſeau. Je me ſuis ſervi, le premier à ce que je ſache, du moyen des ſinus-verſes des angles pour reſoudre ce problême, et j'ai démontré, que la ſolution que j'en ai obtenue, eſt rigoureuſe dans ſes principes et dans tous ſes développemens, ſûre dans les opérations du calcul, et ſi facile dans ſon application à tous les cas poſſibles, qu'elle doit être néceſſairement à la portée de tout Pilote hau-

(*) Méthode à la portée des navigateurs pour reduire en diſtance vraie la diſtance apparente de la lune au ſoleil ou une étoile fixe, préſentée à l'Académie l'an 1791. Nova Acta Acad. Petrop. T. VII.

hauturier. L'accueil que le Bureau de longitude à Londres a fait à cette méthode, et deux excellens Mémoires (*) qu'a publiés enſuite ſur le même ſujet le celèbre Capitaine de vaiſſeau de la Marine royale d'Eſpagne, Mr. de Mendoza y Rios, qui a bien voulu me les communiquer, me donnent l'occaſion de faire ce petit ſupplement à mon Mémoire. De toutes les ſolutions connûes de cet important problême de l'Aſtronomie nautique celles qui employent les ſinus-verſes, étant reconnues préferables à pluſieurs égards, et Mr. de Mendoza ayant encore enrichi la Marine d'une ſolution de la même éſpece; il m'a parû intéreſſant et utile, de préſenter ces deux méthodes dans leur rapprochement et dans leur liaiſon réciproque; et quoique l'une et l'autre préſénte aux Pilotes hauturiers le grand avantage, de pouvoir ſe diſpenſer pour les appliquer de toute connoiſſance des Logarithmes; cependant comme il y en a auſſi, qui ſont très-bons mathémaiciens, il ne ſera peut-être pas hors de propos, d'expoſer ici une manière d'abreger la pratique de ces deux méthodes par le moyen des Logarithmes, à l'uſage des Pilotes qui en ſont au fait; voila le contenu de ce ſupplement.

Métho-

(*) Memoria ſobre alcunos methodos nuevos de calcular la longitud por las diſtancias lunares y applicacion de su teorica à la ſolucion de otros problemas de ravegacion, por Don Joseph de Mendoza y Rios, Capitan de Navio de la Real Armada, individuo de la Real Sociedad de Londres, de Paris y de Lisboa. Madrid anno de 1795. Recherches ſur les ſolutions des principaux problèmes de l'Aſtronomie nautique, par le même à Londres l'an 1797.

Méthode première.

Soit

d	la diſtance obſervée	des centres des deux aſtres.
t	la différence des haut. obſervées	
H	la différence des haut. vraies	
X	la diſtance vraie cherchée	

$$\cos\omega = \frac{\text{cos haut. vr. du centre ☾ . cos haut. vr. du centre ☉}}{\text{2 cos haut. app. du centre ☾ . cos haut. app. du centre ☉}}$$

Ce-ci ſuppoſé, et deſignant par Σ le ſinus-verſe d'un angle, j'ai démontré dans mon Mémoire cité cy-deſſus, que

$$\Sigma X = \Sigma H + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) - \Sigma(t+\omega) - \Sigma(t-\omega)$$

et que parconſéquant, on trouve la diſtance vraie cherchée X par les opérations ſuivantes:

1) Ajoutez enſemble les ſinus-verſes des trois angles H, $d+\omega$ et $d-\omega$;

2) Ajoutez enſemble les ſinus-verſes des deux angles $t+\omega$ et $t-\omega$;

3) Prennez la différence de ces deux ſommes; cette différence eſt le ſinus-verſe de la diſtance vraie cherchée.

Méthode ſeconde.

Soit

d	la diſtance obſervée	des centres des deux aſtres.
u	la ſomme des haut. obſervées	
K	la ſomme des haut vraies	
X	la diſtance vraie cherchée	
ω	un angle tel, comme cy-deſſus.	

Mr.

Mr. de Mendoza demontre dans ſes Mémoires cités cy-deſſus, que

$$\Sigma X = \Sigma\,(180^\circ - K) + \Sigma\,(d + \omega) + \Sigma\,(d - \omega) + \Sigma\,(u + \omega) + \Sigma\,(u - \omega) - 4.$$

Il appelle Su-ſinus-verſe d'un angle le ſinus-verſe de ſon ſupplement à 180°, et partant en vertu de la méthode de Mr. de Mendoza on trouve la diſtance vraie cherchée X par les opérations ſuivantes:

1) Ajoutez enſemble le Su-ſinus-verſe de l'angle K et les ſinus-verſes des quatres angles $d + \omega$, $d - \omega$, $u + \omega$ et $u - \omega$.

2) Diminuez la ſomme de quatre unités; le reſte eſt le ſinus-verſe de la diſtance vraie cherchée.

Mr. de Mendoza deduit cette méthode avec pluſieurs autres, de l'expreſſion générale de la relation entre la diſtance vraie cherchée et les données du problême; pour le but que je me propoſe ici, il ſuffit de faire voir, de quelle maniere elle reſulte immediatement de la mienne.

L'expreſſion donnée cy-deſſus pour l'angle ω ſe transforme par les regles connûes de la Trigonometrie en celle cy:

$$2\cos\omega = \frac{\cos H + \cos K}{\cos t + \cos u},$$ de ſorte que

$$\cos H + \cos K = 2\cos\omega\,.\,\cos t + 2\cos\omega\,.\,\cos u = \cos\,(t + \omega) + \cos\,(t - \omega) + \cos\,(u + \omega) + \cos\,(u - \omega)$$

ou bien

$$\Sigma H + \Sigma K = \Sigma(t + \omega) + \Sigma(t - \omega) + \Sigma\,(u + \omega) + \Sigma\,(u - \omega) - 2;$$

et partant

$$\Sigma\,(t + \omega) + \Sigma(t - \omega) = \Sigma H + \Sigma K - \Sigma\,(u + \omega) - \Sigma\,(u - \omega) + 2.$$

Subſti-

Subſtituant cette valeur dans l'expreſſion de ΣX donnée par ma ſolution on obtient

$$\Sigma X = -\Sigma K + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) + \Sigma(u-\omega) + \Sigma(u-\omega) - 2;$$ d'où, à cauſe de

$$\Sigma K = 2 - \Sigma(180° - K),$$ on a

$$\Sigma X = \Sigma(180° - K) + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) + \Sigma(u+\omega) + \Sigma(u-\omega) - 4$$

ce qui eſt la ſolution donnée par Mr. de Mendoza.

La comparaiſon de ces deux méthodes offre les remarques ſuivantes:

1) Pour ce qui regarde l'angle auxiliaire ω, qui eſt le même dans l'une et l'autre méthode, M. de Mendoza a fourni à la Marine une table complette de ces angles pour toutes les parallaxes horizontales et toutes les hauteurs de la Lune, dans le recueil de ſes Tables publiées à Londres to reduce the obſerved diſtances from the Moon to the Sun or a Star in order to find the longitude.

2) La méthode de M. de Mendoza, en admettant outre les ſinus-verſes auſſi les Su. ſinus-verſes des angles, jouit de l'avantage d'avoir, à l'exception d'un terme abſolu, tous les termes additifs dans l'expreſſion de la diſtance vraie; la mienne, en admettant deux termes negatifs, ne demande que des ſinus-verſes, ſans avoir beſoin d'aucun Su-ſinus-verſe, et écarte du calculateur la poſſibilité de ſe meprendre dans le titre des Tables de ces deux lignes trigonometriques. M. de Mendoza a encore le merite d'avoir publié, dans le recueil cité, auſſi une Table complette des ſinus-verſes

et des Su-ſinus-verſes de tous les degrés du cercle jusqu'à 180°, de minute en minute et de dix en dix ſecondes.

3) La méthode de Mr. de Mendoza employe la *somme* des hauteurs des deux aſtres, la mienne employe la *différence* de ces hauteurs. Mr. de Mendoza remarque avec raiſon, qu'en parité de toutes les autres circonſtances, l'emploie des sommes eſt préferable à celui des différences, car on peut deduire la ſomme des hauteurs vraies de la ſomme des hauteurs apparentes, en y appliquant l'enſemble des corrections pour les deux aſtres, pendant que, pour avoir la *différence* des hauteurs vraies, il n'y a de meilleur procédé que celui de corriger ſéparément chaque hauteur apparente pour en faire la ſouſtraction enſuite. D'ailleurs on peut auſſi procurer à la méthode qui employe les différences, l'avantage d'avoir tous les termes additifs; car j'ai fait voir à la fin de mon Mémoire, qu'on a l'égalité

$$2 + \sin \tfrac{1}{2} X^2 = \sin \tfrac{1}{2} H^2 + \sin \frac{\overline{d + \omega}^2}{2} + \sin \frac{\overline{d - \omega}^2}{2} + \sin \frac{\overline{180^\circ - t + \omega}^2}{2} + \sin \frac{\overline{180^\circ - t - \omega}^2}{2},$$

qui ſe transforme immédiatement en celle-cy:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= \Sigma H + \Sigma (d + \omega) + \Sigma (d - \omega) + \Sigma (180^\circ - t + \omega) \\ &\quad + \Sigma (180^\circ - t - \omega) - 4; \\ &= \Sigma H + \Sigma (d + \omega) + \Sigma (d - \omega) + \mathrm{Su}.\Sigma (t + \omega) + \mathrm{Su}.\Sigma (t - \omega) - 4. \end{aligned}$$

Les deux méthodes dont je viens de faire le parallele, et particulierement celle de Mr. de Mendoza, préſentent inconteſtablement aux Pilotes hauturiers toutes les facilités qu'ils peuvent deſirer, pour reſoudre le problème ſans le ſecours des Logarithmes et ſans aucune connoiſſance des lignes trigonométriques.

Je

Je vais maintenant propoſer à ceux d'entr'eux qui ſont habitués dans le calcul logarithmique et dans la théorie des lignes trigonometriques, un moyen aiſé d'abreger encore beaucoup la pratique de ma méthode, ſans en perdre aucun des ſes avantages, dont le principal eſt d'être exemte de toute diſtinction des différens cas du probleme. Cette méthode eſt fondée ſur l'égalité:

$$\Sigma X = \Sigma H + \Sigma(d+\omega) + \Sigma(d-\omega) - \Sigma(t+\omega) - \Sigma(t-\omega);$$

or comme par des transformations trigonometriques connues on a généralement

$\Sigma(a+b) + \Sigma(a-b) = 2(1 - \cos a . \cos b)$, on obtient

$\Sigma X = \Sigma H + 2 \cos\omega [\cos t - \cos d]$, et comme on a de même

$\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{b+a}{2} \sin \frac{b-a}{2}$; on a l'égalité:

$$\Sigma X = \Sigma H + 4 . \cos\omega . \sin \frac{d+t}{2} \sin \frac{d-t}{2};$$

dans la quelle le ſecond terme eſt toujours additif, puisque d eſt toujours plus grand que t, et $\frac{d+t}{2}$ toujours plus petit que 180°, de façon, que cette égalite donne à connoitre, de combien le ſinus-verſe de la diſtance vraie ſurpaſſe le ſinus-verſe de la différence des hauteurs vraies des deux aſtres; d'où reſulte le calcul ſuivant de la diſtance vraie:

Méthode troiſième.

Les ſignifications des lettres d, t, H, X et ω étant les mêmes que celles dans la premiere méthode, on a

$$\Sigma X = \Sigma H + 4 . \cos\omega \sin \frac{d+t}{2} \sin \frac{d-t}{2};$$

donc

1) Calculez par les Logarithmes le nombre
$4 \cos\omega . \sin \frac{d+t}{2} \sin \frac{d-t}{2}$;

z) Ajoutez ce nombre au ſinus-verſe H. La ſomme ſera le ſinus-verſe de la diſtance vraie cherchée.

Sur quoi je remarque encore, que le log. 2 cos ω ſe trouve pour toute hauteur et pour toute parallaxe horizontale de la Lune tout calculé dans le recueil des Tables publié par le Bureau de longitude à Londres ſous le titre: Tables requiſite to be uſed with the nautical ephemeris etc. Table IX, (*) auquel on n'a conſéquement, qu'à ajouter log. 2 = 0, 301030.

Traitée d'une maniere ſemblable, la méthode de M. de Mendoza donne par les mêmes transformations trigonometriques l'égalité

(*) Cette Table a pour titre: Logarithms for readily computing the true diſtance of the Moon from the Sun or a fixed ſtar. Elle contient

$$\text{Log.}\ \frac{[\cos h.\ vr.\ ☾]\ .\ [\cos h.\ vr.\ *]}{[\cos h.\ app.\ ☾]\ .\ [\cos h.\ app.\ *]}.$$

Dans mon Mémoire cité ci-dessus j'ai poſé

$$\frac{[\cos h.\ vr.\ ☾]\ .\ [\cos h.\ vr.\ *]}{[\cos h.\ app.\ ☾]\ .\ [\cos h.\ app.\ *]} = 2 \cos y \cos z = 2 \cos \omega,$$

et j'ai fait voir, que des que la hauteur de la Lune ſurpaſſe cinq degrès, on peut, ſans porter la moindre atteinte à la préciſion du résultat, ſuppoſer $\cos y = 0, 5001343$ ou $y = 59° 59' 27''$. Or dans la Table IX du dit recueil, on a ſuppoſé log. $\frac{\cos h.\ vr.\ *}{\cos h.\ app.\ *} = 0, 000120$, et partant $\frac{\cos h.\ vr.\ *}{\cos h.\ app.\ *} = 2 \cos y = 1, 0002764$ ou $\cos y = 0, 5001383$, ce qui donne $y = 59° 59' 27'', 05$, valeur qui ne diffère de la précédente que d'$\frac{1}{2}$ de ſeconde. Avant poſé dans mon Mémoire log. 2 cos $y = 0, 0001177$, qui dans le Table IX eſt poſé = 0, 0001200, il faudroit ôter 0,000002 des Logarithmes contenus dans la Table IX; mais cette différence eſt trop petite pour influer ſur le dernier réſultat.

lité $\Sigma X = Su. \Sigma K - 4 \cos \omega \cos \frac{d+u}{2} \cos \frac{d-u}{2}$; mais il eſt aiſé à remarquer, que $\frac{d+u}{2}$ peut ſurpaſſer 90°, et comme dans ce cas le ſecond terme change de ſigne, la méthode qui en reſulte, n'auroit pas l'avantage d'être exemte de la diſtinction des cas.

Eclairciſſons cette troiſième méthode par quelques exemples calculés dans les tables mentionnées cy-deſſus par d'autres méthodes qui employent également les Logarithmes.

Exemple I.

Soit la hauteur obſervée d'une étoile = 24° 48′ 0″; celle du centre de la lune = 12° 30′ 0″ et leur diſtance apparente = 51° 28′ 35″; la parallaxe horizontale de la Lune étant = 56′ 15″.

Par les Tables connues de refraction et des parallaxes on trouve les corrections pour la hauteur de l'étoile = − 2′ 3″ et pour celle de la ☾ = + 50′ 42″; et partant la hauteur vraie de l'étoile = 24° 45′ 57″ et celle de la ☾ = 13° 20′ 42″. On a donc la différence de leurs hauteurs obſervées = 12° 18′ 0″ et celle de leur hauteurs vraies = 11° 25′ 15″.

Ceci ſuppoſé, le calcul de la diſtance vraie eſt le ſuivant:

Diſtance

Diſtance obſervée	$= 51° 28' 35''$		
Diff. des haut. obſ.	$= 12° 18' 0''$		
Somme	$= 63° 46' 35''$		
Différence . .	$= 39° 10' 35''$		
Demi-Somme . .	$= 31° 53' 17''$	Log. sin	$= 9, 7228488$
Demi-différence	$= 19° 35' 17''$	Log. sin	$= 9, 5253754$
La Tab. IX du même recueil donne		L. 4 cos ω	$= 0, 2996770$
		Somme	$= 9, 5479012.$
		Nombre reſpond.	$0, 3531028.$
Sinus-verſe de la différ. des haut. vraies			$= 0, 0198008.$
Sinus-verſe de la diſtance vraie . .			$= 0, 3729036.$
Diſtance vraie	$51° 9' 51''.$		

Exemple II.

Soit la hauteur apparente du centre du ☉ $= 84° 7' 0''$; celle du centre de la Lune $= 5° 17' 0''$ et leur diſtance apparente $= 90° 21' 13''$, la parallaxe horizontale de la ☾ étant $= 61' 48''$.

Par les Tables des refractions et des parallaxes on trouve les corrections pour la hauteur du ☉ $= - 0' 5''$ et pour celle de la ☾ $= + 52' 4''$ et partant la hauteur vraie du ☉ $= 84° 6' 55''$ et celle de la ☾ $= 6° 9' 4''$. On a donc la différence de hauteurs apparentes $= 78° 50' 0''$ et celle des hauteurs vraies $= 77° 57' 51''$.

Moyennant quoi la diſtance vraie ſe calcule de la maniere ſuivante:

Diſtance

Diſtance apparente = 90° 21′ 13″
Diff. des haut. app. = 78° 50′ 0″
Somme . . . = 169° 11′ 13″
Différence . . = 11° 31′ 13″

Demi-Somme . . =	84° 35′ 36″	Log. ſin . =	9,9980635
Demi-Différence . =	5° 45′ 36″	Log. ſin . =	9,0015676
La Table IX donne		Log. 4 cos ω =	0,3004910
		Somme . . =	9,3001921
		Nombre reſp. =	0,1996145

Sinus-verſe de la differ. des haut. vraie . = 0,7914770
Sinus-verſe de la diſt. vraie cherchée . = 0,9910915

Diſtance vraie cherchée 89° 29′ 22″.

Exemple III.

Soit la hauteur apparente de l'étoile = 11° 17′ 0″, celle du centre de la Lune = 9° 38′ 0″; et leur diſtance apparente = 43° 35′ 42″; la parallaxe horizontale de la Lune étant 54′ 42″.

On trouve les corrections pour la hauteur de l'étoile = − 4′ 39″ et pour celle de la Lune = + 48′ 28″, et partant la hauteur vraie de l'étoile = 11° 12′ 21″ et celle de la Lune = 10° 26′ 28″. On a donc la différence des hauteurs apparentes = 1° 39′ 0″ et celle des hauteurs vraies = 0° 45′ 53″.

Moyennant quoi la diſtance vraie ſe calcule de la maniere ſuivante:

Diſtance

Diſtance apparente	$= 43^\circ\ 35'\ 42''$		
Diff. des haut. app.	$= 1^\circ\ 39'\ 0''$		
Somme	$= 45^\circ\ 14'\ 42''$		
Différence . . .	$= 41^\circ\ 56'\ 42''$		
Demi-Somme . .	$= 22^\circ\ 37'\ 21''$	Log. ſinus	$= 9,5850746$
Demi. Différence	$= 20^\circ\ 58'\ 21''$	Log. ſin .	$= 9,5537857$
La Table IX donne		Log. ½ cos ω	$= 0,3000660$
		Somme .	$= 9,4389263$
		Nombre reſp.	$= 0,2747427$
Sinus-verſe de la differ. des haut. vraies			$= 0,0000381$
Sinus-verſe de la diſtance vraie .			$= 0,2748318$

Diſtance vraie $= 43^\circ\ 31'\ 1''$.

Ces trois exemples ſe trouvent calculés dans le dit recueil, le premier par la méthode de Mr. Lyons; le ſecond par celle de Mr. Dunthorne, et le troiſième par celle de Mr. Maskelyne, de ſorte, qu'ils peuvent ſervir à comparer ces trois méthodes avec celle que je viens de propoſer ici. Si celle-cy eſt préférable aux autres; il eſt juſte de reconnoitre, qu'elle n'auroit pas pû être offerte aux Pilotes mathématiciens ſans la publication des Tables fort-étendues des ſinus-verſes que Mr. de Mendoza a le merite d'avoir fournies à la Marine.

SUR

SUR LES PASSAGES DE MERCURE SUR LE SOLEIL,

QUI AURONT LIEU DANS LE DIX-NEUFVIEME SIECLE.

PAR

F. T. SCHUBERT.

Premiere Partie

contenant les principes et formules du calcul.

Préſenté à l'Académie le 9 Juillet 1800.

Avant de donner le réſultat des calculs que j'ai faits, de ces phénomenes également intéreſſans pour l'Aſtronomie et pour la Géographie, je crois devoir rendre compte à l'Académie, des méthodes et des formules dont je me ſuis ſervi, afin qu'elle puiſſe juger du degré de préciſion que j'ai taché de mettre dans ces calculs, pour les rendre vraiment utiles aux aſtronomes. Il m'a paru d'ailleurs que, malgré les expoſitions aſſés longues du calcul d'une éclipſe ou d'un paſſage, qui ſont entre les mains des aſtronomes, une théorie complete et ſuccincte de cette partie du calcul aſtronomique, ne ſerait pas inutile. Le mémoire que j'ai l'honneur de préſenter à l'Académie, ſe diviſe donc en deux parties, dont l'une contiendra les formules ſur leſquelles j'ai calculé les paſſages de Mercure dans le 19e ſiecle, dont les réſultats ſe trouveront dans la ſeconde partie. L'une et l'autre ſera ſubdiviſée en trois ſections, ſavoir, les calculs pour le cen-

centre de la terre, pour les différens points de ſa ſurface, et pour l'obſervatoire de St. Péterſbourg.

SECTION I.

Calcul pour le centre de la terre.

§. 1. Ayant trouvé par des tables calculées pour un méridien A, le tems moyens T de la conjonction compté au méridien A, on tirera de ces tables, pour le tems T, les élémens du calcul ſuivans:

Longitude héliocentrique de la terre et de Mercure $= L$,
Latitude héliocentrique de Mercure $= b$,
Mouvement horaire héliocentrique de la terre en longitude $= h$,
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en longitude $= H$,
Mouvement horaire héliocentrique de Mercure en latitude $= \beta$,
Diſtance de la terre au ſoleil $= \pi$,
Diſtance de Mercure au ſoleil $= \varrho$,
Diſtance de Mercure à la terre $= \sigma = \pi - \varrho$,
Demi-diamètre géocentrique du ſoleil $= r$,
Demi-diamètre géocentrique de Mercure $= R$,
Parallaxe horizontale du ſoleil $= p$,
Parallaxe horizontale de Mercure $= P = \frac{\pi p}{\pi - \varrho}$,
Différence des parallaxes $= P - p = \frac{\varrho p}{\pi - \varrho}$.

§. 2. Au moyen de ces élémens on calculera les quantités ſuivantes:

Incli-

Inclinaiſon de l'orbite relative de Mercure à l'écliptique = ω = Ang. tang. $\frac{\beta}{H-h}$,

Mouvement horaire héliocentrique de Mercure ſur ſon orbite relative = $G = \sqrt{[(H-h)^2 + \beta^2]} = \frac{\beta}{\sin\omega} = \frac{H-h}{\cos\omega}$,

La plus courte diſtance héliocentrique des centres de Mercure et de la terre = $m = b \cos\omega$,

Intervalle héliocentrique entre la conjonction et le milieu du paſſage = $n = b \sin\omega$,

Diſtance géocentrique des centres du ſoleil et de Mercure, au moment du contact extérieur = $r + R + P - p$,

Diſtance au moment du contact intérieur = $r - R + P - p$.

Quant au rayon du ſoleil r, je l'ai conſtamment diminué de 3″, à cauſe de *l'irradiation*, ſuivant ce que M. *du Sejour* a trouvé par les obſervations des éclipſes de ſoleil.

§. 3. Comme les angles héliocentriques ſe changent en géocentriques, et réciproquement, étant multipliés ou diviſés par $\frac{\varrho}{\sigma}$ (§. 2.), on trouve d'abord les valeurs ſuivantes, dont on aura beſoin dans la ſuite.

Diſtance héliocentrique des centres de Mercure et de la terre, au moment du contact extérieur =

$$u = \frac{\sigma}{\varrho}(r + R + P - p) = \frac{\sigma}{\varrho}(r + R) + p,$$

Diſtance héliocentrique au moment du contact intérieur $= v = \frac{\sigma}{\varrho}(r - R) + p$,

La plus courte diſtance géocentrique des centres du ſoleil et de Mercure $= m' = \frac{\varrho}{\sigma} m = \frac{\varrho b \cos\omega}{\pi - \varrho}$,

Intervalle héliocentrique entre le milieu du paſſage et le point du contact extérieur $= \sqrt{(u^2 - m^2)}$,

 Inter-

Intervalle entre le milieu et le point du contact intérieur $= \sqrt{(v^2 - m^2)}$,

Tems du milieu du paſſage $= t = T - \frac{n}{G} = T - \frac{b}{\beta} \sin^2 \omega$ heures,

Tems du contact extér. $= t \mp \frac{\sqrt{(u^2 - m^2)}}{G} = t \mp \frac{\sin \omega \sqrt{(u^2 - m^2)}}{\beta}$ heures,

Tems du contact intér. $= t \mp \frac{\sqrt{(v^2 - m^2)}}{G} = t \mp \frac{\sin \omega \sqrt{(v^2 - m^2)}}{\beta}$ heures;

le ſigne ſupérieur (—) étant pour l'entrée, et le ſigne (+) pour la ſortie.

§. 4. La durée totale du paſſage $= \frac{2 \sin \omega}{\beta} \sqrt{(u^2 - m^2)}$ heures, peut varier depuis zéro jusqu'à $\frac{2u}{\beta} \sin \omega = \frac{2\left(\frac{\pi - \varrho}{\varrho} r + p\right)}{\sqrt{((H-h)^2 + \beta^2)}}$, parceque $\sin \omega = \frac{\beta}{\sqrt{((H-h)^2 + \beta^2)}}$ (§. 2.). Pour les paſſages du mois de Mai on trouve les valeurs $\pi = 1,010$; $\varrho = 0,453$; $\pi - \varrho = 0,557$; $p = 8'',45$; $P = 15'',33$; $H = 7' 15''$; $h = 2' 25''$; $H - h = 290''$, $r = 950''$; et au mois de Novembre $\pi = 0,990$; $\varrho = 0,314$; $\pi - \varrho = 0,676$; $p = 8'',8$; $P = 12'',9$; $H = 15' 10''$, $h = 2' 31''$, $H - h = 759''$, $r = 972''$; et comme nous avons ſuppoſé Mercure dans le noeud même, en feſant $m = 0$, on a $\beta = H$ multiplié par la tangente de l'inclinaiſon $= 7°$, c'eſt-à-dire, $\beta = H \cdot 0,1228$; partant au mois de Mai $\beta = 53''$, et au mois de Novembre $\beta = 1' 50''$: ce qui donne *la plus grande valeur de la durée totale du paſſage du centre de Mercure*,

au mois de Mai $= \frac{2(1168 + 8,5)}{294,8}$ heures $= 7,9817$ heures $= 7$ h. 58 *m.* 54 s.

et au mois de Novembre $= \frac{2(2092 + 8,8)}{767} = 5,4795$ heures $= 5$ h. 28 m. 46 s.

La plus grande durée poſſible d'un paſſage eſt donc de huit heures.

§. 5.

§. 5. La latitude *b* étant ſuppoſée boréale, et le mouvement β dirigé vers le pole boréal de l'écliptique, *b* deviendra négative dans ces formules, quand la latitude de Mercure eſt auſtrale, et β, quand Mercure s'approche du pole auſtral: d'où il ſuit la regle ſuivante. L'angle ω eſt poſitif, c'eſt-à-dire, la partie de la perpendiculaire à l'orbite, qui eſt du côté du nord, décline à l'orient du cercle de latitude (parceque dans les conjonctions inférieures le mouvement géocentrique des planètes eſt rétrograde), quand β eſt poſitif, c'eſt-à-dire, quand les paſſages arrivent au mois de Novembre vers le noeud aſcendant; mais ω eſt négatif, quand les paſſages arrivent au mois de Mai: parceque $\tan g\, \omega = \frac{\beta}{u-b}$ (§. 2.). Le milieu du paſſage arrive avant la conjonction, quand *b* et β ont le même ſigne, c'eſt-à-dire, quand la conjonction arrive après le paſſage par le noeud; il arrive après la conjonction, quand celle-ci a lieu avant le paſſage par le noeud: parceque $t = T - \frac{b}{\beta} \sin^2 \omega$ (§. 3.).

§. 6. Le changement de la diſtance de Mercure au ſoleil, et l'inégalité de ſon mouvement, ſont aſſés ſenſibles dans l'eſpace de quelques heures, pour devoir entrer dans le calcul. Or, le tems du commencement et de la fin du paſſage étant déjà à très-peu près connu, on n'a qu'à calculer la diſtance ϱ, et les mouvemens horaires H, β, pour le commencement et la fin, de la même maniere dont on avait calculé ces quantités pour l'époque de la conjonction. Par le moyen de ces trois valeurs de ϱ, H, β, on trouvera aiſément leurs valeurs pour chaque moment de toute la durée du paſſage. Il ſeroit inutile de tenir compte de ces

diffé-

différences dans le calcul héliocentrique; mais on ne peut pas s'en diſpenſer, lorsqu'il s'agit de trouver les mouvemens géocentriques, dont on a beſoin dans le calcul parallactique pour un lieu déterminé. Voyons donc, comment les mouvemens géocentriques ſe déduiſent des mouvemens héliocentriques.

§. 7. On ſait qu'en nommant γ l'angle de commutation, ou la différence des longitudes héliocentriques de Mercure et de la terre, η l'élongation ou la différence des longitudes géocentriques de Mercure et du ſoleil, et b, b', les latitudes de Mercure vues du ſoleil et de la terre, on a

$$\text{tang}\,\eta = \frac{\varrho \sin \gamma}{\pi - \varrho \cos \gamma}, \text{ et } \text{tang}\,b' = \frac{\sin \eta}{\sin \gamma}\ \text{tang}\,b.$$

Mais, γ et b étant toujours fort petits dans les paſſages, on aura

$$\eta = \frac{\varrho \gamma}{\pi - \varrho}, \text{ et } b' = \frac{\eta b}{\gamma} = \frac{\varrho b}{\pi - \varrho}.$$

Pour juger de la préciſion de ces formules, il faut remarquer que dans un paſſage, l'angle γ ne ſaurait être plus grand que $u = \frac{\pi - \varrho}{\varrho}\, 16'$ (§. 3.) $= \frac{1,01 - 0,31}{0,31}\, 16' = 36'$, (en donnant à π ſa plus grande, et à ϱ ſa moindre valeur). On trouve par là

$$\text{tg}\,\eta = \frac{0,31 \,.\, \sin 36'}{1,01 - 0,31 \,.\, \cos 36'} = \text{tang}\ 15'\ 57'',$$

$$\text{et } \eta = \frac{\varrho}{\pi - \varrho} \,.\, \frac{\pi - \varrho}{\varrho} \,.\, 16' = 16':$$

d'où il ſuit que l'erreur de ces formules ſera toujours moindre que $3''$, dans toute la durée d'un paſſage. Ayant donc calculé pour un moment quelconque, les longitudes héliocentriques de Mercure, de la terre, et du ſoleil, ☿, ♁, et ☉ $= 180° +$ ♁, et la latitude héliocentrique de Mercure, b, on a

on a $\gamma = ♁ - ☿$, d'où l'on déduit la longitude géocentrique de Mercure, $☿' = \odot + \eta = 180^\circ + \frac{\pi ♁ - \rho ☿}{\pi - \rho}$. On en tire aiſément les mouvemens horaires géocentriques

du ſoleil $= h$, de ☿ en longitude $= \frac{\pi h - \rho H}{\pi - \rho} = H'$,

en latitude $= \frac{\rho \beta}{\pi - \rho} = \beta'$, et le mouvement horaire relatif en longitude $= \frac{\pi h - \rho H}{\pi - \rho} - h = - \frac{\rho (H - h)}{\pi - \rho} = G'$.

Pour ce qui regarde les mouvemens héliocentriques, au lieu de les tirer des tables, il vaut mieux les calculer au moyen des formules connues que voici. En nommant $a = 0,3871$ la diſtance moyenne de Mercure au ſoleil, ρ ſa diſtance vraie, $\varepsilon = 0,2056212$ ſon excentricité, b ſa latitude héliocentrique, $\nu = 7^\circ$ l'inclinaiſon de ſon orbite, $\mu = 613'',85$ le mouvement horaire moyen dans ſon orbite, $\lambda = 147'',85$ celui du ſoleil, F, H, β, les mouvemens horaires vrais de Mercure, dans ſon orbite, en longitude, et en latitude, enfin B ſa longitude héliocentrique moins celle du noeud: on a

$$F = \frac{a^2}{\rho^2} \mu \sqrt{(1 - \varepsilon^2)} = \frac{\lambda \sqrt{a (1 - \varepsilon^2)}}{\rho^2}, \text{ parceque } \lambda : \mu = a^{\frac{3}{2}} : 1,$$

$$H = \frac{F \cos \nu}{\cos^2 b}, \text{ et } \beta = F \sin \nu \cos B, \text{ ou bien}$$

$$F = \frac{90'',02276}{\rho\rho}, \; H = \frac{89'',35176}{\rho^2 \cos^2 b}, \text{ et } \beta = \frac{10'',97102}{\rho^2} \cos B.$$

§. 8. La propagation ſucceſſive de la lumiere fait que, du centre de la terre, on ne voit la conjonction que quelque tems après la conjonction vraie. Pour en tenir compte, il faut ſe ſouvenir que l'*aberration* d'une planete eſt toujours égale à ſon mouvement géocentrique, pendant le tems que la lumiere emploie à venir de la planete jusqu'à la terre, mais dans un ſens contraire. Or, la lumiere employant $487\frac{1}{3}$ ſecondes à parcourir le rayon de l'orbite terreſtre $= 1$, et par conſéquent $\sigma . 487\frac{1}{3}$ ſecondes à parcourir la diſtance σ de

de la planète, on aura (§. 7.)

l'aberration de Mercure

en longitude $= + \frac{\sigma . 487\frac{1}{3}}{3600} . \frac{\rho H - \pi b}{\sigma} = + 0,135 (\rho H - \pi h)$,

en latitude $= - \frac{\sigma . 487\frac{1}{3}}{3600} . \frac{\rho \beta}{\sigma} = - 0,135 . \rho \beta$,

et celle du ſoleil en longitude $= - 0,135 . h$, c'eſt-à-dire, au mois de Mai $= - 0,135 . 145'' = - 19'', 6$, et au mois de Novembre $= - 0,135 . 151'' = - 20'', 4$, ou en général, $= - 20''$. De là il ſuit qu'au moment de la conjonction vraie, Mercure paraitra éloigné du ſoleil à l'orient d'un arc égal à $20'' + 0,135 (\rho H - \pi h)$, qui, réduit en tems, à raiſon du mouvement horaire $G' = \frac{\rho (H - b)}{\pi - \rho}$ (§. 7.) donnera $\frac{3600 (\pi - \rho)}{\rho (H - b)} (20'' + 0,135 (\rho H - \pi h))$ ſecondes $= V$ pour le retardement de la conjonction, qu'il faut ajouter au tems calculé T (§. 1.), pour avoir l'inſtant de la conjonction apparente. Par la même raiſon il faut mettre $b + \frac{\beta V}{3600}$ au lieu de b, pour avoir la latitude héliocentrique vraie,

$$b' + \frac{\beta' V}{3600} \text{ (§. 7.) } = b' + \frac{\beta}{H - b} (20'' + 0,135 (\rho H - \pi h))$$

au lieu de b', pour avoir la latitude géocentrique vraie, et $b' + \frac{\beta' V}{3600} - 0,135 . \rho \beta = \frac{\rho}{\pi - \rho} (b + \frac{\beta V}{3600}) - \rho \beta . 0,135$; pour avoir la latitude géocentrique apparente au moment de la conjonction apparente.

§. 9. L'intervalle entre le moment du contact extérieur et de l'intérieur (§. 3.) eſt $= \frac{\sin \omega}{\beta} (\sqrt{(u^2 - m^2)} - \sqrt{(v^2 - m^2)})$: c'eſt ce que j'appellerai la *durée de l'immerſion et de l'émerſion.*

Il eſt facile de voir, que cet intervalle ſera d'autant plus court, que Mercure s'approchera davantage du centre du ſoleil: d'où il ſuit que ce tems aura ſa moindre valeur, quand Mercure paſſe par le centre du ſoleil, où $m = 0$, et

et ſa plus grande valeur, quand Mercure ne fait que raſer le bord intérieur du ſoleil, c'eſt-à-dire, quand $m = v$. Le *minimum* de la durée de l'immerſion eſt donc égal à

$$\frac{\sin\omega}{\beta}(u-v) = \frac{2(\pi-\rho)R}{\rho \cdot \sqrt{[(H-b)^2+\beta^2]}} \text{ (§. 2. 3.)} = M,$$

et le *maximum* $M' = \frac{\sin\omega}{\beta}\sqrt{(u^2-v^2)} = M\sqrt{\frac{u+v}{u-v}} = M\sqrt{\frac{r+P-p}{R}}$.

En employant donc les valeurs (§. 4.), et le demi-diamètre apparent de Mercure au mois de Mai, $R = 6'', 2$; au mois de Novembre, $R = 5'', 1$: on trouve pour les paſſages du mois de Mai,

le *minimum* $= \frac{1,114}{0,453} \cdot \frac{6,2}{294,8} = 0,05172$ heures $= 3$ min. 6 s.

le *maximum* $= \frac{1,114}{0,453} \cdot \frac{\sqrt{957} \cdot 6,2}{294,8} = 0,64256$ heures $= 38$ m. 33 s.

et pour ceux du mois de Novembre

le *minimum* $= \frac{1,352}{0,314} \cdot \frac{5,1}{767} = 0,02863$ heur. $= 1$ min. 43 sec.

et le *maximum* $= \frac{1,352}{0,314} \cdot \frac{\sqrt{976} \cdot 5,1}{767} = 0,39606$ heur. $= 23$ m. 46 s.

de ſorte que la durée de l'immerſion ou de l'émerſion peut varier depuis 1 min. 43 ſec. jusqu'à 38 min. 33 ſec.

SECTION II.

Calcul pour la ſurface de la terre.

§. 10. Pour trouver l'effet des parallaxes en différens pays de la terre, il faut commencer par calculer pour les trois époques du commencement, du milieu, et de la fin du paſſage vu du centre de la terre, les déclinaiſons D', D°, D'', et les angles de poſition $\varkappa'$, $\varkappa^{\circ}$, $\varkappa''$, du ſoleil, au moyen des longitudes A', A, A'', du ſoleil, et des formules,

$$\sin D = \sin e \sin A, \text{ et } \operatorname{tg} \varkappa = \operatorname{tg} e \cos A,$$

e étant l'obliquité de l'écliptique. Il faut obſerver que les déclinaiſons boréales ſont poſitives, et que l'angle $\varkappa$ eſt poſitif, quand le ſoleil ſe trouve dans les ſignes aſcendans, où cos A eſt poſitif, c'eſt-à-dire, quand le cercle de latitude décline à l'occident du cercle de déclinaiſon; au lieu que D eſt négatif, quand la déclinaiſon eſt auſtrale, et $\varkappa$ négatif dans les ſignes deſcendans. Au reſte, les trois valeurs de D et de $\varkappa$, ſerviront à trouver la valeur de D ou de $\varkappa$, pour un moment quelconque dans toute la durée du paſſage, par une ſimple regle de trois.

Tab. XIV. Fig. 2. §. 11. Soit (*Fig.* 2.) BD*bd*S une projection ortographique de la terre, dont le rayon $= P - p$; P étant la projection du pole arctique de la terre, S celle du centre de la terre, et du lieu qui a le ſoleil au zénit, et GSPF la projection du méridien du ſoleil, qui coupe le cercle d'illumination en deux parties égales, dont la partie occidentale F*db*G renferme tous les lieux qui verront dans ce moment le lever du ſoleil, et la partie orientale GDBF ceux qui auront le ſoleil couchant. Qu'on prenne du côté occidental

dental, l'angle PSL $= \varkappa$ (§. 10.), et du côté oriental l'angle LSM $= \omega$ (§. 5.), qu'on faſſe SF : SL : SM $= P - p : b' : m'$ (§. 7. 2.), et qu'on tire une ligne droite IMLE perpendiculaire à SM, qui repréſentera l'orbite de Mercure vue de la terre. Ayant coupé cette ligne en deux points I, E, de façon que SI $=$ SE $= r + P - p$, I ſera le premier point de l'entrée du centre de Mercure, et E le dernier point de la ſortie; le lieu *i* étant le premier de tous les pays de la terre, qui verra le centre de Mercure entrer ſur le ſoleil, et le lieu *e* le dernier qui verra Mercure ſortir de deſſus le ſoleil. Pareillement, feſant SK $= r - (P - p)$, de façon que K*k* $= r'$, le point *k* ſera le dernier de tous les pays de la terre, qui verra Mercure entrer ſur le ſoleil. Au lieu des points I, K, on peut ſubſtituer un point intermediaire A, éloigné du centre S de SA $= r$, de ſorte que les points B, *b*, de la terre, qui verront le commencement et la fin de l'entrée, ſont diamétralement oppoſés. Par la même raiſon, feſant SC $= r$, les points diamétralement oppoſés D, *d*, verront le commencement et la fin de la ſortie. Les points B, *d*, ſont ceux que Mr. de la Lande appelle *poles d'entrée et de ſortie.*

§. 12. Le tems que Mercure emploie à parcourir le ſegment IK de ſon orbite, c'eſt-à-dire, la durée de l'entrée ſe trouve facilement au moyen des données, SM $= m'$, SI $= r + (P - p)$, SK $= r - (P - p)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} IK &= \sqrt{((r + P - p)^2 - m'^2)} - \sqrt{((r - P + p)^2 - m'^2)} \\ &= \sqrt{(r^2 - m'^2 + 2r(P - p))} - \sqrt{((r^2 - m'^2 - 2r(P - p))} \\ &= \sqrt{(r^2 - m'^2)} + \frac{r(P - p)}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}} - \sqrt{(r^2 - m'^2)} + \frac{r(P - p)}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}} \\ &= \frac{2r(P - p)}{\sqrt{(r^2 - m'^2)}}, \end{aligned}$$

dont la valeur héliocentrique (§. 3.)

 eſt

eſt $\frac{2(\pi-\rho)(P-p)r}{\rho\sqrt{(r^2-m'^2)}} = \frac{2pr}{\sqrt{(r^2-m'^2)}}$ (§. 1.).

On convertira cela en tems, à raiſon du mouvement horaire $G = \sqrt{((H-h)^2+\beta^2)}$ (§. 2.), ce qui donne $\frac{2rp}{\sqrt{(r^2-m'^2)((H-h)^2+\beta^2)}}$ heures pour la *durée de l'entrée et de la ſortie.*

La valeur de ce tems ſera un *minimum*, lorsque $m'=0$, et un *maximum*, lorsque $m' = SK = r-(P-p)$ (§. 9.). Le *minimum* eſt donc $= \frac{2p}{\sqrt{((H-h)^2+\beta^2)}}$, et le *maximum* $= \frac{2rp}{\sqrt{2r(P-p)((H-h)^2+\beta^2)}} = \sqrt{\frac{2rp(\pi-\rho)}{\rho((H-h)^2+\beta^2)}}$ (§. 1.): ce qui donne, moyennant les valeurs (§. 4.), les réſultats ſuivans. La moindre valeur de la durée de l'entrée et de la ſortie eſt au mois de Mai $= \frac{16,9}{294,8} = 0,0573$ heures $= 3$ min. 26 ſec. et au mois de Novembre $= \frac{17,6}{767} = 0,0229$ heures $= 1$ m. 22 s. La plus grande valeur au mois de Mai $= \frac{1}{294,8}\sqrt{\frac{16,9 \cdot 950 \cdot 0,557}{0,453}} = 0,4766$ heures $= 28$ min. 36 ſec. et au mois de Novembre $= \frac{1}{767}\sqrt{\frac{17,6 \cdot 972 \cdot 0,676}{0,314}} = 0,2502$ heures $= 15$ minutes. La durée de l'entrée ou de la ſortie peut donc varier depuis 1 min. 22 ſec. jusqu'à 28 min. 36 ſec.

§. 13. De la même maniere on trouve le moment où Mercure eſt en A et en C, en convertiſſant le ſegment $MA = MC = \sqrt{(r^2-m'^2)}$ vu du ſoleil, c'eſt-à-dire, $\frac{\pi-\rho}{\rho}\sqrt{(r^2-m'^2)}$, en tems, à raiſon du mouvement horaire G, d'où il reſulte $\frac{\pi-\rho}{\rho G}\sqrt{(r^2-m'^2)}$ heures, ce qu'il faut ôter du tems du milieu *t*, ou y ajouter, pour avoir le *tems du milieu de l'entrée ou de la ſortie* en A ou en C, qui eſt $= \mp t \frac{\pi-\rho}{\rho}\sqrt{\frac{r^2-m'^2}{(H-h)^2+\beta^2}}$ heures.

§. 14.

§. 14. Soit donc $t' = t - \frac{\pi - \varrho}{\varrho G} \sqrt{(r^2 - m'^2)}$ le tems du méridien A des tables (§. 1.), où le lieu B, dont la latitude boréale ſoit $= \Phi'$, la longitude orientale comptée du meridien $A = \lambda'$, verra le premier l'entrée en A: alors on aura dans le triangle ſphérique SPB, $SB = 90°$, $SP = 90° - D'$ (§. 10.), $PB = 90° - \Phi'$, et $PSB = MSA + LSM - PSL$, ou bien $PSB = \alpha + \omega - \varkappa'$, en nommant α l'angle MSA, dont le coſinus $= \frac{m'}{r}$. De là il ſuit

$$\cos PB = \cos SB \cos SP + \sin SB \sin SP \cos PSB,$$

et $\tan SPB = \frac{\sin PSB}{\cot SB \sin SP - \cos SP \cos PSB} = \tan \varepsilon'$, c'eſt-à-dire,

$$\sin \Phi' = + \cos D' \cos(\alpha + \omega - \varkappa'), \text{ et } \operatorname{tg} \varepsilon' = - \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \omega - \varkappa')}{\sin D'}.$$

Or, ſi PH eſt le méridien A des tables, l'angle HPG eſt $= 15t'$, et par conſéquent $HPB = \lambda' = \varepsilon' - 15t'$.

En nommant Φ'' la latitude boréale, et λ'' la longitude orientale, du point d qui verra le dernier la ſortie en C, on a

$$PS = 90° - D'', \; PSL = \varkappa'', \; PSd = MSd - LSM + PSL$$
$$= \alpha - \omega + \varkappa'', \text{ donc}$$
$$\sin \Phi'' = + \cos D'' \cos(\alpha - \omega + \varkappa''),$$
$$\operatorname{tg} SPd = \operatorname{tg} \varepsilon'' = - \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \omega + \varkappa'')}{\sin D''},$$
$$\text{et } HPd = - \lambda'', \text{ ou } \lambda'' = - \varepsilon'' - 15t'',$$
t'' étant $= t + \frac{\pi - \varrho}{\varrho G} \sqrt{(r^2 - m'^2)}$.

La latitude du point S qui aura le ſoleil au zénit dans le tems du milieu du paſſage, eſt $= D$, ſa longitude $= - 15t$. Pour le point N qui, de tous les lieux de la terre, verra la plus courte diſtance des centres NM, on a $PS = 90° - D$, $PSL = \varkappa$, $PSN = \varkappa - \omega$: par conſéquent, ſa latitude Φ et

et longitude λ, ſe déterminerout au moyen des équations:

$$\sin \Phi = + \cos D \cos(\varkappa - \omega), \quad \text{tg SPN} = \text{tg}\,\varepsilon = - \frac{\text{tg}(\varkappa + \omega)}{\sin D},$$

$$\text{et } \lambda = - \varepsilon - 15\,t.$$

La plus courte diſtance apparente eſt

$$NM = m' - (P - p) = \frac{\rho(b \cos \omega - p)}{\pi - \rho}.$$

Les points b, D, qui verront la fin de l'entrée et le commencement de la ſortie, étant diamétralement oppoſés aux points B, d, la latitude de b ſera $= -\Phi'$, ſa longitude orientale comptée du méridien A $= 180° + \lambda'$, la latitude du point D $= -\Phi''$, et ſa longitude $= 180° + \lambda''$.

Au reſte, il eſt evident (§. 11.) que les points B, D, verront le commencement de l'entrée et de la ſortie, au coucher du ſoleil, tandis que les lieux b, d, verront la fin de l'entrée et de la ſortie au lever du ſoleil.

§. 15. Parmi les pays qui, ſitués dans l'hémiſphère ſupérieur ou illuminé par le ſoleil au moment de l'entrée, auront le ſoleil ſur l'horizon, il y en aura qui, étant trop près de l'horizon oriental GDBF, perdront le ſoleil de vue, avant d'avoir vu la ſortie. Ces pays ſeront donc ſéparés les uns des autres, par un demi-cercle paſſant par tous les lieux qui verront la ſortie au coucher du ſoleil, c'eſt-à-dire, par l'horizon oriental GDBF du globe diſpoſé pour l'inſtant de la ſortie. Les pays qui ſont à l'occident de ce cercle, verront tout le paſſage, tandis que ceux à l'orient n'en verront que le commencement. Par la même raiſon, les pays ſitués dans l'hémisphére inférieur, et à l'orient de l'horizon occidental du globe diſpoſé pour le moment de la ſortie, ne verront que la fin du paſſage, mais ceux à l'occident n'en verront rien du tout. La ſurface de

la

la terre ſera donc coupée en quatre parties, par deux cercles dont les poles ſont les lieux du ſoleil à l'inſtant de l'entrée et de la ſortie, que je marquerai E et S, dans les mappemondes que j'aurai l'honneur de préſenter à l'Académie. Ces quatre parties ſeront deſignées dans mes cartes par les mots, *Entrée*, *Sortie*, *Tout*, et *Rien*.

§. 16. Il y a, tant pour l'entrée que pour la ſortie, deux points remarquables F, G, dont l'un va ſe coucher et lever, et l'autre va ſe lever et coucher en même tems, au moment de l'entrée ou de la ſortie, de ſorte que celui-là voit tout le paſſage, et celui-ci ſeulement le moment de l'entrée ou de la ſortie. La latitude du premier point F eſt $90° - D'$ ou $90° - D''$, ſa longitude $180° - HPG = 180° - 15t'$ (§. 14.) ou $180° - 15t''$. La latitude du point G eſt $-(90° - D')$ ou $-(90° - D'')$, ſa longitude eſt $-15t'$ ou $-15t''$.

§. 17. Comme l'entrée auſſi bien que la ſortie peut durer une demi-heure (§. 12.), il ſera intéreſſant de connaitre les lieux de la terre, qui de minute en minute ou de deux en deux minutes, verront le centre de Mercure entrer ou ſortir du ſoleil. Soit (*Fig.* 3.) IM l'orbite relative Tab.XIV. Fig. 3.
de Mercure, I le premier point de l'entrée, L le point où Mercure ſe trouve ν minutes après, et LS une ligne menée au centre S de la terre, coupant ſa ſurface en N. L'interſection d'un cone droit $nL\nu$ dont l'axe eſt LS, les côtés $Ln = L\nu = r$, ſera le parallele $nl\nu$ qui renferme tous les lieux qui verront l'entrée, au moment où Mercure ſe trouve en L. Il s'agit donc de déterminer la poſition du pole N,

et ſa

et ſa diſtance au parallele. Les ſegmens

$$IM = \sqrt{((r + P - p)^2 - m'^2)}, \text{ et } IL = \frac{\nu \varrho G}{60(\pi - \varrho)},$$

étant connus, on a $\tang MSL = \frac{IM - IL}{m'}$, ou bien

$$\tang \gamma = \frac{\sqrt{((\frac{\pi - \varrho}{\varrho} r + p)^2 - m^2)} - \frac{\nu G}{60}}{m}.$$

En ſubſtituant cet angle γ dans les formules précédentes (§. 14.) à la place de α, on trouve

$$\sin \psi' = + \cos D' \cos (\gamma + \omega - \varkappa'), \ \operatorname{tg} \zeta' = - \frac{\operatorname{tg}(\gamma + \omega - \varkappa')}{\sin D'},$$

et $\xi' = \zeta' = 15 \tau'$,

ψ' étant la latitude, ξ' la longitude du pole N; D', $\varkappa'$, les valeurs de D, $\varkappa$ (§. 10.), et τ' le tems compté au méridien des tables, au moment où Mercure ſe trouve en L, c'eſt-à-dire (§. 3.), $\tau' = t - \frac{\sqrt{(u^2 - m^2)}}{G} + \nu$ minutes. De la même maniere, on trouve pour le lieu qui, ν minutes avant la derniere ſortie, verra Mercure ſortir du ſoleil,

$$\sin \psi'' = \cos D'' \cos (\gamma - \omega + \varkappa''), \ \operatorname{tg} \zeta'' = - \frac{\operatorname{tg}(\gamma - \omega + \varkappa'')}{\sin D''},$$

et $\xi'' = - \zeta'' - 15 \tau''$.

L'arc Nν, ou la diſtance du parallele à ſon pole N, eſt égal à l'angle NSν qu'on trouve au moyen des trois côtés du triangle LSν, ſavoir

$$LS = m' \sec \gamma = \frac{\varrho m \sec \gamma}{\pi - \varrho}, \ S\nu = P - p = \frac{\varrho p}{\pi - \varrho}, \text{ et } L\nu = r,$$

par la formule

$$\cos NS\nu = \frac{LS^2 + S\nu^2 - L\nu^2}{2 LS . S\nu} = \frac{m^2 \sec^2 \gamma + p^2 - \frac{(\pi - \varrho)^2 r^2}{\varrho^2}}{2 m p \sec \gamma}.$$

Il eſt ſurtout néceſſaire, de connaitre ces cercles $n l \nu$ dans les paſſages de Venus.

§. 18.

§. 18. Quand on veut faire uſage des formules (§. 14. ſuiv.), pour calculer la poſition des lieux les plus importans par rapport à ces phénomenes, il faut obſerver que les angles D, $\varkappa$, b, β, m, ω, et α ou γ, ſont tantôt poſitifs tantôt négatifs. Comme les paſſages de Mercure ne ſauraient arriver qu'aux mois de Mai ou de Novembre, il y aura en tout quatre cas différens, que voici.

Le paſſage arrive

I. au mois de *Mai.* Le ſoleil eſt dans les ſignes aſcendans, Mercure dans le noeud deſcendant: donc D, $\varkappa$, poſitifs (§. 10.), β et ω négatifs (§. 5.), et il y a deux cas à conſidérer.

1) Si la conjonction eſt *avant* le paſſage par le noeud, b et m ſont poſitifs (§. 2.), le milieu arrive après la conjonction (§. 5.); et dans toutes les formules précédentes il n'y a d'autre changement à faire, que de ſubſtituer $-\omega$ au lieu de ω.

2) Si la conjonction a lieu *après* le paſſage par le noeud, b et m ſont négatifs; d'où il ſuit que le milieu arrive avant la conjonction, et que cos α (§. 14.) et tang γ (§. 17.) ſont négatifs. Il faut donc ſubſtituer $-\omega$, $180° - \alpha$, $180° - \gamma$, à la place de ω, α, γ.

II. au mois de *Novembre.* Le ſoleil eſt dans les ſignes deſcendans, Mercure vers le noeud aſcendant: par conſéquent D, $\varkappa$, négatifs, β, ω poſitifs.

1) Si la conjonction eſt *avant* le paſſage par le noeud, b, m, cos α, tang γ, ſont négatifs, le milieu arrive

 après

après la conjonction, et il faut mettre $-D, -\varkappa, 180°-\alpha, 180°-\gamma$, à la place de $D, \varkappa, \alpha, \gamma$.

2) Si la conjonction arrive *après* le paſſage par le noeud, b, m, ſont poſitifs, le milieu a lieu avant la conjonction, et il n'y a qu'à ſubſtituer $-D, -\varkappa, -\sin D$, au lieu de $D, \varkappa, \sin D$.

SEC.

SECTION III.

Calcul pour un lieu déterminé.

§. 19. Tout ce calcul ſe réduiſant au problême, *étant donnée la diſtance vraie ou géocentrique de deux aſtres, trouver leur diſtance apparente ou changée par les parallaxes,* j'en donnerai une ſolution que je crois être la plus ſimple, la plus directe, et la plus commode pour ce calcul. Soit (*Fig.* 4.) E le pole boréal de l'écliptique ♈L♎, P celui Tab. XIV. Fig. 4. de l'équateur, Z le zénit, ZS, ZM, les verticals menés par les lieux géocentriques ☉, ☿, du ſoleil et de Mercure, et τ le tems donné pour lequel on cherche la diſtance, réduit au méridien PZ, de ſorte que l'angle ZP☉ $= 15\,\tau = u$. Au moyen des mouvemens horaires et des formules données ci-deſſus, l'on calculera pour le même tems τ, la longitude f, et la latitude g de Mercure, vues du centre de la terre, la longitude du ſoleil $= A$, ſa déclinaiſon $= D$, et ſon angle de poſition $= \varkappa$. En nommant donc $f - A =$ ☉L $= a$, l'angle P☉Z $= \delta$, la latitude du lieu Z $= \Phi$, l'obliquité de l'écliptique PE $= e$, les diſtances vraies du ſoleil et de Mercure au zénit, Z☉ $= k$, Z☿ $= K$, l'angle parallactique E☉Z $= v$, la diſtance géocentrique des centres ☉☿ $= s$: on a dans le triangle P☉Z,

$$\cos k = \sin\Phi \sin D + \cos\Phi \cos D \cos u,$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\sin u}{\operatorname{tg}\Phi \cos D - \sin D \cos u}, \text{ et } v = \delta + \varkappa.$$

§. 20. Dans le triangle ☉L☿ on a

$$\cos s = \cos a \cos g,\ \operatorname{tg} \text{L}\odot\text{☿} = \frac{\operatorname{tg} g}{\sin a},\ \sin \text{L}\odot\text{☿} = \frac{\sin g}{\sin s},$$

$$\cos \text{L}\odot\text{☿} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} s} = \frac{\operatorname{tg} a \cos s}{\sin s} = \frac{\sin a \cos g}{\sin s},$$

$Z\odot L = 90^\circ - v$, et $Z\odot☿ = 90^\circ - v - L\odot☿$:

d'où l'on tire dans le triangle $Z\odot☿$,

$$\cos K = \cos k \cos s + \sin k \sin s \sin (v + L\odot☿) =$$
$$\cos k \cos a \cos g + \sin k \sin v \sin a \cos g + \sin k \cos u \sin g,$$

ou bien, en feſant pour abreger, $\cos a \cos g = l$, $\sin a \cos g = m$, $\sin g = n$. $\cos k = \lambda$, $\sin k \sin v = \mu$, $\sin k \cos v = \nu$,

$$\cos K = l\lambda + m\mu + n\nu.$$

Les verticals $Z\odot$, $Z☿$, étant prolongés en S, M, de maniere que $\odot S = q$, $☿M = Q$, ſoient les parallaxes qui répondent aux diſtances au zénit, k, K, la diſtance apparente des centres du ſoleil et de Mercure ſera $SM = s'$. Mais, ſi

Tab. XIV. Fig. 5. (*Fig.* 5.) C eſt le centre de la terre, Z le zénit d'un lieu A, S un aſtre quelconque dont la parallaxe horizontale $\frac{CA}{CS} = p$, on a rigoureuſement, $\mathrm{tg}\, ASC = \frac{CA \sin ZCS}{CS - CA \cos ZCS}$, c'eſt-à-dire,

$$\mathrm{tg}\, q = \frac{p \sin k}{1 - p \cos k}, \text{ et par la même raiſon } \mathrm{tg}\, Q = \frac{P \sin K}{1 - P \cos K},$$

d'où il ſuit,

$$\sin q = \frac{p \sin k}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)}}, \cos q = \frac{1 - p \cos k}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)}},$$
$$\sin Q = \frac{P \sin K}{\sqrt{(1 - 2P \cos K + P^2)}}, \cos Q = \frac{1 - P \cos K}{\sqrt{(1 - 2P \cos K + P^2)}}$$

partant, $\cos q + \cot k \sin q = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)}}$, et

$$\cos Q + \cot K \sin Q = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2P \cos K + P^2)}}.$$

§. 21. Dans le triangle $\odot Z ☿$ (*Fig.* 3.) on a $\cos \odot Z ☿ = \frac{\cos s - \cos k \cos K}{\sin k \sin K}$, et dans le triangle SZM,

$$\cos s' = \cos ZS \cos ZM + \sin ZS \sin ZM \cos \odot Z ☿ =$$
$$\cos(k+q)\cos(K+Q) + \frac{\sin(k+q)\sin(K+Q)}{\sin k \sin K}(\cos s - \cos k \cos K),$$

c'eſt-

c'eſt-à-dire,

$$\begin{aligned}\cos s' &= (\cos k \cos q - \sin k \sin q)\,(\cos K \cos Q - \sin K \sin Q) \\ &+ (\cos q + \cot k \sin q)(\cos Q + \cot K \sin Q)(\cos s - \cos k \cos K) \\ &= \cos k \cos K \cos q \cos Q - \cos k \sin K \cos q \sin Q \\ &- \sin k \cos K \sin q \cos Q + \sin k \sin K \sin q \sin Q \\ &+ \cos s\,(\cos q + \cot k \sin q)\,(\cos Q + \cot K \sin Q) \\ &- \cos k \cos K \cos q \cos Q - \tfrac{\cos k \cos^2 K}{\sin K} \cos q \sin Q \\ &- \tfrac{\cos^2 k \cos K}{\sin k} \sin q \cos Q - \tfrac{\cos^2 k \cos^2 K}{\sin k \sin K} \sin q \sin Q = \\ &\cos s\,(\cos q + \cot k \sin q)\,(\cos Q + \cot K \sin Q) \\ &- \tfrac{\cos k}{\sin K} \cos q \sin Q - \tfrac{\cos K}{\sin k} \sin q \cos Q + \tfrac{(\sin^2 k \sin^2 K - \cos^2 k \cos^2 K) \sin q \sin Q}{\sin k \sin K},\end{aligned}$$

d'où en ſubſtituant les valeurs de $\sin q$, $\cos q$, etc. (§. 20.) et en réduiſant les termes, on obtient

$$\cos s' = \frac{\cos a \cos g - P \cos k (1 - p \cos k) - p \cos K (1 - P \cos K) + P p (\sin^2 k - \cos^2 K)}{\sqrt{(1 - 2p \cos k + p^2)(1 - 2 P \cos K + P^2)}},$$

c'eſt-à-dire,

$$\cos s' = \frac{\cos a \cos g - P \cos k - p \cos K + P p}{\sqrt{(1 - 2 p \cos k + p^2)(1 - 2 P \cos K + P^2)}},$$

ou bien en ſubſtituant les valeurs (§. 20.) $\cos k = \lambda$, $\cos K = l\lambda + m\mu + n\nu$, $\cos a \cos g = l$,

$$\cos s' = \frac{l - P\lambda - p\,(l\lambda + m\mu + n\nu) + P p}{\sqrt{(1 - 2 p \lambda + p^2)(1 - 2 P (l\lambda + m\mu + n\nu) + P^2)}}.$$

§. 22. Voilà une expreſſion de l'effèt des parallaxes, exacte et aſſés ſimple, ſans qu'on ait négligé la moindre quantité. Elle peut donc être employée, quelque grandes que ſoient les diſtances et les parallaxes; mais pour les paſſages des planetes ſur le ſoleil, où l'on peut négliger, ſans commettre une erreur ſenſible, les carrés des parallaxes, on a, en féſant pour abreger, $l\lambda + m\mu + n\nu = c$,

cos s'

$$\cos s' = \frac{l - pc - P\lambda}{\sqrt{(1 - 2p\lambda - 2Pc)}} = \frac{l - pc - P\lambda}{1 - p\lambda - Pc} =$$

$$(l - pc - P\lambda)(1 + p\lambda + Pc) = l - p(c - l\lambda) + P(cl - \lambda) =$$

$$\cos s - p(m\mu + n\nu) + P(cl - \lambda).$$

Comme dans les paſſages, s et s' ne ſont jamais plus grandes que $16'$, on a, en négligeant leurs quatriemes puiſſances, $\cos s = 1 - \frac{s^2}{2}$, et $\cos s' = 1 - \frac{s'^2}{2}$, d'où l'on tire

$$\frac{s'^2}{2} = \frac{s^2}{2} + p(m\mu + n\nu) - P(cl - \lambda), \text{ ou bien}$$

$$s' = \sqrt{(s^2 + 2p(m\mu + n\nu) - 2P(cl - \lambda))} =$$

$$s + \frac{p(m\mu + n\nu) - P(cl - \lambda)}{s} = s + \frac{(p - Pl)(m\mu + n\nu)}{s} + \frac{P\lambda(1 - l^2)}{s} =$$

$$s + \frac{(p - Pl)(m\mu + n\nu)}{s} + Ps\lambda,$$

c'eſt-à-dire,

$$s' = s(1 + P\cos k) + \frac{(p - P\cos s)(\sin a \cos g \sin v + \sin g \cos v)\sin k}{s},$$

où s ſe calcule aiſément pour chaque inſtant, au moyen des mouvemens géocentriques, ou ſe trouve déjà calculé dans les ſections précédentes, par les formules $s = \sqrt{(a^2 + g^2)}$ ou $\cos s = \cos a \cos g$.

§. 23. Au moment où le centre de Mercure ſe voit ſur le bord du ſoleil, ſoit à l'entrée, ſoit à la ſortie, on a $s' = r$, équation qu'on ne ſaurait réſoudre que par approximation ou par tatonnemens, en feſant uſage d'une interpolation aſſés connue, qui ſuppoſe qu'on ait déjà calculé trois diſtances apparentes peu éloignées du commencement, du milieu, et de la fin. Mais quand on a obſervé les inſtans τ', τ'', de l'immerſion et de l'émerſion, et qu'on en veut conclure la longitude du méridien B, ſous lequel l'obſervation a été faite, on ne peut calculer exactement les angles géocentriques a, g, etc. (§. 19.), pour l'inſtant de l'obſer-

l'obſervation, la différence entre les tems τ', τ'', du méridien B, et les tems répondans du méridien A des tables, n'étant pas encore connue. Cependant on connait exactement leurs changemens dans l'intervalle $\tau'' - \tau'$, par les mouvemens horaires des élémens A, f, a, g, (§. 19.), ſavoir

$$h = h \text{ (§. 1.)}, \; H' = \frac{\pi b - \varrho H}{\pi - \varrho}, \; G' = -\frac{\varrho(H-b)}{\pi - \varrho}, \text{ et } \beta' = \frac{\varrho \beta}{\pi - \varrho} \text{ (§. 7.)}.$$

En nommant donc les valeurs de a et g, répondans au tems τ', $a = x$, $g = y$, et $\tau'' - \tau' = \vartheta$, on aura pour le tems τ'', $a = x + G\vartheta$, $g = y + \beta'\vartheta$. Pour ce qui regarde les quantités λ, μ, ν, (§. 20.) qui changent très-lentement, et n'ont pas la même influence ſur la valeur de s' (§. 22.), étant multipliées par p ou P; on peut ſuppoſer la longitude du méridien B aſſés connue, pour calculer leurs valeurs pour les inſtans τ' et τ'', que j'appellerai λ, μ, ν, et λ', μ', ν'.

§. 24. Au moyen des formules (§. 22.)

$$s'^2 = s^2 + 2p(m\mu + n\nu) - 2P(\lambda(l^2 - 1) + l(m\mu + n\nu)),$$
$$\text{et } s^2 = a^2 + g^2,$$

on obtient les deux équations ſuivantes:

$$\text{I. } r^2 = x^2 + y^2 + 2p(\mu \sin x \cos y + \nu \sin y)$$
$$- 2P[\lambda(\cos^2 x \cos^2 y - 1) + \cos x \cos y(\mu \sin x \cos y + \nu \sin y)],$$

$$\text{II. } r^2 = (x + G'\vartheta)^2 + (y + \beta'\vartheta)^2$$
$$+ 2p(\mu' \sin(x + G'\vartheta)\cos(y + \beta'\vartheta) + \nu' \sin(y + \beta'\vartheta))$$
$$- 2P[\lambda'(\cos^2(x + G'\vartheta)\cos^2(y + \beta'\vartheta) - 1)$$
$$+ \cos(x + G'\vartheta)\cos(y + \beta'\vartheta)(\mu' \sin(x + G'\vartheta)$$
$$\cos(y + \beta'\vartheta) + \nu' \sin(y + \beta'\vartheta))],$$

ou

ou en ſubſtituant $\sin x = x$, $\sin y = y$, $\cos x = 1$, $\cos y = 1$,

$$\text{I. } r^2 = x^2 + y^2 - 2(P - p)(\mu x + \nu y);$$

$$\text{II. } r^2 = x^2 + y^2 + 2\vartheta(G'x + \beta'y) + \vartheta^2(G'^2 + \beta'^2) - 2(P - p)(\mu'x + \nu'y + \vartheta(\mu'G' + \nu'\beta')),$$

d'où, en ôtant la ſeconde équation de la premiere, et en feſant pour abreger,

$$\mu' - \mu = \mathfrak{M},\ \nu' - \nu = \mathfrak{N},\ P - p = \mathfrak{P},$$

l'on tire

$$o = 2\mathfrak{P}(\mathfrak{M}x + \mathfrak{N}y + \vartheta(\mu'G' + \nu'\beta)) - 2\vartheta(G'x + \beta'y) - \vartheta^2(G'^2 + \beta'^2),$$

ou bien

$$y = \frac{2x(\mathfrak{M}\mathfrak{P} - \vartheta G') + 2\mathfrak{P}\vartheta(\mu'G' + \nu'\beta') - \vartheta^2(G'^2 + \beta'^2)}{2(\vartheta\beta' - \mathfrak{N}\mathfrak{P})}.$$

Ayant donc calculé les quantités données

$$\frac{\mathfrak{M}\mathfrak{P} - \vartheta G'}{\vartheta\beta' - \mathfrak{N}\mathfrak{P}} = B,\quad \frac{\frac{1}{2}\vartheta^2(G'^2 + \beta'^2) - \mathfrak{P}\vartheta(\mu'G' + \nu'\beta')}{\vartheta\beta' - \mathfrak{N}\mathfrak{P}} = C,$$

on a $y = Bx - C$; ce qui ſubſtitué dans l'équation I, donne

$$r^2 = x^2(1 + B^2) - 2x(BC + \mu\mathfrak{P} + B\nu\mathfrak{P}) + C(C + 2\nu\mathfrak{P}),$$

d'où, ayant calculé

$$\frac{BC + \mathfrak{P}(\mu + B\nu)}{1 + B^2} = E, \text{ et } \frac{C(C + 2\nu\mathfrak{P}) - r^2}{1 + B^2} = F,$$

l'on tire

$$x = E \pm \sqrt{(E^2 - F)}, \text{ et } y = BE - C \pm B\sqrt{(E^2 - F)}.$$

Comme la latitude géocentrique y, pendant toute la durée du paſſage, change ſi peu, que ſa valeur ne peut pas être fort différente de la valeur b' (§. 7.) qu'elle a au moment de la conjonction vraie, il ſera facile de connaitre, laquelle des deux valeurs de y convient au tems de l'immerſion, c'eſt-à-dire, s'il faut employer le ſigne + ou —.

§. 25.

§. 25. Ayant trouvé par cette méthode, les valeurs x, y, ou a, g, à l'inſtant de l'immerſion apparente, on en déduira aiſément le tems T′ de la conjonction géocentrique, compté au méridien B, puiſque c'eſt le moment où $a = 0$. L'angle a eſt donc diminué de x, depuis l'immerſion τ' jusqu'à la conjonction vraie T′; or il lui faut $- \frac{x}{a'}$ heures pour cela (§. 23.): on a donc

le *tems de la conjonction vraie*, $T' = \tau' - \frac{x}{a'} = \tau' + \frac{(\pi - \varrho) x}{\varrho (H - b)}$ heures (§. 7.),

la *latitude géocentrique de Mercure dans la conjonction* =

$$y + \frac{(\pi - \varrho) \beta' x}{\varrho (H - b)} = y + \frac{\beta x}{H - b},$$

et ſa *longitude* égale à celle du ſoleil.

Ces formules ſuffiſent, tant pour déterminer les longitudes de tous les lieux, où l'immerſion et l'émerſion a été obſervée, que pour corriger les élémens de Mercure.

§. 26. Après avoir calculé l'inſtant de l'immerſion et de l'émerſion pour un lieu déterminé, on prend le milieu entre ces deux inſtans, pour le moment de la plus grande phaſe. Ayant donc calculé, au moyen d'une des formules (§. 22.), la diſtance apparente pour ce moment, elle ſera la plus courte diſtance ou *la plus grande phaſe* pour ce lieu.

§. 27. Il ne reſte maintenant, que de déterminer la poſition des points de l'immerſion, de l'émerſion, et du milieu, pour un lieu donné. Soit (*Fig.* 6.) S le centre du ſoleil, IE la route apparente de Mercure ſur le ſoleil, I, E, les points de l'immerſion et de l'émerſion, M le milieu, SM = s'' la plus courte diſtance apparente, AB l'écliptique, SC le cercle de latitude, SV le vertical, IK, MN, EF,

perpendiculaires à l'écliptique. Ayant calculé pour les momens où Mercure apparait en I, E, M, ſes latitudes géocentriques g, g', g'', les diſtances du ſoleil au zénit, k, k', k'', les angles parallactiques v, v', v'' (§. 19.), et l'effêt relatif des parallaxes $(P-p) \sin k$ (§. 20.), on trouve les latitudes apparentes de Mercure, au moyen des formules, $IK = g - (P-p) \sin k \cos v$, $EF = g' - (P-p) \sin k' \cos v'$, et $MN = g'' - (P-p) \sin k'' \cos v''$. On a donc pour l'immerſion

$$\sin BSI = \cos CSI = \frac{IK}{IS} = \frac{g - (P-p) \sin k \cos v}{r+R},\ VSC = v,$$

et l'élongation du point de l'immerſion depuis la partie boréale du vertical vers l'orient, ou l'angle

$$VSI = w = \text{Ang. cos.} \frac{g - (P-p) \sin k \cos v}{r+R} - v.$$

De la même maniere, on trouve l'élongation du point de l'émerſion depuis la partie boréale du vertical vers l'occident,

$$VSE = w' = \text{Ang. cos.} \frac{g' - (P-p) \sin k' \cos v'}{r+R} + v',$$

et l'élongation du point de la plus grande phaſe vers l'orient,

$$VSM = w'' = \text{Ang. cos.} \frac{g'' - (P-p) \sin k'' \cos v''}{s''} - v''.$$

Il faut obſerver, 1) que l'angle v devient négatif, quand le cercle de latitude tombe du côté oriental (§. 19.), 2) qu'il faut ſubſtituer la partie méridionale du vertical au lieu de SV, quand les latitudes apparentes ſont auſtrales, 3) qu'il faut changer les élongations orientales en occidentales, et réciproquement, quand les angles w, w', w'', ſont négatifs.

DE RELATIVA NONNULLORUM LOCORUM ELEVATIONE,

IN QUIBUS OBSERVATIONES BAROMETRICAE AC THERMOMETRICAE SUNT INSTITUTAE.

AUCTORE

P. INOCHODZOW.

Conventui exhibita die 4. Junii 1800.

Cum nuper obſervationes meteorologicas Petropoli et Moſquae a celeberrimis viris Eulero et Strittero ſolerter inſtitutas pervolutarem, atque medias altitudines barometricas invicem compararem, non ſine admiratione notabilem illarum differentiam animadverti; unde nactus ſum occaſionem inquirere in diſcrimen ſoli harum duarum metropolium, quod multum ſuperat ac diſcrepat a calculo D. Chriſtiani Mayer ex obſervationibus Lerchianis deducto. His adnexi elevationem Rigae ex obſervationibus meis per integrum annum 1798 in hac urbe factis. Opportune venerunt ad illuſtriſſimam Academiam obſervationes meteorologicae in urbe Nerſchinsk anno ſuperiori habitae, e quibus elevatio hujus loci reſpectu Petropolis et Moſquae in computum etiam eſt tracta.

Ante quam ad ipſos calculos accedam, ſequentia primum generaliter praemonenda de hac methodo exiſtimavi:

a) E ſola obſervata mercurii altitudine in tubo barometrico pondus et preſſio atmosphaerae accurate cognoſci nequit, niſi ad calorem aëris et dilatationem mercurii ſimul attenderetur, ut olim Amontonſius et Deliſius recte notarunt, ideoque ſemper obſervandum eſt thermometrum una cum barometro.

b) Reſpiciendum inſuper eſt ad vim et directiones ventorum, per quaenam loca, humida an ſicca, calida aut frigida ſpirant: primariam enim illi cauſſam mutationum in atmosphaera et diverſarum altitudinum mercurii in barometro conſtituere videantur. In zona torrida ventus orientalis ejusdem fere vigoris perpetuo ſpirat, mercurius in barometro exiguam ſubit mutationem teſte Halleio; Condamine in ora maritima regni Peruani notavit altitudinem mercurii 28″ 0‴ et mutationem vix eſſe $2\frac{1}{2}$ vel 3 linearum; in editiſſimorum ibi montium cacuminibus ab aëris puritatem adhuc minorem variationem fieri credibile eſt; ita in urbe Quitto, jacente ſub ipſo fere aequatore in excelſo monte, aliquot annorum ſpatio maxima differentia altitudinis vix exceſſit fesquilineam, et altitudo mercurii tantum eſt 20 pollicum et $\frac{1}{4}$ lineae. At in regionibus boreis, ob atmosphaeram magis vaporoſam et ponderoſam, mutationes mercurii ſunt maximae et limites variationum ad 3 fere pollices aſſurgunt *), majores que fiunt hieme quam aeſtate: nam in his locis venti ſpirant vagi, nunc debiles nunc fortes et adverſis quibuscunque directionibus, interdum cum differenti impetu, ideo ſaeviente procella nonnunquam ad duos polli-

*) Petropoli hucusque obſervata eſt altitudo barometri maxima 29, 37 pollic. Pariſin. anno 1798 die 13 Decembr. st. veter. et minima 26, 41: bis, an. 1729 d. 12 Octobr. et 1758 d. 30 Decembr. unde variatio 2, 96.

pollices mercurius in tubo ſidit, et decreſcente illa rurſus aſcendit. Hinc excludendae forent e computu altitudines barometri vento procelloſo obſervatae. In locis valde remotis poſſunt venti eodem tempore prorſus a contrariis plagis ſpirare et diverſam atmosphaerae conſtitutionem aëris-que temperiem producere; praeſertim ſi loca multum inter ſe relativa differunt etiam elevatione. In Ephemeridibus Geographicis celeberr. Zach. Tom. IV. parte 5 ſeu Novembri 1799 D. conſiliarius Wildt diſſeitat de efficatia et influxu ventorum in altitudines barometricas et affert ſequens exemplum: ex 31 obſervationibus correſpondentibus Bernae et Mühlheimi factis, erant 15 tribus diverſis diebus et flantibus ventis ex 3io horizontis quadrante, hoc eſt e plaga inter auſtrum et occaſum, quae praebebant minimam elevationem 880 et maximam 908,6 pedum ideoque differentiam 28′, 6 et mediam 894′, 3; 16 aliae obſervationes quinque aliis diebus, ſpirantibus ventis ex primo quadrante, ſeu e plaga inter ſeptentrionem et ortum, dabant minimam elevationem 947 pedum et maximam 983′ 6, unde differentia 36′, 6 et medium 965′, 3, conſequenter diverſitas ventorum cauſſa fuit diſcrepantiae 71 pedum, at inter maximam ultimarum et minimam priorum evadit differentia 103, 6 pedum. Medium ex omnibus obſervationibus forte fortuna congruit cum medio e conſideratione ventorum concluſo, hoc eſt 929′, 8 quibus Berna elevatior Mühlheimo. Ob candem fortaſſis cauſſam, inter octo obſervationes in monte Bructero a D. prof. Zimmermann et correſpondentes Ilſenburgi menſe Julio 1775 factas, prodit differentia altitudinum 86 pedum ac media Bructeri altitudo reperta eſt 2643 pedum Pariſinorum (Journ. des Scav. *T* I. N. 1. an. 1776).

c) Mag-

c) Magna copia vaporum in atmoſphaera ſemper haerentium minuit elaſticitatem reddit que columnam aëris ſuperincumbentis leviorem et barometrum ſidit: hinc nonnulli ſuadent obſervationibus barometricis aſſociandas eſſe hygrometricas. Dubitandum omnino non eſt aëris humiditatem prope ſuperficiem terrae per longum atmoſphaerae tractum aequabiliter diſtribui non poſſe, ut vidimus hoc ſaepiſſime in nubibus per coelum ſparſis. D. Dr. Kramp putat refractiones aſtronomicas et terreſtres, (adeoque altitudines etiam barometricas), dependere a ſpecifica aëris elaſticitate, quae ipſa eſt functio caloris atque humiditatis ſimul; idem ait novum ſe inveniſſe manometrum ad menſurandam aëris denſitatem, cujus inſtrumenti divulgatio propediem eſt exoptabilis. (Monatl. Correſpondenz Apr. 1800).

d) Ad obtinendas altitudines barometri ac thermometri medias exiguntur obſervationes plurium annorum, forſan 19, quo temporis intervallo juxta nonnullorum opinionem tempeſtates redire creduntur, eaeque inſtrumentis exactis et harmonicis magna cura inſtituendae ſunt; atque loci altitudo, ubi barometrum erat ſuſpenſum, reſpectu fluvii praetercurrentis, vel alius aquae ſtagnantis notetur. Quamvis prima fronte viderentur ad hoc praeſtandum ſufficientes eſſe obſervationes unius integri anni, quo decurſo viciſſitudines atmoſphaerae omnes reſpectu caloris, frigoris, ventorum, ſiccitatis, humiditatis ac elaſticitatis aëris invicem compenſantur. His addi meritiſſime debent etiam electricitatis phaenomena quae magnum habent influxum in temperiem aëris mutandam; ſed conferenti nonnullorum annorum obſervationes ſtatim patebit mediam altitudidem barometri, ſicut et thermometri, non eandem eſſe quotannis, ideoque diſcrepantem

pantem prodire elevationem locorum in quibus obſervationes factae ſunt; ita diſcrimen ſoli Petropolitani et Kamyſchenſis ex 46 menſibus inveni 26 perticarum, at ſingillatim ex obſervationibus

anni 1771	prodit	idem	perticarum	22, 5
1772	—	—	——	32, 3
1773	—	—	——	25, 8.

Mirandum igitur non eſt, a diverſis obſervatoribus, diverſo tempore, diverſam ejusdem montis altitudinem ope barometri ſaepe inventam fuiſſe.

e) Antehac jam monui; diſcrimen elevationis locorum valde diſſitorum, ope barometri tuto determinari non poſſe, niſi praeter propter et in illis caſibus, ubi magna praeciſio non deſideratur: diverſa enim, juxta Muſchenbroekium, puritas mercurii, diverſa durities vitrei tubi, qua plus minusve ab eodem calore ampliatur, diverſa vis repellens vitri et interioris ſuperficiei aſperitas, aliaeque circumſtantiae, inter quas rariſſime ac difficulter obtinentur tubi ejusdem ubivis per totam ſuam longitudinem calibrae ſeu diametri, efficiunt ut ultimum accurationis terminum attingere non valeamus: maxime dum vel unius ſaltem lineae differentia in vitioſam barometri ſtructuram cadere poſſit. Praeterea barometri altitudo vix ad $\frac{1}{10}$ lineae partem aſſignari tutiſſime poteſt; at prope ſuperficiem terrae mutatio unius lineae pro vario atmosphaerae ſtatu conſtituit jam 72 uſque ad 78 pedes pariſinos, unde dubium in ipſa obſervatione plus quam unius perticae noſtrae ad minimum ſupereſt. Hinc in libellatione locorum, ubi magna requiritur exactitudo, praxis haec non eſt adhibenda.

His

His praefixis monitis venio nunc ad ipſos calculos, quos feci juxta regulam D. de Luc in notitia motuum caeleſtium ad annum 1765 a celeberrimo Lalandio expoſitam et multum laudatam, quae ſequenti formula exprimi poteſt.

Sit altitudo mercurii in barometro ad radicem montis, ſeu in loco humiliori in lineis pedis pariſini $= B$ eadem in vertice montis, ſeu in loco altiore $= b$, erit altitudo quaeſita $= \frac{\log B - \log b}{1000}$ in hexapedis pariſinis, ſi adhibeantur logarithmi vulgares octo cyphris una cum characteriſtica conſtantes, nulla adhuc habita ratione correctionis a calore; hanc que incorrectam altitudinem vocemus $= a$; ponamus porro gradum thermometri Reaumuriani medium inter obſervatos in utraque ſtatione $= t$ habebitur altitudo montis vel alicujus loci $= a - \frac{1}{215}(16°, 75 - t)a$.

Si loco thermometri Reaumuriani, quod confuſionem aliquando parit, an mercurio aut ſpiritu vini repletum, et ſcala ipſius in 80 aut 90 gradus inter fixos ebullientis et congelationis aquae terminos diviſa ſit, adhibeatur termometrum Delilianum nobis Petropoli et alibi ſaltem in Ruſſia magis uſitatum, poteſt illud cum hoc commutari: eſt enim, denotantibus R et D gradus Reaumurianos et Delilianos, $R = 80 - \frac{8}{15} D = 80 - \frac{1}{2} D - \frac{1}{30} D$, et

$$D = 150 - \frac{15}{8} R = 150 - 2R + \frac{1}{8} R.$$

Subſtituto nunc D pro R obtinebitur altitudo deſiderata $=$

$$a - \frac{8}{15} \frac{(D - 118,6)}{215} a,$$

et facta reductione erit illa

$$= \frac{8}{15 . 215}(521, 7 - D) a \text{ in hexapedis pariſinis,}$$

$$\text{et } \frac{2 . 8}{5 . 215}(521, 7 - D) a \text{ in pedibus pariſinis.}$$

Eadem

Eadem in pedibus londinenſibus $= \frac{2 \cdot 8 \cdot 864}{5 \cdot 215 \cdot 811} (521,7 - D)\, a$,
denique in perticis Ruſſicis $= \frac{2 \cdot 8 \cdot 864}{5 \cdot 7 \cdot 215 \cdot 811} (521,7 - D)\, a$

$$= \frac{2^9 \cdot 33}{5^3 \cdot 7 \cdot 43 \cdot 811} (521,7 - D)\, a.$$

Primus coefficiens $= 0,0022652$.

et logarithm. ipſius $= 7,3551065$.

Ultima formula eſt conſtans et ſemper ea uti poſſumus: nam frigus naturale nunquam ad 521, 7 gradus Delilianos intenditur; at in priori t non raro aeſtivis fervoribus ſuperat $16\frac{3}{4}$ gradus Reaumurianos, et tunc formula iſta mutanda erit in ſequentem $a + \frac{1}{215}(t - 16\frac{3}{4})\, a$.

Ut appareat quanta prodit differentia elevationis locorum inter altitudines barometri medias ex extremis maximis, ſcil. et minimis quolibet menſe concluſas, et inter medias ex omnibus ſumtas, quae ultimae ob majorem numerum praeferendae ſunt; e ſingulis annis primum ſeorſim computavi elevationes, et ut uno obtutu conſpici poſſint, tanquam in tabula ſuccincte repraeſentabo.

Media ex menſtruis extremis

Anni	Altitud. Barom. Petropoli	Altitud. Barom. Mosquae	Termom. med. inter. P. et M.	Elevat.
1797	28″. 1‴, 416	27″. 2‴, 85	144°	118, 24 pert. ruſſ.
98	28 . 2, 376	27 . 2, 76	144, 95	129, 18
99	28 . 2, 352	27 . 2, 844	148, 38	127, 08
				124, 8.

Altitudines mediae ex omnibus

Anni	Barom. Petropoli	Barom. Mosquae	Thermom. med. inter. P. et M.	Elevat.
1797	28″. 2‴, 1	27″. 3‴, 144	142°, 2	122, 48
98	28 . 2, 668	27 . 2, 904	142, 76	131, 79
99	28 . 2, 832	27 . 3, 18	146, 78	129, 08
				127 . 8.

Deinde ſumtis mediis ex tribus annis calculum iteravi.

ex extremis	28″. 2‴, 048	27″. 2‴, 878	145°, 58	125.
ex omnibus	28 . 2, 533	27 . 3, 076	143, 9	128.

Liceat hic unicum ex ultimis apponere paradigma calculi, quod idem de reliquis omnibus tenendum eſt.

log. 338‴, 533 . . . . . . 2, 5296010
log. 327, 076 . . . . . . 2, 5146486
a = 149, 524
log. coefficientis 7, 3551065
log. (521, 7 — 143, 9) 377, 8 . 2, 5772620
log. a 2, 1747109
log. elevationis 2, 1070, 794
cui reſpondent 127, 96 vel rotunde 128 Pert. Ruſſ.

Chriſtianus Mayer concluſit ex obſervationibus Lerchianis a Martio 1750 ad Octobrim 1751 ex 19 menſibus mediam altitudinem barometri Moſquae 27″. 5‴, 4; Petropoli ex 17 annis ab Octobri 1752 ad 1769, adeoque diverſis temporibus, 27″. 10‴, quae altitudines nimis diſſentiunt ab Eulerianis et Stritterianis ſupra relatis, et inventa ab ipſo elevatio Moſquae, applicata correctione a thermometro, 325 pedum Pariſinorum vel 49½ perticarum Ruſſicarum enormiter

ter diſcrepat a noſtra. Hinc effuſe a Mayero laudatae obſervationes Lerchianae redduntur minus certae, et quamvis de ſolertia longo uſu periti obſervatoris nullum, attamen de requiſita ſtructura barometri ejus magnum adeſt dubium.

Obſtupeſceret ipſe Mayer, cui mirum jam videbatur ingens diſcrimen altitudinis inter Petropolin et Moſquam a ſe repertum, idque ampliori examini plurium annorum obſervatione confirmandum relinquebat. Obſervationes thermometricae indicant etiam Moſquam elevatiorem eſſe Petropoli, nam frigus ibi tempeſtivius et acrius ſentitur, licet ea plus quam quatuor gradibus auſtralior eſt Petropoli.

Altitudo barometri media Rigae e menſtruis extremis anni 1798 eſt 28''. 0''', 630 et thermometri Deliliani 139°, 8 collata cum correſpondentibus Petropolitana et Moſquenſi praebet Rigam elevatiorem eſſe Petropoli 19, 2 et depreſſiorem Moſqua 111 perticarum. Eadem altitudo media ex omnibus 28''. 1'', 09 et thermometri 139°, 2 comparata cum ſimilibus Petropolitana et Moſquenſi exhibet Rigam elevatiorem Petropoli . . . 17, 5 perticarum
et depreſſiorem Moſqua . . . . . 115.

Altitudo, in qua ſuſpenſum erat barometrum Rigae, ſupra libellam Dünae eadem proxime aſſumi poteſt, quae Petropoli ſupra Newam. Nunc ſubtrahenda foret ab altitudine Rigae, diſtantis ab oſtio Dünae 14 Werſtis ſeu duobus milliaribus germanicis, declivitas hujus fluvii, quae debet eſſe exigua, cum nullae jam amplius a Riga ad oſtium exſtant cataractae. Ex his iterum licebit refellere dictum ac opinionem antehac jam citati a me candidati

Rigenſis Ehrlich, qui abſque ullo teſtimonio ac obſervatione refert oſtium Dünae 3000 pedum geometricorum ſeu $\frac{3}{20}$ milliaris germanici, hoc eſt plus quam unius Werſtae depreſſius eſſe oſtio Newae. (Büſchings wöchentl. Nachr. 1780. 22 Stück).

Summa obſervationum meteorologicarum in urbe Nertſchinsk anno 1799 inſtitutarum eſt haec:

Calor maximus ad thermometrum Reaumurianum ibi obſervatus + 30° diebus 14 et 26 Julii, et frigus maximum — 36 die 5to Januarii. Unde variatio 66 graduum.

Maxima barometri altitudo erat die 5to Januarii	26″. 2‴
et minima d. 19 Decembris . .	24 . 3
adeoque differentia	1 . 11.

Media altitudo ex menſtruis maximis et minimis prodit 25″. 5‴, 552 et gradus thermometri medius — 4°, 885 reſpondens gradibus Delilianis 159, comparata cum correſpondentibus praebet elevationem urbis Nertſchinsk ſupra Petropolin 368, 7 et ſupra Moſquam 244 perticarum.

Mirum ſane videtur nullam in diario harum obſervationum adeſſe mentionem de tonitru, fulgure ac grandine per totam aeſtatem.

Hic locus eſt obiter annotare de elevatione Kolae, quam *h.* Mayer, commiſſo errore calami, reperit 400 pedum Pariſinorum altiorem eſſe Petropoli, eandem e meo calculo inveni 234 pedum vel $35\frac{1}{2}$ perticarum tantum.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES
faites à St. Pétersbourg
en l'année M. DCCXCV. D'après le nouveau Stile

Par

J. A. EULER.

Préſenté à l'Académie le 11 Janvier 1796.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation totale, le milieu et la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour heure	P. cent.	jour heure		P. cent.	P. cent.
Janvier	28. 84	le 15 à 4 h. s.	27. 07	le 5 à 7 h. s.	1. 77	27. 95	28. 103
Février	28. 92	le 17 à 6 h. s.	27. 24	le 11 à 6 h. s.	1. 68	28. 08	28. 135
Mars	28. 74	le 13 à 9 h. m.	27. 68	le 24 à 9 h. m.	1. 06	28. 21	28. 128
Avril	28. 75	le 9 à 12 h. m.	27. 81	le 18 à 4 h. s.	0 94	28. 28	28. 339
Mai	28. 57	le 18 après-midi	27. 29	le 25 à 3 h m.	1. 28	27. 93	28. 039
Juin	28. 67	le 5 à 8 h. m.	27. 63	le 27 à 3 h. s.	1. 04	28 15	28. 120
Juillet	28. 32	le 25 à 12 h. m.	27. 74	le 13 à 3 h. m.	0. 58	28. 03	28. 020
Août	28. 77	le 31 à 12 h. s.	27. 73	le 22 à 6 h. m.	1. 04	28. 25	28. 152
Septembr.	28. 79	le 1 à 9 h. m.	27. 71	le 27 à 9 h. m.	1. 08	28. 25	28. 312
Octobre	28. 62	le 5 à 12 h. m	27. 37	le 25 à 12 h. s.	1. 25	27. 99	28. 138
Novembre	28. 72	le 10 à 12 h. m.	27. 11	le 13 à 7 h. s.	1. 61	27. 91	27. 893
Décembre	28 74	le 8. à 12 h. m.	27. 18	le 30 à 12 h. m.	1. 56	27. 96	28. 127

m. ſignifie *matin* ou *avant - midi*, et s. *ſoir* ou *après - midi*.

2) Nom-

2) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques points principaux de l'échelle, avec la hauteur qui répond à chaque demi-mois.

	Au deſſus de					un demi mois
	27. 80	27. 90	28. 00	28. 10	28. 20	au deſſus de
Mois	jours h.	jours h.	jours h.	jours h.	jours h.	Pouces milliem.
Janvier	25. 23	22. 3	18. 11	17. 4	12. 11	28. 126
Février	22. 1	19. 18	17. 5	15. 10	11. 18	28. 135
Mars	27. 12	24. 12	20. 11	16. 8	12. 7	28. 128
Avril	30. 0	28. 17	27. 12	24. 18	20. 15	28. 340
Mai	25. 12	22. 14	17. 5	14. 11	9. 10	28. 038
Juin	25. 8	21. 7	19. 6	16. 4	11. 2	28. 117
Juillet	29. 2	23. 20	17. 14	10. 16	6. 5	28. 028
Août	29. 17	28. 15	24. 10	16. 5	9. 3	28. 120
Septembre	29. 2	28. 8	26. 2	24. 8	21. 9	28. 360
Octobre	27. 8	25. 14	23. 4	17. 10	13. 10	28. 143
Novembre	17. 11	12. 16	10. 6	8. 4	5. 9	27. 853
Décembre	26. 2	23. 23	20. 22	17. 23	15. 1	28. 178

3) Varia-

3) Variations ſubites et extraordinaires.

Mois	Temps jour.	heur.	Diff. heur.	Barom. P. cent.	Variat. centie.	Therm. degrès	Vent	Atmeſphère
Janvier	3	6 m	20	27. 76	+ 50	155	Calme	Brouillard, neige, c. couvert enſv., ſerein
	4	2 m.	41	28. 26	— 119	163	Ou.	humide, c. couvert enſuite neige
	5	7 s.		27. 07		149	SOu. fort	neige, c. couvert, pluie.
	5	12 s.	48	27. 10	+ 104	151	NOu.	c. couvert, humide
	7	12 s.		28. 14		169	N. calme	c. couvert, brouillard, enſuite c. ſerein
	11	7 m.	37	27. 86	+ 69	166	NOu.	c. couvert enſuite neige
	12	8 s.		28. 55		177	NOu.	nuages
	15	6 s.	37	28. 85	— 71	167	Est	c. ſerieu, enſuite couvert et neige
	17	7 m.		28. 14		169	NE	c. ſerein
Février	9	2 s.	24	28. 18	— 55	157	S. fort	ciel couvert
	10	2 s.		27. 65		152	S	ciel couvert
	11	6 s.	30	27. 24	+ 69	145	S	ciel couvert, pluie
	12	12 s.		27. 93		157	NOu.	ciel couvert
	14	12 mid.	36	27. 50	+ 79	148	SOu.	ciel couvert, neige
	15	12 min.		28. 29		161	NOu.	c. ſerein, enſuite brouillard et c. couv.
	16	12 mid.	24	28. 32	+ 58	157	SE. calme	Nuages enſuite c. ſerein
	17	12 mid.		28. 90		165	NE. fort	ciel ſerein
	21	12 mid.	30	28. 63	— 86	160	NOu.	c. ſerein, enſuite couvert et neige
	22	6 s.		27. 77		154	NOn.	c. couvert enſuite ſerein
Mars	14	6 m.	46	27. 72	+ 60	194	NOu.	c. ſerein
	16	4 m.		28. 32		185	S. fort	c. ſerein, enſuite c. couv. brouillard
	23	2 m.	17	28. 17	— 44	171	S. fort	c. ſereiu, enſ. couv. et beauc. de neige
	23	7 s.		27. 73		152	S	c. couvert, neige
	24	9 m.	45	27. 68	+ 70	148	S	c. couvert, pluie enſuite c. ſerein
	26	9 m.		28. 38		154	SOu.	c couvert.
Mai	21	12 s.	51	28. 22	— 90	137	calme	c. couvert enſuite pluie ec vent
	24	3 m.		27. 32		141	S	c. couvert enſuite pluie.
	29	6 m.		28. 26		141	SE fort	c. ſerrin, enſuite couvert et pluie
	30	6 m.	24	27. 70	— 56	142	SOu. fort	c. couvert pluie, enſuite c. ſerein
	31	8 m.	26	28. 27	+ 57	136	E.	c ſerein.

Mois

Mois	Tems jour.	heur.	Diff. heur.	Barom. P. cent.	Variat. cent.	Therm. degrès	Vent	Atmosphère.
Sept.	13	3 s.	24	28. 29	— 46	126	NOu. fort	Ciel ſerein
	14	3 s.		27. 83		132	SOu. fort	c. couv. beaucoup de pluie.
	23	12 s.	81	28. 62	— 91	139	SE fort	c. couv. enſ. ſerein, nuages, pluie à verſe
	27	9 m.	87	27. 71	+ 88	136	S ff.	pluie à verſe, c. couv. nuages
	30	12 s.		28. 59		141	SOu. fort	ciel ſerein.
Octob.	24	12 s.	9	17. 79	— 32	139	Calme	Brouillard, pluie, c. couvert
	25	9 m		27. 47		158	SOu.	beaucoup de pluie, c. couvert.
Nov.	10	12 m.	79	28. 72	— 161	134	SOu.	c ſerein, enſuite couvert, pluie
	13	7 s.		27. 11		155	E	neige, c. couvert.
	13	7 s.	53	27. 11	+ 87	155	E	ciel couvert, neige
	15	12 s.	24	27. 98	— 71	157	NOu. ff.	c. ſerein enſuite couvert
	16	12 s.	23	27. 27	+ 83	145	SOu. fort	nuages enſuite c. couvert
	17	11 s.		28. 10		157	NOu.	c. ſerein. La riviere charia des glaces
	18	8 s.	21	27. 72	— 38	148	S. fort	c. couvert.
	23	6 m.	30	28. 19	— 65	156	SE	c. ſerein, brouillard, c. couvert
	24	12 m.	20	27. 54	+ 44	148	SE	c. couvert, neige
	25	8 m.		27. 98		153	SOu.	c. ſerein enſuite couvert.
	27	6 m.	39	27. 75	— 57	143	S. fort	c. enſuite pluie
	28	9 s.	28	27. 18	+ 97	150	SOu. ff.	c. couvert, neige
	50	1 m		28. 15		154	E	c. couvert, enſuite neige
Décm.	8	12 m.	51	28. 74	— 87	152	calme	c. couvert, neige
	10	3 s.		27. 87		150	NOu.	nuages, enſuite c. ſerein.
	17	12 s.	46	28. 59	— 126	175	calme	c. ſerein
	19	10 s.		27. 33		148	SOu. fort	Pluie et ciel couvert.
	20	9 s.	39	27. 46	+ 93	159	NOu. ff.	c. couvert et beaucoup de neige
	22	12 m.		28. 39		170	calme	c. ſerein, brouillard.
	24	10 s.	40	23. 57	— 86	177	NE. E	c. ſerein, brouillard
	26	2 s.	34	27. 71	+ 67	168	SE	c. couvert, neige
	27	12 s.		28. 38		172	E	c. couvert.
	28	6 m.	54	28. 59	— 121	173	SE	c. couvert
	30	12 m.		27. 18		148	calme	c. couvert brouillard, pluie et neige.
	30	12 m.	36	27. 18	+ 95	148	calme	c. couv. brouilld, pluie et neige
	31	11 s.		28. 13		158	NOu.	nuages.

+ marque les montées et — les deſcentes du Baromètre; ff designe un vent très fort.

Je

Je marquerai, comme je l'ai déjà fait dans un des mes extraits précédens, par la lettre *A* l'année entiere ou bien l'intervalle de temps entre le 1 Janvier et le 31 Décembre incl. comprenant 365 jours: par *H* les ſix mois d'hyver depuis le 1 Novembre 1794 jusqu'au 1 Mai 1795, comprenant un intervalle de 181 jours: enfin par *E* les ſix mois de l'été ſuivant, depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1795, comprenant un intervalle de 184 jours. Et je repreſenterai les reſultats de mes obſervations barométrique, comme il ſuit.

1) La plus grande hauteur du Baromètre.

A . . . 28 . 92 le 17 Février. Thermomètre 166° vent fort du NOu, ciel couvert.

H . . . 29 . 23 le 22 Décembre 1794. Therm 164° vent fort de l'Eſt, ciel couvert.

E . . . 28 . 79 le 1 Septembre. Therm. 133°, calme, ciel couvert.

2) La plus petite hauteur du Baromètre.

A . . . 27 . 07 le 5 Janvier. Therm. 149°, vent fort du SOu, ciel couvert neige.

H . . . 27 . 07 le 5 Janvier.

E . . . 27 . 29 le 25 Mai. Therm. 144°, vent du Sud, ciel couvert, pluie.

3) Variation totale. A . . 1, 85. H . . 2, 16. E . . 1,50 parties centiemes d'un pouce.

4) Milieu arithmétique, A . . 27 . 99. H . . 28, 15. E . . 28, 04.

5) Hauteur moyenne, A . . 28, 125. H . . 28, 258. E . . 28, 121 . . Elle a donc été de 0, 132 moindre en été qu'en hyver, et de 0, 073 plus grande qu'à l'ordinaire.

6) La variation totale a été la plus grande en Janvier, et la plus petite en Juillet. La hauteur moyenne a été la plus grande en Avril, et la plus petite en Novembre. La différence en eſt = 0, 446, ou presque d'un demi pouce.

7) La hauteur du Baromètre a été au deſſus de

28.80	en A	315 jours	en H . .	164 jours	en E . .	166 jours
29.90	— —	281 —	— —	152 —	— —	150 —
28.00	— —	242 —	— —	136 —	— —	128 —
28.10	— —	199 —	— —	121 —	— —	99 —
28.20	— —	148 —	— —	97 —	— —	71 —

8) La hauteur du Baromètre a été

en A . . 182½ jours au deſſus de 28.132,
en H . . 90⅓ jours au deſſus de 28.250,
en E . . 92 jours au deſſus de 28.124.

9) Les variations les plus ſubites et les plus conſidérables ſe trouvent dans les mois de Janvier, de Novembre et de Décembre: Les deſcentes les plus fortes ſont de 1, 61 pouces ou de 19⅓ lignes en 79 heures, le 10 Novembre, de 1,26 pouces, ou de 15 $\frac{1}{10}$ lignes en 46 heures le 17 Décembre, de 1, 21 pouces ou de 14½ lignes en 54 heures le 28 Décembre, de 1,19 pouces ou de 14⅓ lignes en 41 heures le 4 Janvier. Les montées du Baromètre n'ont pas été auſſi conſidérables, celles qui méritent le plus d'être remarquées ſont

ſont de 1,04 pouces; ou de $12\frac{1}{2}$ lignes en 48 heures le 5 Janvier, de 0,97 pouces ou de $11\frac{3}{5}$ lignes en 28 heures le 2 Novembre, de 0,95 pouces ou de $11\frac{2}{5}$ lignes en 36 heures le 30 Décembre et de 0,93 pouc. ou de $11\frac{1}{10}$ lignes en 39 heures le 20 Décembre.

II. Thermomètre.

1) Hauteurs extrêmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Hauteurs extrêmes.				Diffé-rence.	Etat moyen.	
	Au plus bas.		Au plus haut.			Froid moyen.	Chaleur moyenne.
	Degré.	Jour et heure.	Degré.	Jour et heure.	dégr.	Degré.	Degré.
Janvier	182	le 10 à 6 h. m.	148	le 4 et 5 apr. midi	34	169,1	163,8
Février	185	le 27 à 6 h. m.	145	le 11 après midi	40	167,3	159,8
Mars	194	le 14 à 6 h. m.	136	le 31 à 2 h. s.	48	164,8	153,1
Avril	164	le 13 à 6 h. m.	119	le 24 à 2 h. s.	45	149,3	137,9
May	151	le 16 à 5 h. m.	117	le 20 à 2 h. s.	34	142,4	133,0
Juin	141	le 13 à 6 h. m.	107	le 8 à 3 h. s.	34	131,3	122,0
Juillet	133	le 20 à 5 h. m.	111	le 28 à 2 h. s.	22	128,1	118,2
Août	140	le 31 à 10 h. s.	117	le 3 à 2 h. s.	23	132,7	124,2
Septbr.	148	le 29 à 6 h. m.	119	le 11 à 2 h. s.	29	137,5	129,6
Octbr.	163	le 19 à 6 h. m.	132	le 8 à 2 h. s.	31	147,3	142,2
Novbr.	161	le 10 à 7 h. m. le 14 à 7 h. m.	138	le 1 à 2 h. s, le 2 à 9 h. m.	23	152,9	147,6
Décbr.	183	le 25 avant midi	148	le 5. 19. 29 et 30	35	165,2	158,7

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur on ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle, pour cháque mois de l'année 1795.

Mois.	Le froid a été plus grand que							Le chaleur a été plus grande que						
	190 Jours.	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours.	150 Jours.	140 Jours	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours.	170 Jours.
Janvier		2	15	26	31	31	31					2	9	23
Février		1	12	22	28	28	28					4	15	25
Mars	2	3	10	19	28	31	31				2	13	24	28
Avril				3	11	29	30		1	2	21	27	30	30
Mai					2	23	31		2	7	28	31	31	31
Juin						1	19	2	10	26	30	30	30	30
Juillet							7		22	31	31	31	31	31
Août						1	25		4	29	31	31	31	31
Septbr.						13	27		2	15	29	30	30	30
Octbr.				2	13	24	31				13	27	31	31
Novbr				2	19	29	30				3	20	30	30
Décbr		1	14	20	28	31	31					8	15	27

Resumé.

1) Le plus grand froid, ou la plus petitite hauteur du Thermomètre

en A . . . 194° ou d'après Reaumur 23^2 dégrés, le 14 Mars matin. Baromète 27, 72, vent du NOu, ciel ſerein,

en H . . . 194° d'après Réaumur $23\frac{1}{2}$ degrés, le 14 Mars matin.

en E

en E . . . 163° d'après Réaumur 7 degrés, le 19 Octobre matin. Barom. 28 . 44, vent fort du NOu, ciel ſerein.

2) La plus grande chaleur, ou la plus grande hauteur du Thermomètre

en A . . . 107°, d'après Reaumur 23 degrés, le 8 Juin après midi. Barom. 28 . 40, vent de l'Oueſt, ciel à demi ſerein, enſuite couvert, orage et pluie.

en H . . . 119°, d'après Reaumur 16½ degrès le 24 Avril après midi. Barom. 27 . 90, vent du Sud très fort, nuages, enſuite pluie à verſe, grêle et tonnère,

en E . . . 107°, d'après Reaumur 23 degrés, le 8 Juin après midi.

3) La différence entre ces deux température extrêmes:
en A . . 87 degrés de Déliſle qui ſont 46½ dégr. du Réaumur
en H . . 75 — — — — — 40 — — —
en E . . 56 — — — — — 30 — — —

Cette différence a été la plus grande au mois de Mars, et la plus petite au mois de Juillet.

4) Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermometriques, obſervées à 6 heures du matin et à 10 heures du ſoir, diviſée par leur nombre, a été le plus grand en Janvier et le plus petit en Juillet. Sa valeur eſt

en A . . 154°, 4 d'après Réaumur $2^{d.}$ 3 de froid
en H . . 160, 9 — — $5^{d.}$ 8 de froid et
en E . . 136, 2 — — $7^{d.}$ 2 de chaleur.

5) La

5) La chaleur moycnne, ou la ſomme de tontes les hauteurs thermometriques, obſervées à 2 heures après midi, diviſée par leur nombre, a été la plus grande en Juillet, et la plus petite en Janvier. Sa valeur eſt

en A.. 140°, 8 d'après Réaumur 4 d. 9 de chaleur
en H.. 153, 7 — — 2 d. 0 de froid et
en E.. 128, 2 — — 11 d. 6 de chaleur.

6) Le froid a été

plus graud						
que 190	en A.. 2	jours	en H.. 2	jours	en E.. 0	jours
— 180	en A.. 7	—	en H.. 7	—	en E.. 0	—
— 170	en A.. 51	—	en H.. 46	—	en E.. 0	—
— 160	en A.. 94	—	en H.. 93	—	en E.. 2	—
— 150	en A.. 160	—	en H.. 139	—	en E.. 15	—
— 140	en A.. 241	—	en H.. 179	—	en E.. 62	—
— 130	en A.. 331	—	en H.. 181	—	en E.. 140	—
— 120	en A.. 365	—	en H.. 181	—	en E.. 184	—

7) La chaleur a été

plus gr. que 110	en A 2	jours	en H 0	jours	en E 2	jours
— — — 120	en A 41	—	en H 1	—	en E 40	—
— — — 130	en A 110	—	en H 2	—	en E 108	—
— — — 140	en A 188	—	en H 25	—	en E 162	—
— — — 150	en A 254	—	en H 70	—	en E 180	—
— — — 160	en A 307	—	en H 122	—	en E 184	—
— — — 170	en A 347	—	en H 163	—		
— — — 180	en A 364	—	en H 180	—		
— — — 190	en A 365	—	en H 181	—		

8) Il a gélé continuellement en A pendant 58 jours, et en H pendant 59 jours. Il n'a gélé point du tout

en A

en A pendant 124 jours, en H pendant 42 jours, et en E pendant 122 jours.

9) Il y a eu déjà en Avril des chaleurs plus grandes que 120 et 130°, le 24 et 26; et en Octobre des froids plus grands que 160°, le 18 et 19.

3.) Enumération détaillée des froids en H, c'eſt-à-dire, pendant l'hyver de 1794 à 1795, ou depuis le 1 Novembre 1794 jusqu'au 1 Mai 1795, ce qui fait en intervalle de 181 jours.

Le froid ſurpaſſé 190° en 2 jours le 14 et 15 Mars.

Le froid a été entre

		Jours
180 et 190	Le 16 Déc. le 10. 26 Janv. le 27 Févr. et le 16 Mars	5
170 et 180	Le 15. 17. 18. 24 — 26. 30. 31. Déc. le 1. 2. 8. 9. 12 — 14. 17 — 21. 24 Janv. le 2 — 7. 18. 19. 23. 26. 28. Févr. le 10 — 13. 17. 18. 22 Mars	39
160 et 170	Le 20. 27. 28 Nov. le 12. 13. 14. 19 — 23. 27 — 29 Déc. le 3. 4. 6. 7. 11. 15. 16. 22. 23. 25. 27. Janv. le 1. 8. 14 — 17. 20. 21. 24. 25 Févr. le 3 — 6. 8. 9. 19. 20. 23 Mars et le 12. 13. 14 Avril	47
150 et 160 degrés	Le 1. 15 — 19. 21 — 26. 29. 30 Nov. le 6. 7. 8. 11 Déc. le 5. 28 — 31 Janv. le 9 — 13. 22 Févr. le 1. 2. 7. 21. 24 — 26. 29. 31 Mars et le 3. 9. 10. 11. 15. 16. 19. 20 Avril	46
	Somme des jours où il a gelé	139

L'inter-

L'intervalle entre la premier gélée du 1 Octobre 1794 et la derniere du 16 Mai eſt de 227 jours.

4) Enumération détaillée des chaleurs en E, c'eſt à dire pendant l'éte de 1795 depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre, comprenant un intervalle de 184 jours.

La chaleur a été plus grande que 110 degrés en 2 jours le 8 et 21 Juin.

La chaleur a été entre

		Jours
120 et 110	Le 1. 20 Mai, le 4—7. 17—20 Juin, le 1. 2. 4. 5. 6. 8—12. 15—17. 23—31 Juillet, le 1. 3. 28. 29 Août et le 11. 12 Sept. . . .	38
130 et 120	Le 2. 4. 19. 22. 23 Mai, le 2. 3. 9—12. 15. 16. 22—24. 26—30 Juin, le 3. 7. 13. 14. 18—22 Juillet, le 2. 4—13. 15—27. 30 Août et le 2—10. 13. 24—26 Sept.	68
140 et 130	Le 3. 5—9. 11. 12. 13. 16—18. 21. 24—31 Mai, le 1. 13. 14. 25 Juin, le 14. 31 Août, le 1. 14—23. 27. 28. 30 Sept. et le 1—8. 24—27. 31 Octobre	54
150 et 140 degrés	Le 10. 14. 15 Mai, le 29 Sept. et le 9—16. 20. 21. 23. 28—30 Octobre	18
	Somme des jours où il n'a point gelé	180

L'intervalle entre la derniere gélée du 16 Mai et le 11 Octobre où il a recommencé à géler eſt 148 jours.

III. Vent.

1) Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1795, et les trois intervalles déſignés par A, H, et E (pag. 574.).

Mois.	Calme.	Vent mediocre	Vent fort	Vent très fort	Nord	NE	Eſt	SE	Sud	SOu.	Oueſt	NOu
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours
Janvier	7	14	10	0	7	5	2	1	2	4	2	8
Février	5	17	5	1	0	2	4	4	6	3	1	8
Mars	5	19	7	0	2	5	3	4	7	4	3	3
Avril	7	16	6	1	2	1	7	2	4	4	5	5
Mai	2	11	14	4	1	0	1	2	4	10	8	5
Juin	5	17	8	0	1	3	2	3	3	3	11	4
Juillet	7	16	8	0	1	5	9	3	1	4	7	1
Août	8	17	5	1	2	7	5	1	1	6	6	3
Septembre	7	14	7	2	2	5	2	0	3	3	13	2
Octobre	9	16	6	0	3	1	4	3	4	1	5	10
Novembre	3	12	9	6	2	1	1	2	4	14	3	3
Décembre	8	18	4	1	6	3	1	6	6	4	0	5
A	73	187	89	16	29	38	41	31	45	60	64	57
H	36	98	43	4	13	15	26	26	32	27	15	27
E	38	91	48	7	10	21	23	12	16	27	50	25

2) Rapport de la force des vents et des quatre plages tiré du Tableau, précédent, pour chaque mois de l'année 1795 et les trois intervalles déſignés par A, H, et E.

Mois.	Degrè de force	Rapport des quatre plages			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt
Janvier . .	242	13	5	5	8
Février .	239	5	7	9	7
Mars . .	229	6	8	11	6
Avril . .	237	5	8	7	10
Mai . .	361	4	2	10	15
Juin . .	237	4	5	6	15
Juillet .	229	4	13	4	10
Août . .	226	7	9	5	10
Septembre	263	5	5	4	16
Octobre .	210	9	6	6	10
Novembre	366	4	2	12	12
Décembre	220	16	6	11	4
A	244	77	75	91	122
H	241	34	46	59	52
E	254	33	39	36	76

Les mois de Novembre et de Mai ont été les plus venteux, et ceux d'Octobre et de Décembre les plus calmes. L'été de 1795 a été plus venteux que l'hyver de 1794 à 1795.

Le

Le vent dominant a été celui de l'Oueſt, il a ſurtout regné en été, et ſpecialement aux mois de Septembre, de Juin et de Mai. En hyver de 1794 à 1795, ce fut le vent du Sud qui a été le plus frequent.

3) Direction des vents forts.

Direction.	Jours et Mois.	Nombre des jours
Nord	Le 7 Janv. le 28 Mai, le 24 Juin, et le 14 Oct.	4
NE	Le 13. 14. 30. Janv. le 17. 18 Févr. le 9. 10. 11. 12. 13 Mars, le 31 Mai, le 23 Juin, le 5. 6. 7 Juillet, le 17. 18 Sept. le 9 Oct. . . .	18
Eſt	Le 28 Févr. le 6 Juin, le 29 Juillet, le 23 Août, le 21 Octobre	5
SE	Le 31 Janv. le 1. 29 Mai, le 28 Juillet . . .	4
Sud	Le 28. 29 Janv. le 1 Févr. le 16. 23 Mars, le 24 Avril, le 16 Mai, le 19 Juin, le 25. 26 Sept. le 18. 19. 26. 27 Nov. et le 28. 29 Décembre	16
SOu.	Le 5. 22. 23 Janv. le 9. 14 Févr. le 27. 28. Avril, le 5. 6. 8. 9. 10. 17. 24. 30 Mai, le 26. 28 Juin, le 16 Juillet, le 5 Août, le 14. 28 Sept. le 25 Oct. le 4. 5. 11. 16. 18. 20. 24. 28. 29. Novbr. et le 9. 19 Décembre	33
Oueſt	Le 13 Avril, le 7. 11. 18. 16 Mai, le 15 Juin, le 20 Juillet, le 2. 6. 26 Août, le 5. 8. Sept. le 3 Novembre	13
NOu.	Le 11. 15 Avril, le 15 Mai, le 10 Juin, le 22 Juillet, le 16 Août, le 13 Sept. le 15. 19 Oct. le 15. 17 Nov. et le 20 Déc.	12
	Somme des jours venteux	105

 Parmi

Parmi ces jours de vent fort ſe trouvoient être les plus violans ceux du

28 Février, Eſt . . . . 1 jour
24 Avril, 26 Sept. 18 Nov. Sud . . . 3 —
5. 6. 10 Mai, 16. 18. 24. 29 Nov. SOu 7 —
7 Mai, 2 Août, 3 Nov. Oueſt . . . 3 —
17 Novembre, 20 Déc. NOu. . . . 2 —

Somme des jours des vent très forts 16.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie			Neige	
	ſerein.	nuages.	couvert		forte.	petite.	quantité	forte.	petite.
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	pouc.	Jours.	Jours.
Janvier . .	4	11	16	4		1		1	14
Février . .	7	6	15	3		3		1	10
Mars . . .	9	16	6	2		4		2	10
Avril . .	11	16	3	4	1	7	0.94		5
Mai . . .	4	22	5		9	12	3.33		2
Juin . . .	8	16	6		5	11	2.40		
Juillet . .	15	15	1		3	7	1.60		
Août . .	5	19	7	2	9	9	2.36		
Septembre .	9	18	3	3	5	7	2.29		
Octobre .	2	12	17	9	2	12	1.09		4
Novembre .	2	11	17	2	2	11	0.71		12
Décembre .	7	9	15	4		2		1	10
A	83	171	111	33	36	86	14.32	5	67
H	85	66	80	21	2	29		4	59
E	43	102	39	14	33	58	11.47		6

1) Les

1) Les jours de ciel entierement couvert ont encore ſurpaſſé conſidérablemens ceux de ciel entieremens ſerein, excepté dans les mois d'été où le nombre des jours entieremens ſereins a été de 4 plus grand que celui des jours de ciel couvert. Les mois de Juillet n'a eu qu'un ſeul jour, où le ciel a été totalement couvert, et les mois d'Octobre et de Novembre n'ont eu que 2 jours de ciel entierement ſerein. Les brouillards ont été les plus fréquens en Octobre, et en Mai, Juin et Juillet, on n'en a obſervé aucun.

2) Le mois le plus pluvieux a été celui de Mai, la hauteur de l'eau de pluie tombé ayant été de $3\frac{1}{3}$ pouces. Pendans tout l'été dépuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre cette hauteur a été trouvée d'$11\frac{47}{100}$ pouces. Au mois de Mars il eſt tombé plus de neige que dans les autres mois. Il a neigé pour la derniere fois le 14 Mai et il a recommencé à neiger le 16 Octobre, après un intervalle de 155 jours.

3) La riviere Newa après avoir été gelée ſans interruption pendant 127 jours, elle debacla le 20 Avril à midi pendant une temperature de 133 degrés de Delisle qui répondent à 9 degrés de chaleur d'après Reaumur. Baromètre 28 . 28, vent médiocre de l'Oueſt, ciel ſerein. Le 30 Avril elle commença à charier les glaces du Ladoga, mais en petite quantité et pendans peu de jours.

4) La riviere recommença à former et à charir des glaces le 17 Novembre, et on en vit tantôt plus tantôt moins jusqu'au

juſqu'au 11 Decembre après midi où la Newa fut entierement priſe après avoir été ouverte pendant 235 jours. Thermomètre de Délisle 162 d'après Reaumur $6\frac{1}{3}$ degrés de froid. Baromètre 28 . 00, vent du Nord, ciel ſerein.

3) Il tomba de la grèle en 5 jours, le 24 Avril, le 14 et 19 Juin, le 28 Septembre et le 16 Octobre.

4) Le nombre des orages ne monte qu'à ſix: le 8. 19 et 21 Juin, le 9 Juillet, le 1 et 7 Août. Il tonnoit de loin le 24 Avril, le 9 Juin et le 6 Août.

Il n'y a eu que deux aurores boréales d'obſervées le 11 Mars et le 3 d'Octobre.

La déclinaiſon de l'aiguille magnétique a été obſervée le 24 Mai de 8° 13′ vers l'Oueſt. Elle avoit été obſervée en 1782 de 7° 30′ vers l'Oueſt: ainſi elle va en augmentant.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES
faites à Moſcou en MDCCXCV.
d'après nouveau Stile.

Par Mr. le Conſeiller d'Etat & Chevalier STRITTER.

Préſenté à l'Académie le 24 Août 1797.

I. Baromètre.

Les hauteurs extrêmes, la variation totale, le milieu, et la hauteur moyenne du Baromètre pour chaque mois de l'année 1795.

Mois	Au plus haut		Au plus bas		Variation.	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour heure	P. cent.	Jour heure	cent.	P. cent.	P. mill.
Janvier . . .	27. 58	le 15 après midi	26. 42	le 6 —	116	27. 00	27. 135
Février . . .	27. 67	le 19 à 6 h. m.	26. 79	le 11 à 10 h. s.	88	27. 23	27. 170
Mars	27. 71	le 31 apr midi	26. 63	le 13 à 10 h. s.	108	27. 17	27. 290
Avril	27. 71	le 1 avant midi	27. 08	le 19 à 6 h. m.	63	27. 40	27. 370
Mai	27. 58	le 19 —	26. 79	le 23 après midi jusqu'au 25 mat.	79	27. 18	27. 190
Juin	27. 50	le 5 et 7 matin	26. 71	le 24.25.26 mat.	79	27. 10	27. 110
Juillet . . .	27. 21	le 22 avant midi le 24 à 2 h. s. et le 25 av. midi	26. 71	le 13 à 6 h. m.	50	26. 96	26. 991
Août	27. 50	le 31 à 6 h. s.	26. 92	le 20 à 10 h. s. le 21-22 av. midi	58	27. 21	27. 119
Septembre .	27. 63	le 30 apr. mid.	26. 67	le 17 apr. midi	96	27. 15	27. 340
Octobre . .	27. 67	le 1 à 6 h. m.	26. 79	le 14 av. midi	88	27. 23	27. 238
Novembre .	27. 50	le 9. 10 et 11	26. 46	le 14 à 6 h. m.	104	26. 98	27. 202
Décembre .	27. 75	le 8 après midi	26. 75	le 30 et 31	100	27. 25	27. 335

m. ſignifie *matin* ou *avant midi*, et s. *ſoir* ou *après midi*.

Con-

Conclusions.

1) La plus grande hauteur du Baromètre

En A *). 27. 75, le 8 Décembre après midi, Thermomètre 155 à 163°. Vent du Sud, ciel à demi ſerein.

H.. 28.04, le 16 Décembre 1794 à 2 h. s. Therm. 172° Vent du NE.

E.. 27.67, le 1 Octobre 1795 à 6 h. m. Therm. 152°, Calme, ciel en partie ſeirein.

2) La plus petite hauteur du Baromètre

En A.. 26.42 le 6 Janvier, toute la journée, Therm. 156 à 153°. Vent fort du SOu. Ciel en partie couvert et un peu de neige.

H.. 26.42, le 6 Janvier 1795 etc.

E.. 26.67, le 17 Septembre 1795 après midi, Therm. 146 à 147°. Vent de l'Oueſt. Ciel couvert et beaucoup de neige.

3) La variation totale... en A... 133; en H... 162, et en E... 100 parties centiemes d'un pouce.

4) Le milieu arithmetique en A.. 27.08, en H.. 27.23, et en E.. 27.17.

5) La hauteur moyenne, en A.. 27.20, en H... 27.30, et en E.. 27.16. Elle a donc été de 0.14 moindre en été qu'en hyver, tout comme à St. Pétersbourg.

6) La

---

*) A. marque l'intervalle de l'année entiere, depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre inclusivement.

H. marque l'intervalle de l'hyver, depuis le 1 Novembre 1794 jusqu'au 1 Mai 1795, qui contient 181 jours.

E. marque l'intervalle de l'été ſuivant depuis le 1 Mai 1795 jusqu'au 1 Novembre, qui comprend 184 jours.

6) La variation a été la plus grande en Janvier et la plus petite en Juillet, mais toujours conſidérablement moindre qu'à St. Pétersbourg. La hauteur moyenne a été la plus grande en Avril, et la plus petite en Juillet.

7) Pour calculer par les hauteurs moyennes l'élévation de Moſcou au deſſus de St. Pétersbourg faiſons les poſitions ſuivantes:

I. en A.. Baromètre 28, 125 ou 337, 45 lignes.
27, 200 ou 326, 40 —

Thermomètre, hauteur moyenne + 1, 3 Réaumur
+ 3, 8 —

II. en H.. Baromètre 28, 253 ou 339, 03 lignes
27, 300 ou 327, 60 —

Thermomètre, hauteur moyenne − 3, 9 Réaumur
+ 2, 1 —

III. en E.. Baromètre 28, 121 ou 337, 41 lignes.
27, 160 ou 325, 90 —

Thermomètre, hauteur moyenne + 9, 4 Réaumur
+ 10, 6 —

Et nous obtiendrons par la méthode de Mr. Deluc, l'élévation de Moſcou au deſſus de St. Pétersbourg,
par la prémiere poſition = 123 Sagenes ou toiſes de Ruſſie
par la ſeconde — — = 125 — — — — —
par la troiſième — — = 133 — — — — —

Et ſi nous négligeons les corrections que donnent les dégrés du Thermomètre, ces élévations reſpectives ſeroient de 132, 136, 138 ſagenes.

II. Thermomètre.

1) Hauteurs extrêmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Hauteurs extrêmes. Au plus bas. Degré.	Jour et heure.	Au plus haut. Degré.	Jour et heure.	Différence. dégr.	Etat moyen. Froid moyen. Degré.	Chaleur moyenne. Degré.
Janvier	195	le 21 à 6 h. m.	153	le 5 à 2 h. s.	42	171,8	165,3
Février	182	le 8 à 6 h. m.	142	le 12 à 2 h. s.	40	164,2	156,4
Mars	182	le 16 à 6 h. m.	137	le 30 et 31 à 2 h. s.	45	157,5	147,9
Avril	161	le 15 à 6 h. m.	118	le 27 à 2 h. s.	43	147,2	133,6
May	148	le 10 au 11	106	le 3 à 2 h. s.	42	137,6	124,1
Juin	139	le 15 à 6 h. m.	103	le 9 et 22 à 2 h. s.	36	129,6	115,8
Juillet	134	le 21 à 6 h. m.	112	le 4 à 2 h. s.	22	127,7	118,2
Août	141	le 31 à 10 h. s.	106	le 5 à 2 h. s.	35	131,5	119,6
Septbr.	151	le 30 à 6 h. m.	114	le 7 et 8 à 2 h. s.	37	140,5	128,8
Octbr.	161	le 20 à 6 h. m.	131	le 3 et 8 à 2 h. s.	30	148,9	141,5
Novbr.	164	le 18 à 6 h. m.	134	le 2 à 2 h. s.	30	150,4	145,7
Décbr.	182	le 26 à 6 h. m.	142	le 21 à 2 h. s.	40	165,1	159,1

2) Nom-

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle, pour chaque mois de l'année 1795.

Mois.	Le froid a été plus grand que							Le chaleur a été plus grande que						
	190 Jours.	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours.	150 Jours.	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours.	170 Jours.
Janvier	1	9	16	26	31	31	31						10	21
Février		1	7	21	25	28	28					6	21	27
Mars		1	3	11	26	31	31				2	21	29	30
Avril				1	15	24	30		2	12	21	27	30	30
Mai						10	28	1	9	24	30	31	31	31
Juin							18	9	19	28	30	30	30	30
Juillet							6		17	31	31	31	31	31
Août						1	23	3	13	30	31	31	31	31
Septbr.					2	18	30		6	13	28	30	30	30
Octbr.				1	16	28	31				15	26	31	31
Novbr.				1	15	30	30				4	24	30	30
Décbr.		2	12	21	29	31	31					5	17	26

Resumé.

1) Le plus grand froid, ou la plus petite hauteur du Thermomètre

en A... 195° le 21 Janvier à 6 h. matiin. Baromètre 27′, 25, vent du Nord, ciel ſerein.

en H... 195 le 21 Janvier 1795 etc.

en E... 161 le 20 Octobre à 6 h. matin. Barom. 28. 42, vent du NOu, nuages.

Eeee 2 2) La

2) La plus grande chaleur, ou la plus grande hauteur du Thermomètre

en A ... 103°, le 9 Juin à 2 h. après midi. Barom. 27.33, vent fort du SE, ciel en partie ſerein, et le 22 Juin à 2 h. après midi. Barom. 26.92, vent fort de l'Eſt, ciel en partie ſerein.

en H ... 118, le 27 Avril 1795 à 2 h. après midi. Barom. 27.25, vent fort du NOu, nuages.

en E ... 103°, le 9 Juin etc.

3) La différence entre ces deux température extrèmes:

en A ... 92 degrés de Délisle qui font 49 dégr. du Réaumur
en H ... 77 — — — — — 41 — — —
en E ... 58 — — — — — 31 — — —

Cette différence a été la plus grande au mois de Mars, et la plus petite au mois de Juillet, tout comme à St. Pétersbourg.

4) Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermometriques, obſervées à 6 heures du matin et à 10 heures du ſoir, diviſée par leur nombre, a été le plus grand en Janvier et le plus petit en Juillet. Sa valeur a été

en A ... 147°, 6 d'après Réaumur 1° 3 de chaleur
en H ... 159, 5 — — 5 0 de froid
en E ... 135, 9 — — 7.6 de chaleur.

5) La chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs thermométriques obſervées à 2 heure après midi, diviſée par leur nombre, a été la plus grande en Iuin et la plus petite en Janvier. La valeur a été

en A ... 137°, 9 d'après Réaumur 6°, 4 de chaleur.
en H ... 151, 7 — — 0, 8 de froid
en E ... 124, 6 — — 13.6 de chaleur.

6) Le

6) Le froid a été plus grand

que	190	en A... 1	jours	en H... 1	jours	en E.		
—	180	— —... 13	—	— —.. 18	—	— —		
—	170	— —.. 38	—	— —...46	—	— —		
—	160	— —... 82	—	— —... 81	—	— —... 1	jours	
—	150	— —.. 159	—	— —.. 136	—	— —.. 18	—	
—	140	— —.. 232	—	— —... 173	—	— —...57	—	
—	130	— —... 317	—	— —.. 181	—	— —.. 136	—	
—	120	— —...365	—	— —... 181	—	— —... 184	—	

7) La chaleur a été

plus gr. que	110	en A	13	jours	en H	jours	en E 13	jours
— — —	120	— —	66	—	— — 2	—	— — 64	—
— — —	130	— —	138	—	— — 12	—	— — 126	—
— — —	140	— —	192	—	— — 27	—	— — 165	—
— — —	150	— —	262	—	— — 87	—	— — 179	—
— — —	160	— —	321	—	— — 131	—	— — 184	—
— — —	170	— —	348	—	— — 159	—	— — 184	—
— — —	180	— —	364	—	— — 181	—	— — 184	—

8) Il a gélé continuellement en A pendant 44 jours, et en H pendant 50 jours. Il n'a gélé point du tout en A pendant 133 jours, en H pendant 8 jours, et en E pendant 127 jours.

9) Il y a eu déjà en Avril des chaleurs plus grandes que 130°, ſavoir le 18 .. 20 — 30, et mêmes des chaleurs plus grandes que 120°, ſavoir le 27 et le 30. Mais en Septembre et en Octobre il a déjà gélé en 18 jours; et le froid a même ſurpaſſé 160°, le 20 Octobre.

10) En

10) En H il a gélé pour la premiere fois le 17 Octobre 1794 et pour la derniere fois le 17 Avril 1795, ce qui fait un intervalle de 182 jours d'hyver.

11) En E, il a gélé pour la derniere fois le 17 Avril, et il a recommencé à géler le 17 Septembre après un intervalle de 153 jours d'été.

III. Vent.

Mois.	Calme.	Vent médiocre	Vent fort	Vent très fort	Degrè de force	Rapport des quatre plages			
						Nord	Eſt	Sud	Oueſt
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	*	Jours	Jours	Jours	Jours
Janvier .	3	10	16	2	306	8	5	10	8
Février .	2	11	14	1	314	9	4	5	10
Mars . .	2	14	15	0	290	7	6	10	8
Avril . .	2	7	20	1	346	12	3	7	8
Mai . .	0	1	16	14	574	9	2	9	11
Juin . .	0	2	14	14	573	10	4	6	10
Juillet .	0	8	16	7	439	11	5	3	12
Août . .	1	0	24	6	468	19	3	3	6
Septembre	1	3	21	5	436	10	4	8	8
Octobre .	4	5	21	1	342	13	2	6	10
Novembre	0	7	15	8	460	6	1	12	11
Décembre	0	11	12	8	432	8	3	9	11
A	15	79	204	67	418	122	42	88	113
H	16	73	88	4	302	53	34	50	44
E	6	19	112	47	472	72	20	35	57

Les

Les mois de Mai et de Juin ont été les plus venteux, et ceux de Mars et de Janvier les plus calme. L'hyver de 1795 a été conſidérablement plus calme que l'été de 1795.

Le vent dominant a été celui du Nord pour toute l'année; il a ſurtout le plus fréquent en été 1795, et ſpécialement au mois d'Août.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel.			Brouillard.	Pluie		Neige	
	ſerein.	nuages.	couvert.		forte.	médiocre.	copieuſe.	petite.
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.
Janvier	2	5	24	0	0	0	4	17
Février	0	4	24	0	0	3	3	17
Mars	2	7	22	8	0	5	3	10
Avril	5	11	14	0	1	3	0	4
Mai	3	7	21	0	6	9	0	2
Juin	4	12	14	0	4	6	0	0
Juillet	0	8	23	3	5	14	0	0
Août	2	9	20	1	6	11	0	0
Septembre	5	9	16	1	2	6	1	0
Octobre	2	6	23	4	4	7	1	4
Novembre	0	8	22	2	1	9	0	5
Décembre	2	6	23	0	0	4	4	12
A	27	92	246	19	29	77	16	71
H	12	35	134	15	1	19	12	69
E	16	51	117	9	27	53	2	6

1) Les jours de ciel entièrement couvert ont conſidérablement ſurpaſſé en nombre ceux où le ciel a été ſerein

où

où en partie ſerein. Aux mois de Février, de Juillet et de Novembre, il n'y a pas eu un ſeul jour de ciel entierement ſerein. Les brouillards ont été le plus fréquent en Mars.

2) Les mois les plus pluvieux ont été ceux de Juillet, d'Août et de May. Aux mois de Janvier et de Février il eſt tombé plus de neige que dans les autres mois.

Il neiga pour la premier fois en Hyver le 20 Octobre 1794, et pour la derniere fois le 12 Mai 1795, ce qui fait un intervalle de 204 jours.

En été il neiga pour la derniere fois le 12 Mai 1795, et il recommença à neiger le 17 Septembre après un intervalle de 128 jours.

2. Grèle, le 15 et 27 Mai.

3. Parhélies, le 2 et 16 Janvier et le 25 Décembre.

3. Paraſélene, le 25 et 26 Juillet, le 3 Août.

11. Orages, le 25 Avril, le 2. 3. 29 Mai, le 13. 23. 27 Juin, le 12. 20 Juillet, le 3. 26 Août.

EX-

EXTRAIT

DES OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES faites à St. Pétersbourg en MDCCXCVI. d'après le nouveau stile.

Par

J. A. EULER.

Préſenté à l'Académie le 27 Janvier 1797.

I. Baromètre.

1.) Les hauteurs extrèmes, la variation, le milieu et la hauteur moyenne pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Au plus haut			Au plus bas			Variation	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour	heure	P. cent.	jour	heure	cent.	P. cent.	P. cent.
Janvier	28. 57	le 17	à minuit	27. 30	le 19	à 9 h. s.	127	27. 93	27. 897
Février	28. 81	le 27	à midi	27. 51	le 19	à 9 h. m.	130	28. 16	28. 268
Mars	28. 99	le 11	à midi	27. 30	le 21	à 8 h. m.	169	28. 15	28. 247
Avril	28. 67	le 5	à midi	27. 67	le 16	à minuit	100	28. 17	28. 234
Mai	28. 61	le 19 et le 20		27. 64	le 7	à 6 h. s.	97	28. 12	28. 086
Juin	28. 41	le 30	à 10 h. m.	27. 77	le 8	à 10 h. m.	64	28. 09	28. 124
Juillet	28. 22	le 20	à 3 h. m.	27. 73	le 25	à 3 h. m.	49	27. 98	28. 050
Août	28. 48	le 31	minuit	27. 91	le 8	à 3 h. m.	57	28. 19	28. 249
Septembr.	28. 52	le 1	à 10 h. m.	27. 31	le 9	à 5 h. m.	121	27. 92	28. 001
Octobre	28. 54	le 19	à 9 h. s.	27. 41	le 3	à 7 h. m.	113	27. 97	28. 045
Novembre	28. 97	le 22	à 9 h. m.	27. 15	le 28	à 2 h. s.	182	28. 06	28. 134
Décembre	28 93	le 29	à 10 h. s.	27. 29	le 1	à 2 h. m.	164	28. 11	27. 982

h. m. ſignifie *heure* du *matin*, ou *avant-midi*,
h. s. —— *heure* du *ſoir*, ou *après-midi*.

2) Nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a ſurpaſſé quelques diviſions principales de l'échelle, avec la hauteur qui répond à la moitié de chaque mois.

Mois	Au deſſus de 27. 80 jours h.	27. 90 jours h.	28. 00 jours h.	28. 10 jours h.	28. 20 jours h.	un demi mois au deſsus de Pouces milliem.
Janvier	18. 15	14. 19	10. 9	7. 0	5. 11	27. 916
Février	26. 8	25. 15	25. 4	23. 16	19. 3	28. 259
Mars	24. 15	23. 6	20. 4	17. 6	16. 1	28. 246
Avril	27. 15	26. 18	22. 14	19. 4	17. 17	28. 285
Mai	27. 15	24. 18	18. 19	13. 1	8. 13	28. 060
Juin	29. 12	28. 22	23. 20	18. 17	8. 8	28. 151
Juillet	29. 22	26. 16	22. 22	11. 8	1. 5	28. 075
Août	31. 0	31. 0	30. 3	28. 3	23. 16	28. 294
Septembre	23. 18	21. 3	15. 22	8. 22	7. 7	28. 012
Octobre	22. 22	19. 11	16. 22	13. 9	10. 20	28. 046
Novembre	23. 20	22. 19	19. 13	15. 16	11. 3	28. 109
Décembre	20. 1	15. 9	11. 14	8. 3	7. 1	27. 878

3) Varia-

3) Variations conſidérables et ſubites.

Mois	Temps jour.	Temps heur.	Diff. heur.	Barom. P. cent	Variat. centie.	Therm. degrès	Vent	Atmosphère
Janvier	1	6 m.	12	28. 19	— 43	156	SOu.	nuages
	1	6 s.		27. 76		149	SOu. ff.	neige et ciel couvert
	6	8 m.	24	27. 99	— 61	161	SE	Brouillard, c. couvert
	7	8 m.	20	27. 38	+ 64	148	SE.	ciel couvert, neige
	8	4 m.		28. 02		170	E	c. couvert, brouillard
	15	12 m.	15	27. 88	— 47	159	NOu.	c. ſerein, enſuite couvert, neigé
	16	3 m.		27. 41		164	E	c. couvert enſuite ſerein
	16	3 m.	45	27. 41	+ 116	164	E	c. couvert, enſv. ſerein
	17	12 s.	44	28. 57	— 107	183	NOu. fort	c. ſerein, enſuite couvert et neige
	19	8 s.	19	27. 50	+ 68	149	SOu. f.	beauc. de neige, c. couvert
	20	3 s.	17	27. 98	— 37	169	Calme	c. ſerein
	21	8 m.	11	27. 61	+ 32	162	NE	c. couvert, neige
	21	7 s.	14	27. 93	— 32	164	NE	ciel couvert
	22	9 m.		27. 61		162	Calme	brouillard, ciel couvert, neige.
Février	22	3 s.	21	27. 62	+ 77	154	SOu.	ciel couvert, neige
	23	12 m.	20	28. 39	— 76	187	Calme	c. ſerein, enſuite nuages
	24	8 m.		27. 63		147	Ou. fort	c. couvert, pluie, enſuite nuages
Mars	19	2 m.	28	28. 36	— 57	151	Calme	Nuages
	20	6 m.		27. 79		151	N	neige, enſuite c. ſerein
	20	3 s.	17	27. 88	— 58	151	N	ciel ſerein, nuages
	21	8 m.		27. 30		160	N ff.	ciel couvert, neige
Sept.	10	9 m.	38	27. 50	+ 51	137	NE. ff.	ciel couvert, pluie
	11	11 s.		28. 01		144	NE	nuages
	25	9 m.	42	28. 51	— 64	143	NOu.	c. couvert, pluie
	27	3 m.		27. 87		148	Ou.	c. ſerein
	28	3 m.	57	28. 23	— 67	150	NOu. ff.	c. couvert, enſuite pluie
	29	4 s.		27. 56		140	SOu. fort	pluie, enſuite nuages
Octob.	3	9 m.	30	27. 41	+ 74	148	Calme	neige et pluie, c. couvert
	4	3 s.		28. 15		143	Ou.	c. couvert.
	23	4 m.	31	28. 37	— 59	151	S	nuages, brouillard, pluie
	24	9 m.		27. 78		140	Ou. fort	c. couvert, brouillard, pluie,

Mois	Tems jour.	heur.	Diff. heur.	Barom. P. cent.	Variat. cent.	Therm. degrès	Vent	Atmosphère.
Nov.	30	3 s.	66	28. 38	— 109	143	NOu.	Pluie et ciel couvert.
	2	9 m.	53	27. 29	+ 104	147	Calme	Brouillard, c. couvert, pluie et neige
	4	2 s.	40	28. 33	— 55	152	N	c. couvert, enſuite ſerein
	6	6 m.		27. 78		143	S	pluie, c. couv. brouillard
	24	6 s.	48	28. 87	— 99	166	S	c. couvert
	26	6 s.		27. 88		154	NOu. fort	ciel ſerein.
	27	6 m.	18	27. 95	— 77	156	Ou. fort	c. couvert, enſuite neige
	27	12 s.		27. 18		151	Ou. ff.	neige, c. couvert.
Décem.	7	12 m.	68	27. 46	+ 96	156	S, calme	neige, c. couvert, brouillard
	10	8 m.	38	28. 42	— 70	162	SOu.	c. couvert, neige
	11	10 s.		27. 72		164	SOu. fort	neige, ciel couvert
	18	12 m.	24	28. 07	— 67	174	NOu. fort	nuages, c. couvert, neige
	19	12 m.	33	27. 40	+ 50	164	SOu. fort	c. couvert
	20	9 s.		27. 90		169	SOu.	c. ſerein
	26	12 s.	48	27. 96	+ 87	165	NOu. ff.	c. couvert, neige
	29	12 s.		28. 83		167	Calme	brouillard

ff deſigne un vent très fort. Le ſigne — marque les deſcentes, et le ſigne + les montées.

Réſumé des obſervations Barométriques.

1) La plus grande hauteur du Baromètre a été

A. Pour toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1796 28. 99, le 11 Mars à 12 h. midi. Therm. 158. Vent du Nord, ciel ſerein.

H. Pour les six mois d'hyver, depuis le 1 Novemb. 1795 jusqu'au 1 Mai 1796, 28.99 le 11 Mars etc.

E. Pour les six mois de l'été ſuivant depuis le 1 Mai, jusqu'au 1 Novembre 1796 28 . 61, le 19 jusqu'au 20 Mai, Thermomètre 139 — 136. Vent NE — E. Ciel ſerein.

2) La

2) La plus petite hauteur du Baromètre

A. 27.15 le 28 Novembre à 2 h. après midi, Therm. 154. Vent SOu, ciel couvert et neige.

H. 27.11 le 13 Novembre 1795 à 7 h. après midi. Therm. 156. Vent Eſt, ciel couvert.

E. 27.31. le 9 Septembre à 5 h. matin. Therm. 136. Vent NE, ciel couvert et beaucoup de pluie.

3) La variation totale a été: en A = 184, en H = 188 et en E = 130 centiemes parties de pouce.

4) Le milieu arithmetique: en A = 28.07, en H = 28.05 et en E = 27,96.

5) La hauteur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs barometriques diviſée par leur nombre; en A = 28, 107, en H = 28.107 et en E = 28.093. Cette hauteur moyenne a été la plus grande en Février et la plus petite en Janvier. La variation totale a été la plus grande en Novembre, et la plus petite en Juillet.

6) La hauteur du Baromètre a été au deſſus de

27.80	en A 305 jours 6 h.	en H 140 jours 18 h.	en E 164 j. 17 h.
27.90	— 280 — 2 —	— 127 — 1 —	— 151 – 22 h.
28.00	— 237 — 4 —	— 109 — 11 —	— 128 – 12 h.
28.10	— 184 — 9 —	— 93 — 5 —	— 93 – 12 h.
28.20	— 136 — 9 —	— 78 — 18 —	— 59 – 21 h.

7) La hauteur du Baromètre a été

en A . . 183 jours au deſſus de 28.102,
en H . . 91 jours au deſſus de 28.140, et
en E . . 92 jours au deſſus de 28.141.

7) Le

7) Les variations conſidérables et ſubites ont été les plus fréquentes en Janvier et enſuite en Décembre. Les décentes les plus conſiderables ont été obſervées de 127 centiemes de pouce, ou de $15\frac{1}{5}$ lignes en 44 heures le 17 Janvier, enſuite de 109 centiemes, ou de $13\frac{1}{10}$ lignes en 66 heures de tems le 30 Octobre et de 99 centiemes, ou de $11\frac{9}{10}$ lignes en 48 heures le 24 Novembre. Les montées les plus conſiderables ont été de 116 centiemes, ou de $13\frac{9}{10}$ lignes en 45 heures le 16 Janvier, enſuite de 104 centieme ou de $12\frac{1}{2}$ lignes en 53 heures le 2 Novembre et de 97 centiemes, ou de $11\frac{3}{5}$ lignes en 48 heures, le 26 Décembre.

II. Thermomètre.

1) Hauteurs extrêmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1796.

Mois	Hauteurs extrêmes				différence	Etat moyen	
	Au plus bas		Au plus haut			froid mo.	chal. mo.
	degré	jour et heure	degré	Jour et heure	degré	Degré	degré
Janvier . . .	183	le 17 à 10 h. s.	144	le 26 et le 27	39	160. 7	154. 3
Février . . .	184	le 13 à 7 h. m.	150	le 17 à 2 h. s.	34	164. 5	157. 8
Mars	183	le 4 à 6 h. m.	143	le 18 à 2 h. s.	40	165. 5	154. 0
Avril	163	le 14 à 6 h. m.	126	le 27 à 2 h. s.	37	153. 0	141. 4
Mai	154	le 2 à 6 h. m.	115	le 22 à 2 h. s.	39	141. 1	131. 2
Juin	136	le 20 à 11 h. s	108	le 4 à 2 h. s.	28	129. 2	118. 7
Juillet . . .	129	le 30 à 5 h. m.	110	le 5 à 2 h. s. le 20 à 12 h. midi	19	125. 0	117. 0
Août	135	le 31 à 6 h. m.	111	le 4 à 2 h. s.	24	129. 1	119. 7
Septembre .	151	le 30 à 6 h. m. à 10 h. s.	121	le 6 à 2 h. s.	30	140. 9	133. 1
Octobre . .	155	le 2 à 6 h. m.	128	le 8 à 2 h. s.	27	145. 6	140. 2
Novembre .	170	le 25 à 7 h. m.	149	le 12. 13. 19 à 2 h. s.	21	155. 7	151. 1
Décembre .	181	le 18 à 7 h. m. le 27 à 7 h. s.	148	le 4 à 7 h. m.	33	168. 8	162. 5

2) Nom-

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que						Le chaleur a été plus grande que						
	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours.	150 Jours.	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours.	170 Jours.
Janvier	2	8	17	22	31	31					16	22	29
Février	3	11	19	24	29	29					6	16	26
Mars	2	10	23	30	31	31					10	25	30
Avril			6	20	30	30			4	8	29	30	30
Mai				2	15	30		2	12	29	31	31	31
Juin						14	2	17	30	30	30	30	30
Juillet						0		24	31	31	31	31	31
Août						12		17	31	31	31	31	31
Septbr.				4	15	30			9	26	30	30	30
Octbr.				3	25	31			1	14	31	31	31
Novbr		1	6	28	30	30					14	28	30
Décbr.	2	12	28	31	31	31					1	10	29

3) Enumeration detaillée des froids, obſervés pendant l'hyver de 1795 à 1796, ou depuis le 1 Novembre 1795, jusqu'au 1 Mai 1796, ce qui fait un intervalle de 182 jours.

Le froid a ſurpaſſé 180 degrés de Délisle en 8 jours, le 25 Décembre 1795, le 17. 23 Janvier, le 12. 13. 24 Février, et le 3. 4. Mars.

Le

La froid a été entre

		Jours
170 et 180	Le 12—18. 21—24. 26. 28 Décembre, le 8—10. 16. 18. 20 Janv. le 10. 11. 21—23. 25. 27. 29 Févr. et le 1. 2. 5. 6. 22—25 Mars . .	35
160 et 170	Le 10. 14 Nov. le 3. 10. 11. 27. 30. 31. Décemb. le 4. 5. 6. 7. 11. 12. 15. 21. 22 Janv. le 7. 9. 14—16. 20. 26. 28 Févr. le 8—16. 21. 26. 27. 29 Mars et le 3. 5. 6. 14. 15. 20 Avril	44
150 et 160	Le 5—9. 11. 13. 15. 16—19. 22. 23. 25. 29. 30 Nov. le 1. 2. 4. 8. 9. 19. 20. 29 Déc. le 1. 3. 13. 19. 31 Janv. le 6. 8. 17. 19. Févr. le 7. 17. 19. 20. 28. 30. 31. Mars et le 1. 2. 4. 7. 9—13. 16. 18. 19. 21. 22 Avril	56
		143

4) Enumeration détaillée des chaleurs obſervées pendant l'été de 1796, c'eſt-à-dire depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1796, ce qui fait un intervalle de 184 jours.

La chaleur a ſurpaſſé 110 degrés de Délisle en 2 jours le 4 et 5 Juin.

La chaleur a été entre

		Jours
120 et 110	Le 20. 31 Mai, le 1. 2. 3. 6. 7. 9. 10. 15—17. 22. 25. 26. 28. 29 Juin, le 1—8. 10. 15—24 27—29. 30. 31 Juillet, et le 1—5. 9—16. 20. 25. 26. 27. Août	58
130 et 120	Le 13. 14. 15. 20 21. 23. 26—28. 30. Mai, le 8. 11—14. 18—21. 23. 24. 27. 30 Juin, le 9. 11—14. 25. 26 Juillet, le 6—8. 17—19. 21—24. 28—31 Août, le 1—8. 21 Septemb. et le 8 Octobre	54

140 et

		Jours
160 et 170	Le 1. 4—12. 16—19. 24. 25. 29 Mai, le 9—20. 22. 23. 25. 26. 29 Septembre, et le 5—7. 9—12. 14. 15. 22—24. 29 Octobre . .	47
150 et 160	Le 2. 3 Mai, le 24. 27. 28. 30 Septemb. et le 1—4. 13. 16—21. 25—28. 30. 31 Octobre	23
		184

Réſumé des obſervations ſur le froid et chaleur.

1) Le plus grand froid a été
   en A. 184°, d'après Réaumur 18^d, 1, le 13 Février à 7 heur. du matin, Baromètre 28 . 22, Vent du SE, brouillard, enſuite ciel à demi couvert.
   en H. 184°, le 13 Février etc.
   en E. 155°, d'après Réaumur 2^d, 7, le 2 Octobre à 6 heur. du matin, Baromètre 27 . 73, Vent du NE, ciel ſerein.

2) La plus grande chaleur
   en A. 108°, d'après Réaumur 22^d, 4 le 4 Juin à 2 heures après-midi, Barom. 28 . 24, calme, ciel ſerein.
   en H. 126°, d'après Réaumur 12^d, 8, le 27 Avril à 2 heures après-midi, Baromètre 28 . 41, calme, ciel ſerein.
   en E. 108° le 4 Juin etc.

3) Le froid moyen, c'eſt-à-dire la ſomme de toutes les obſervations thermométriques annotées le matin et le ſoir diviſée par leur nombre
   en A. 148°, 2 d'après Réaumur 0^d, 9 de chaleur
   en H. 160, 3 d'après Réaumur 5, 5 de froid et
   en E. 135, 1 d'après Réaumur 8, 0 de chaleur

4) La chaleur moyenne, c'eſt-à-dire, la ſomme de toutes les obſervations thermomètriques annotées à 2 heures après-midi, diviſée par leur nombre

en A . 140°, 0 d'aprés Reaumur 5°, 3 de chaleur
en H. 152, 3 d'aprés Réaumur 1, 3 de froid;
en E . 126, 6 d'aprés Réaumur 12, 5 de chaleur.

5) Le mois le plus froid a été celui de Décembre, et le mois plus chaud, celui de Juillet.

6) Le froid a été en A . . 9 jours entre 180 et 190

33	—	—	170 et 180
57	—	—	160 et 170
65	—	—	150 et 160
73	—	—	140 et 150
62	—	—	130 et 140
65	—	—	120 et 130 et
2	—	—	110 et 120

en H . . 8 jours entre 180 et 190

35	—	—	170 et 180
44	—	—	160 et 170
56	—	—	150 et 160
38	—	—	140 et 150 et
1	—	—	130 et 140.

en E . . 9 jours entre 150 et 160

46	—	—	140 et 150
62	—	—	130 et 140
65	—	—	120 et 130 et
2	—	—	110 et 120.

7) La

7) La chaleur a été en A

en A	2	jours entre		110	et	100	
	58	—	—	120	et	110	
	58	—	—	130	et	120	
	51	—	—	140	et	130	
	91	—	—	150	et	140	
	55	—	—	160	et	150	
	43	—	—	170	et	160	et
	8	—	—	180	et	170.	
en H	4	jours entre		130	et	120	
	7	—	—	140	et	130	
	78	—	—	150	et	140	
	49	—	—	160	et	150	
	34	—	—	170	et	160	et
	10	—	—	180	et	170.	
en E	2	jours entre		110	et	100	
	58	—	—	120	et	110	
	54	—	—	130	et	120	
	47	—	—	140	et	130	
	23	—	—	150	et	140.	

8) Il a gelé en A .. 164 jours, en H .. 143 jours et en E .. 9 jours
Il a gelé continuellement.

en A .. 106 jours, en H .. 93 jours et en E .. 0 jour.
Il n'a gélé point du tout

en A .. 202 jours, en H .. 39 jours et en E .. 175 jours.

9) La premiere gélée en H a été obſervée le 11 Octobre 1795, et il a gélé pour la derniere fois le 2 Mai 1796, ce qui donne l'intervalle d'hyver de 205 jours.

10) La derniere gélé en E a été le 3 Mai, et il a recommencé a géler le 25 Septembre, ce qui donne pour l'intervalle de l'été 145 jours.

Où A marque comme ci-deſſus l'année entiere, ou l'intervalle du 1 Janvier 1796 jusqu'au 1 Janvier 1797. De même H marque l'hyver de 1795 à 1796, ou l'intervalle du temps depuis le 1 Novembre 1795 jusqu'au 1 Mai 1796. Enfin E marque l'été de 1796, ou bien l'intervalle depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1796. A comprend donc tous les 366 de l'année biſſextile 1766, H comprend 182 et 184 jours.

III. Vent.

1) Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Calme	Vent doux	Vent fort	Vent très f.	Nord	NE	Eſt	SE	Sud	SOu.	Oueſt	NOu
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours	Jours
Janvier . .	6	12	10	3	2	1	2	4	4	11	4	3
Février .	8	15	5	1	5	3	2	8	7	2	2	0
Mars . .	9	14	7	1	8	1	0	4	3	3	2	10
Avril . .	16	11	3	0	8	5	3	0	1	1	4	8
Mai . .	3	13	11	4	1	9	3	2	5	2	6	3
Juin . .	4	13	9	4	0	0	3	5	1	5	8	8
Juillet .	11	10	10	0	0	1	2	6	2	7	8	5
Août . .	14	14	3	0	0	3	5	4	5	2	9	2
Septembre	5	17	5	3	3	4	4	4	2	3	6	4
Octobre .	3	21	7	0	3	1	0	3	9	4	5	6
Novembre	8	13	8	1	2	0	4	4	11	4	3	2
Décembre	7	16	6	2	5	0	1	3	10	6	0	6
A	94	169	84	19	37	28	29	47	61	50	57	57
H	50	82	38	12	31	14	9	24	25	35	15	29
E	40	88	45	11	7	18	17	24	25	23	42	28

2) Rap-

2) Rapport de la force des vents et des quatres plages; tiré du tableau précédent, pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Degré de force	Rapport des quatre plages			
		Nord	Eſt	Sud	Oueſt
	A	Jours	Jours	Jours	Jours
Janvier .	303	4	4	12	11
Février .	228	6	8	12	3
Mars . .	238	14	2	7	8
Avril . .	166	14	6	1	9
Mai . .	339	7	9	7	8
Juin . .	327	4	5	6	15
Juillet .	229	3	5	9	14
Août . .	174	3	8	9	11
Septembre	277	7	8	6	9
Octobre .	235	7	2	12	10
Novembre	247	3	6	15	6
Décembre	255	8	3	14	6
A	251	80	66	110	110
H	254	53	28	54	47
E	265	30	38	49	67

Le mois de Mai ſe trouve être le plus venteux, après lui ſuivent les mois de Juin et de Janvier. Ceux d'Avril et d'Août ont été les plus calmes. La force des vents a été en été plus grand qu'en hyver.

Les vents du Sud et de l'Oueſt ont été les plus fréquens; le premier a dominé le plus en hyver, et celui de l'Oueſt le plus en été.

Le

Le vent du Nord a été le plus fréquens, au mois d'Avril et de Mais, celui de l'Eſt en Mai, celui du Sud en Novembre et celui de l'Oueſt en Juin.

3) Direction des vents forts.

Direction.	Jours et Mois.	Nombre des jours
Nord	Le 21. 22. 31 Mars, le 21 Avril, le 27. 30 Sept.	6
NE	Le 9. 11. Février, le 18. 19 Avril, le 1. 2. 3. 4. 19. 24 Mai, le 12 Juillet, le 30 Août, le 10. 11 Septembre	14
Eſt	Le 10 Févr. le 17 Août, le 20. 30 Novembre .	4
SE	Le 1. 6 Juin; le 21 Novembre, le 6 Mars, et le 6 Décembre	5
Sud	Le 18. 27. 28 Janv. le 25 Mars, le 9. 12. 22. 23 Mai, le 5. 28 Juillet, le 23 Octobre, le 22 Novembre	12
SOu.	Le 1. 2. 3. 19. 25. 26 Janvier, le 17. 18 Février, le 28 Mars, le 27. 31 Mai, le 9. 13. 14. 28 Juin, le 26. 29. 30. 31 Juillet, le 5 Août, le 20. 29 Sept. le 6. 9 Octobre, le 8. 25. 28 Novembre et le 4. 10. 11. 18. 19 Décembre	32
Oueſt	Le 5. 24. Janvier, le 28 Février, le 7 Mars, le 14. 28. 30 Mai, le 8. 11. 12. 26 Juin, le 6. 25. Juillet, le 26 Septembre, le 22, 24 Octobre, le 27 Novembre	17
NOu.	Le 4. 17 Janvier, le 8 Mars, le 17. 19. 20 Juin, le 9 Juillet, le 28 Septembre, le 16. 26 Octob. le 26 Novembre, et le 26. 27 Décembre . .	13
		103

Direc-

Direct.	Parmi ces 103 jours de vent fort, ont été les plus orageux ceux du	Jours
Nord	21 Mars	1
NE	2. 3 Mai, 10 Septembre	3
Eſt	10 Février	1
SE	1 Juin	1
Sud	27 Janvier, 9 Mai	2
SOu.	1 Janvier, 14 Juin, 20 Septembre, 4 Décemb.	4
Oueſt	28 Mai, 8 Juin, 27 Novembre	3
NOu.	4 Janvier, 20 Juin, 28 Sept., 26 Décembre .	4
		19

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie		Haut. de l'eau de pluie	Neige	
	ſerein.	nuages.	couvert		forte.	petite		forte	petit.
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Pouces	Jours.	Jours.
Janvier . .	4	13	14	6	2	8	1. 02	4	6
Février . .	6	7	16	7		2	0. 12	2	12
Mars . . .	16	11	4	7		1	0. 04	1	4
Avril . .	8	18	4	8		5	0. 28	2	8
Mai . . .	9	18	4	1	6	12	1. 46		
Juin . . .	7	20	3	0	5	10	1. 26		
Juillet . .	10	17	4	0	4	12	1. 70		
Août . .	13	16	2	5	3	10	1. 84		
Septembre .	5	17	8	1	5	9	2. 03		3
Octobre .	2	12	17	7	3	17	1. 19		6
Novembre .	2	11	17	4		6	0, 39	1	12
Décembre .	2	13	16	11		0	0. 0	2	13
A	84	173	109	57	28 | 92 120		9. 63	12 | 64 76	
H	43	69	70	34	4 | 29 33		2. 29	10 | 52 62	
E	46	100	38	34	26 | 70 96		7. 78	0 | 9 9	

La

La derniere neige tomba le 18 Avril, et il recommença à neiger le 23 Septembre, après un intevalle de 159 jours.

Il gréla en 5 jours, le 28 Mai, le 1 et 20 Juin, le 20 Juillet, et le 20 Septembre.

Le nombre des orages monte à 12. Il y en eut le 1. 5. 6. 7. 25 Juin, le 3. 4. 20. 21 Juillet, et le 8 Août, le 20 Séptembre et le 9 Octobre.

Le 6 Février, il y eut une foible lumiere boréale, et le 20 du même mois un paraſelene.

La Néva debacla le 23 Avril, après avoir été couverte de glace pendant 134 jours. Barometre au moment de la débacle 28.50. Thermomètre 147 à 142. Calme, brouillard, pluie, enſuite ciel à demi couvert. La riviere charia des glaces le 30 Avril, le 4 jusqu'au 11 Mai.

Les glaces réparurent le 21 Novembre avant midi avec un vent du SE très fort, le ciel étant ſerein. La Néva les charia enſuite en abondance, et en fût priſe le 25 matin par un froid de 170°, Baromètre 28.77, ciel couvert et vent du Sud. L'intervalle de tems depuis la debacle en printemps et la priſe a donc été cette année de 216 jours.

EX-

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES
faites à Moſcou en MDCCXCVI
d'après le nouveau ſtile.

Par Mr. le Conſeiller d'Etat & Chevalier Stritter.

Préſenté à l'Académie le 24 Août 1797.

I. Baromètre.

Les hauteurs extrèmes, la variation, le milieu et la hauteur moyenne du Baromètre, pour chaque mois de l'année 1796.

Mois.	Au plus haut		Au plus bas		Variation	Milieu	Hauteur moyenne
	P. cent.	jour heure	P. cent.	jour heure	cent.	P. cent.	P. cent.
Janvier	27. 67	le 12 —	26. 63	le 16 à 10 h. s.	104	27. 15	27. 13
Février	27. 58	le 27 à 10 h. s. le 28 à 6 h. m.	26. 75	le 18 à 10 h. s. le 20 à 6 h. m.	83	27. 17	27. 30
Mars	27. 88	le 7 à 6 h. m.	26. 25	le 21 à 10 h. s. le 22 à 6 h. m.	163	27. 07	26. 24
Avril	27. 54	le 1. 2. 6 et 25	26. 67	le 16 à 2 h. s.	87	27. 10	27. 20
Mai	27. 42	le 20 à 2 h. s.	26. 75	le 11 —	67	27. 09	27. 10
Juin	27. 34	le 1 —	27. 00	le 19 — et le 22 à 10 h. s.	34	27. 17	27. 13
Juillet	27. 29	le 27 à 2 h. s.	26. 75	le 5 à 10 h. s. et le 6 —	54	27. 02	27. 06
Août	27. 34	le 11. 12. 15. 19 et 20	27. 08	le 8 apr. midi	26	27. 21	27. 24
Septembr.	27. 42	le 1. 2. 20. 25 et 26	26. 67	le 10 et 11.	75	27. 04	27. 08
Octobre	27. 50	le 29 et 30	26. 54	le 1 à 6 h. m.	96	27. 02	27. 18
Novembre	28. 08	le 22. 23 et 24	26. 75	le 2 et 28	133	27. 42	27. 34
Décembre	27. 84	le 29 et 30	26. 67	le 1 —	117	27. 25	27. 14

1) La hauteur la plus grande du Baromètre a été

A. dans toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1796 = 28, 08 en Novembre le 22 depuis 2 h. après midi jusqu'à 10 h. du ſoir, le 23 toute la journée et le 24 6 h. du matin. Therm. 161 à 176°, vent du SE, nuages et ciel pour la plus part ſerein.

H. Pendant les six mois d'hyver, depuis le 1 Novembre 1795 jusqu'au 1 Mai 1796, ce qui fait un intervalle de 182 jours = 27, 88 le 7 Mars 1796, à 6 h. du matin. Therm. 181°, vent fort du NOu, ciel ſerein.

E. Pendant les six mois de l'été ſuivant, depuis le 1 Mai, jusqu'au 1 Novembre 1796, ce qui fait un intervalle de 184 jours = 27, 50 le 29 Octobre à 10 h. du soir jusqu'au 30 Octobre après midi. Therm. 145 à 141°, vent du NOu, ciel parſémé de nuages.

2) La plus petite hauteur du Baromètre

A. 26, 25 du 21 à 10 h. du ſoir jusqu'au 22 matin, du mois de Mars. Therm. 160 à 167°, vent très fort du NOu, nuages.

H. 26, 25. Au mois de Mars, voyez ci-deſſus.

E. 26, 54. Le 1 Octobre à 6 h. du matin. Therm. 141°, vent très fort du NE, ciel demi couvert, pluie.

3) La variation totale en A = 1, 83, en H = 1, 63, en E = 0, 96.

4) Le milieu arithmetique en A = 27, 16; en H = 27, 06; en E = 27, 02.

5) La

5) La hauteur moyenne, ou la ſomme de toutes les hauteurs obſervées du Baromètre diviſée par leur nombre: en A = 27, 18; en H = 27, 23; en E = 27, 135.

6) La variation totale a été la plus grande en Mars, ſavoir de 1, 63 et la plus petite en Août = 0, 26.

7) La hauteur moyenne a été la plus grande en Novembre = 27, 34, et la plus petit en Juillet = 27, 06.

II. Thermomètre.

1) Hauteurs extrèmes, leur différence, et l'état moyen du froid et de la chaleur, pour chaque mois de l'année 1796.

Mois	Hauteurs extrèmes				différence	Etat moyen	
	Au plus bas		Au plus haut			froid moy.	chal. moy.
	degré	jour et heure	degré	jour et heure	degré	Degré	degré
Janvier . . .	175	le 18 à 6 h. s.	141	le 27 à 2 h. s.	34	159. 2	152. 1
Fevrier . . .	183	le 16 à 6 h. m.	146	le 2 à 2 h. s.	37	165. 4	157. 8
Mars	181	le 7 à 6 h. m.	141	le 29 à 2 h. s.	40	162. 3	150. 9
Avril	156	le 6 et 7 à 6 h.	126	le 30 à 2 h. s.	30	147. 1	138. 2
Mai	148	le 11 à 2 h. s.	112	le 23 à 2 h. s.	28	136. 3	124. 2
Juin	132	le 20 à 6 h. m.	105	le 4 à 2 h. s.	27	125. 7	114. 5
Juillet . . .	131	le 12 à 10 h. s. et le 29 matin	106	le 28 à 2 h. s.	25	125. 8	115. 1
Août	135	le 28 à 10 h. m. et le 13 matin	106	le 5 à 2 h. s.	29	126. 9	116. 8
Septembre .	154	le 28 à 6 h. s.	120	le 7 et 22 à 2 h. s.	34	140. 4	130. 7
Octobre . .	150	le 2. 21. 22. 27 à 6 h. m.	126	le 9. 11 à 2 h. s.	24	144. 5	139. 2
Novembre .	176	le 24 et 26 à 6 h. m.	142	le 1 à 10 h. s.	34	155. 8	151. 5
Décembre .	178	le 28 et 29 à 6 h. m.	146	le 25 et 26 à 2 h. s.	32	164. 4	159. 0

2) Nom-

2) Nombre des jours, auxquels le froid et la chaleur ont ſurpaſſé quelques diviſions principales du Thermomètre de Délisle.

Mois.	Le froid a été plus grand que						Le chaleur a été plus grande que						
	180 Jours.	170 Jours.	160 Jours.	150 Jours.	140 Jours.	130 Jours.	110 Jours.	120 Jours.	130 Jours.	140 Jours.	150 Jours.	160 Jours.	170 Jours.
Janvier		5	16	25	31	31					15	25	30
Février	4	10	19	28	29	29					2	18	27
Mars	3	4	19	28	31	31					13	27	31
Avril				8	30	31			4	14	30	30	30
Mai					6	28		9	25	30	31	31	31
Juin						4	3	26	30	30	30	30	30
Juillet						2	2	27	31	31	31	31	31
Août						8	5	18	31	31	31	31	31
Septbr.				2	15	29		2	13	27	30	30	30
Octbr.				4	25	31			4	15	31	31	31
Novbr		4	8	23	30	30					16	25	28
Décbr.		6	22	30	31	31					4	16	30

Réſumé des obſervations ſur le froid et la chaleur.

1) Le plus grand froid a été

En A. 183°, d'après Réaumur — 17°, 6, le 16 Février à 6 heur. matin, Baromètre 27 . 46, vent NE, ciel en partie ſerein.

En H. 183°, d'après Réaumur — 17°, 6 le 16 Février etc.

En E. 154°, d'après Réaumur — 2, 1, le 28 Sept. à 6 heur. matin, Baromètre 27 . 25, vent du NOu, ciel ſerein, enſuite parſémé du nuages.

2) La

2) La plus grande chaleur:
En A et en E 105°, d'aprèsRéaumur + 24$^{\partial}$, le 4 Juin à 2 h. après-midi, Barom. 27 . 09, vent fort du SE, ciel parſémé de nuages, enſuite couvert.
En H. 134°, d'après Réaumur + 8$^{\partial}$, 5, le 2 Novembre 1795 à 2 heures après-midi, Baromètre 27 . 29, vent fort de l'Oueſt, ciel en partie ſerein.

3) Le froid moyen, ou la ſomme de toutes les obſervations thermomètriques annotées le matin et le ſoir, diviſée par leur nombre.
En A . 146°, 1 d'après Réaumur 2$^{\partial}$, 9 de chaleur
En H. 158, 3 d'après Réaumur 4, 4 de froid et
En E. 133, 3 d'après Réaumur 8, 9 de chaleur.

4) La chaleur moyenne, ou la ſomme de toutes les obſervations thermomètrique, faites à 2 heures après-midi, diviſée par leur nombre.
En A . 137°, 0 d'après Réaumur 6$^{\partial}$, 7 de chaleur
En H. 150, 7 d'après Réaumur 0, 2 de froid;
En E. 123, 4 d'après Réaumur 14, 2 de chaleur.

5) Le mois le plus froid a été celui de Février, et le mois le plus chaud, celui de Juin.

6) Le froid a été (ou le Thermomètre à 6 heures du matin et à 10 heures ſoir.)

En A.				en H.			
7 jour	entre	180 et 190		9 jours	entre	180 et 190	
22	— —	170 et 180		22	— —	170 et 180	
55	— —	160 et 170		45	— —	160 et 170	
64	— —	150 et 160		57	— —	150 et 160	
79	— —	140 et 150		48	— —	140 et 150	
57	— —	130 et 140		1	— —	130 et 140.	
82	— —	120 et 130				degrés.	
		degrés					

En E.

En E.	6 jours entre	150	et 160
	40 — —	140	et 150
	56 — —	130	et 140
	82 — —	120	et 130 et

7) La chaleur, ou le Therm. à 2 h. après midi, a été

En A.			En H		
10 jours entre	110	et 100	4 jours entre	130	et 120
72 — —	120	et 110	14 — —	140	et 130
56 — —	130	et 120	71 — —	150	et 140
40 — —	140	et 130	58 — —	160	et 150
86 — —	150	et 140	27 — —	170	et 160
61 — —	160	et 150	8 — —	180	et 170
35 — —	170	et 160			degrés
6 — —	180	èt 170			
		degrés			

En E	10 jours entre	110	et 100
	72 — —	120	et 110
	52 — —	130	et 120
	30 — —	140	et 130
	20 — —	150	et 140.
			degrés.

8) Il a gelé en A.. 148 jours, en H.. 133 jours, en E.. 6 jours.

Il a gelé continuellement

en A.. 102 jours, en H.. 93 jours, en E.. 0 jour.

Il n'a gélé point du tout

en A.. 216 jours, en H.. 49 jours, en E.. 178 jours.

9) La

9) La premiere gélée en H a été obſervée le 30 Sept. 1795, et il a gélé pour la derniere fois le 21 Avril, ce qui donne la durée d'hyver de 204 jours.

10) La derniere gélé en E ayant été le 21 Avril, il a recommencé à géler le 13 Sept. et la duré de l'été eſt de 145 jours.

III. Vent.

Rapport de la force des vents et des quatre plages.

Mois.	Calme	Vent méd.	Vent fort	Vent très f.	degré de force.	Rapp. de quatres plages: Nord	Eſt	Sud	Oueſt
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.					
Janvier .	2	4	20	6	442	12	1	3	15
Février .	2	15	9	3	317	6	8	9	6
Mars . .	1	9	16	5	397	13	3	7	8
Avril . .	5	13	11	1	277	13	4	9	4
Mai . .	0	0	23	8	500	9	6	9	7
Juin . .	0	0	23	7	493	16	4	6	4
Juillet .	0	2	24	5	451	13	2	3	13
Août . .	0	1	26	4	445	13	3	8	7
Septembre	0	2	14	14	573	13	3	4	10
Octobre .	1	1	26	3	422	14	2	6	9
Novembre	0	4	23	3	414	5	10	9	6
Décembre	0	10	12	9	451	11	4	7	9
A	10	61	227	68	433	138	50	80	98
H	10	58	83	31	388	58	21	48	55
E	1	6	136	41	481	78	20	36	50

Le mois le plus venteux a été celui de Septembre, après lui ſuccedent les mois de Mai et de Juin: celui d'Avril a été le plus calme et enſuite les mois de Février et de Mars.

Le

Le vent le plus fréquent a été dans toute l'année celui du Nord, il a ſurtous dominé en Juin. Le vent de l'Eſt s'eſt fait ſentir le plus au mois de Novembre, celui du Sud en Avril et en Mai et celui de l'Oueſt en Janvier.

IV. Atmosphère.

Mois.	Ciel			Brouillard.	Pluie		Neige	
	ſerein.	nuages.	couvert		copieuse	médiocre	copieuse	médiocre
	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.	Jours.
Janvier . .	1	6	24	2		5	1	14
Février . .	2	7	20	5		0	2	13
Mars . . .	5	10	16	1		2	2	12
Avril . .	0	5	25			8	3	5
Mai . . .	4	9	18		8	[illegible]	1	0
Juin . . .	1	15	14		8	9		
Juillet . .	0	10	21	3	3	14		
Août .	1	10	20	0	7	15		
Septembre .	1	7	22	1	7	9		
Octobre .	0	3	28	5	2	22		6
Novembre .	0	5	25	4		5	5	15
Décembre .	1	4	26	1		3	5	14
A	16	91	259	22	35	97	19	79
					132		98	
H	11	42	129	10	1	28	12	61
					29		73	
E	7	54	123	9	35	74	1	6
					109		7	

La derniere neige tomba le 11 Mai, et il recommença à neiger le 1 Octobre, après un intervalle de 143 jours.

Il

Il gréla en 2 jours, le 19 et 24 Mai. Le nombre des orages monte à 14: le 7. 19 Mai, le 4. 10. 19. 25 Juin, le 6. 7. 22. 29 Juillet, le 14. 21. 28 Août. Il fit des éclairs, le 6 Mai, le 3. 9 Juin, le 22 Août et le 22 Septembre.

Il y eut 5 parhélies, le 17. 18 Janvier, le 12 Février, le 23 Novembre et le 15 Décembre. Enfin 2 paraſélenes, le 18 Janvier, et le 12 Avril.

Si l'on compare ces obſervations avec celles qui dans la même année ont été faites à St. Pétersbourg, on en tire les concluſions ſuivantes.

I. La hauteur du Baromètre eſt environ, tantôt plus tantôt moins petite d'un pouce, à Moſcou qu'elle ne l'eſt à St. Pétersbourg. Cette différence eſt pour les plus grandes hauteurs presque toujours plus grande qu'un pouce et ſa valeur moyenne $1\frac{7}{100}$ ou $12\frac{8}{10}$ lignes. Pour les plus petites hauteurs elle eſt communement moindre qu'un pouce et ſa valeur moyenne $\frac{79}{100}$ ou $9\frac{1}{2}$ lignes. Mais les milieux arithmétiques, ainſi que les hauteurs moyennes, diffèrent, en prenant un milieu entr'eux, de $\frac{93}{100}$ ou de $11\frac{1}{10}$ lignes, dont ces hauteurs ſont à Moſcou plus petites qu'à St. Pétersbourg. Si ſur une hauteur de 27 pouces du Baromètre, on voudra employer cette derniere différence, pour en calculer l'élévation de Moſcou au deſſus du niveau de St. Pétersbourg, on trouvera d'après la regle de Mr. Deluc $145\frac{4}{5}$ toiſes de France ou $133\frac{1}{3}$ ſagènes de Ruſſie: et en y apportant une correction négative qui répond au milieu des hauteurs moyennes du Thermomètre, obſervées dans ces deux villes capitales,

pitales, cette élévation ſe reduit à 121 ſagènes de Ruſſie. Cette détermination, quoiqu'elle ſoit fondée ſur des ſuppoſitions dont on ne ſauroit atteſter la préciſion mathématique, n'implique aucune contradiction, n'étant point incompatible avec le cours des fleuves qui, ſur une diſtance de plus de 700 verſtes, pourroit très bien ſubſiſter avec une élévation totale du terrein de cent toiſes et plus.

II a fait presqu'auſſi froid, et même quelques fois plus froid à Moſcou qu'à St. Pétersbourg: mais le froid moyen au premier endroit a été moindre de plus d'un degré de Réaumur, et le nombre des jours où il a gelé plus ou moins fort, conſidérablement plus petit qu'à St. Pétersbourg: l'intervalle entre la premiere gelée en automne 1795 et la derniere au printemps 1796, ayant été presque de même durée.

III. La chaleur moyenne et la plus grande chaleur a été de 2 degrés de Réaumur plus grande à Moſcou qu'elle ne l'a été à St. Pétersbourg. Le nombre des jours chauds, ainſi que celui des jours où il n'a gelé point du tout, a été conſidérablement plus grand, quoique dans l'un et l'autre endroit l'intervalle entre la derniere gelée en printemps et la premiere en automne ſe trouve être d'une égale durée.

IV. Il a fait beaucoup plus de vent à Moſcou qu'à St. Pétersbourg. Le nombre des jours entièrement calmes a été conſidérablement plus petit, et celui des vents très forts au delà de trois fois plus grand au premier endroit qu'il ne l'a été à St. Pétersbourg.

V. En-

V. Enfin il y a eu en cette année beaucoup moins de jours de ciel entièrement ſerein, et au delà de deux fois plus de jours de ciel entièrement couvert à Moſcou qu'à St. Pétersbourg. Les brouillards ont été moins fréquens, et le nombre des jours de pluie et de neige ne diffère presque pas dans l'un et dans l'autre endroit, n'ayant été que de peu de jours plus grand à Moſcou qu'il l'a été à St. Pétersbourg.

FAUTES À CORRIGER.

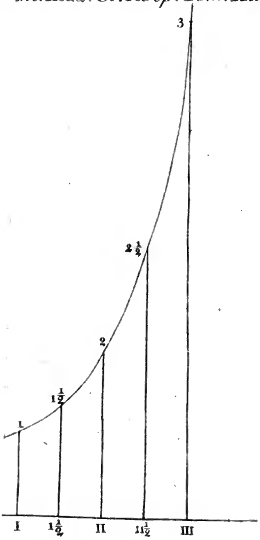
Dans le Tome XII.

Dans l'Hiſtoire de l'année 1794, à la page 39, entre les lignes 17 et 18 il faut intercaler une ligne, ſavoir:

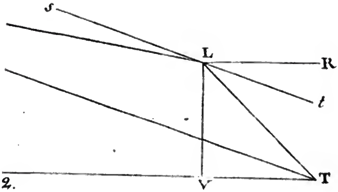
dans de l'acide muriateux, et en précipita le cuivre et l'étain.

Dans le Tome XIII.

Page	ligne	au lieu de	lisez
6	4	∂x	∂y
-	ibidem	∂xy	δxy
55	11	α	a
207	12	lorsqn'elle	lorsqu'elle
212	20	précédant	précédent
247	4	tranſeamus	transeamus
336	16	nuta	nutu
-	17	exellentiſsimi	excellentiſsimi
341	8	Emerande	éméraude
346	10	apporté	apportée
-	16	conſervé	conſervée
-	18	a	à
-	19	entreprit	entrepris
-	21	curieusité	curioſité
347	2	converts	couvertes
-	3	deſsendent	deſcendent
-	25	Tous	Toutes
348	6	toutes	tous
-	14	mal	mâle
-	20	uelange	mélange
-	22	autre partie	autres parties
349	18	apprivoiſes	apprivoiſé
-	ibidem	oiſeaux	oiſeau
-	20	entreprie	entrepris
-	22	peut	peux
-	27	ou	où
-	ibidem	Ce	Pour ce
350	6	entreprit	entrepris
-	8	ſciencifiques	ſcientifiques
-	10	Parmis	Parmi
-	16	des	de
-	26	Bougainvilles	Bougainville



1.



2.

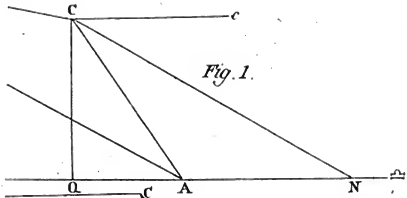


Fig. 1.

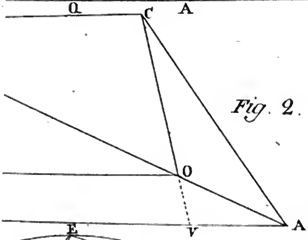


Fig. 2.

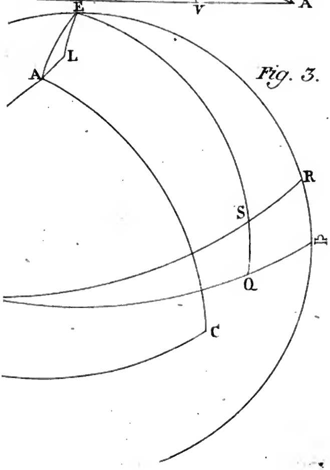


Fig. 3.

Fig. 2.

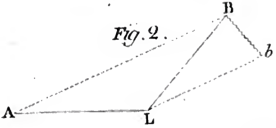


Fig. 3.

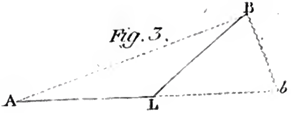


Fig. 5.

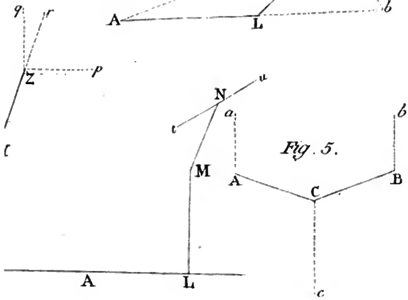
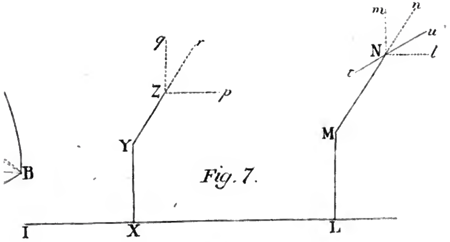
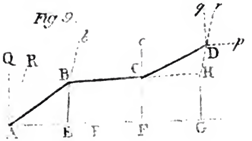


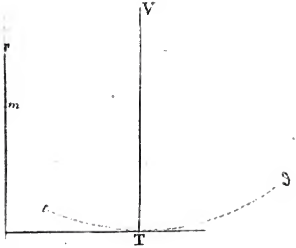
Fig. 7.

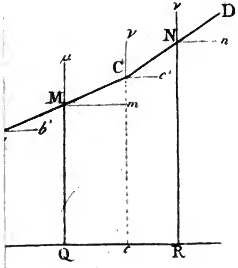


Digitized by Google

Fig. 9.







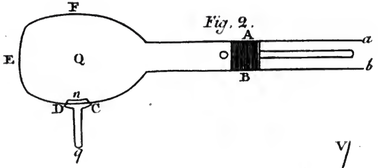


Fig. 2.

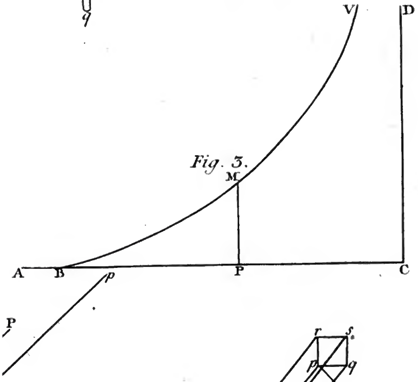


Fig. 3.

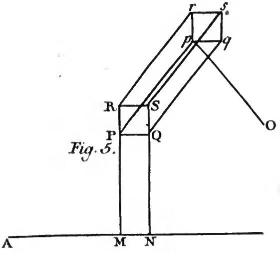
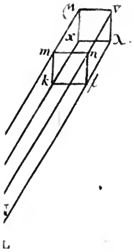


Fig. 5.

Digitized by Google



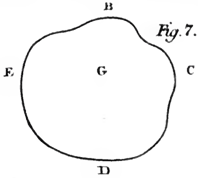


Fig. 7.

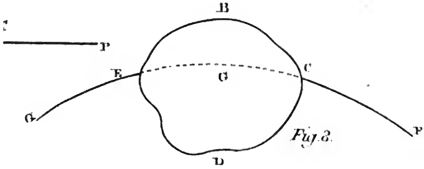


Fig. 8.

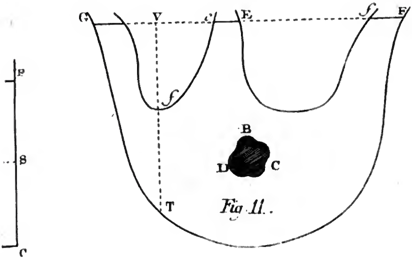


Fig. 11.

Digitized by Google

Fig. 12.

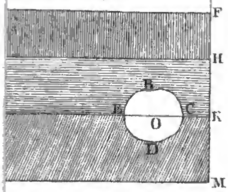


Fig. 13.

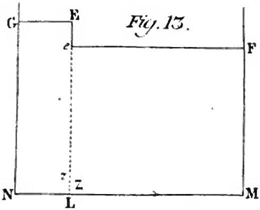


Fig. 14.

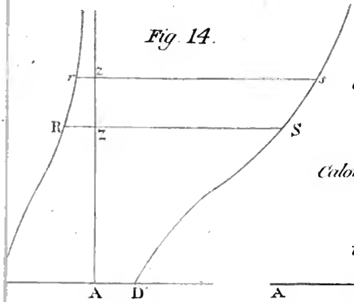
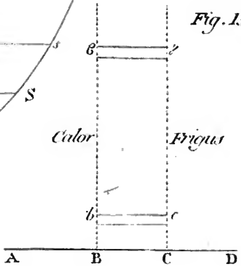


Fig. 15.



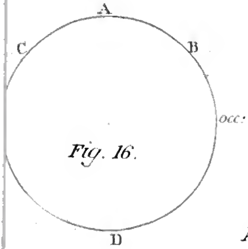


Fig. 16.

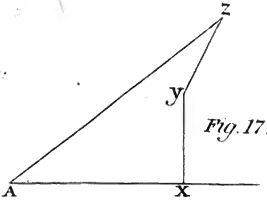


Fig. 17.

Digitized by Google

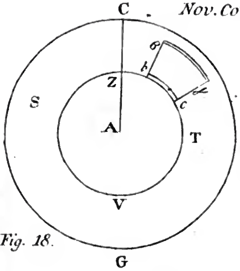


Fig. 18.

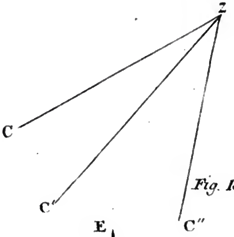


Fig. 19.

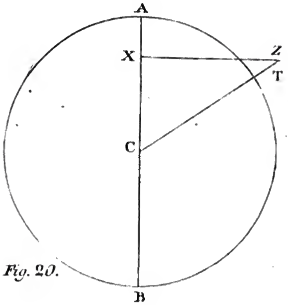


Fig. 20.

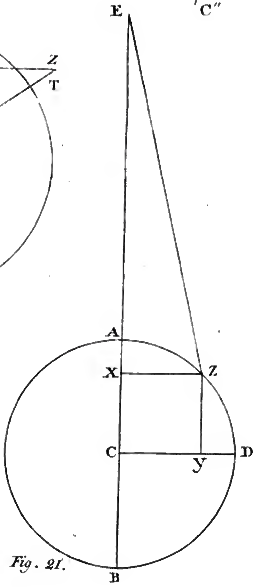
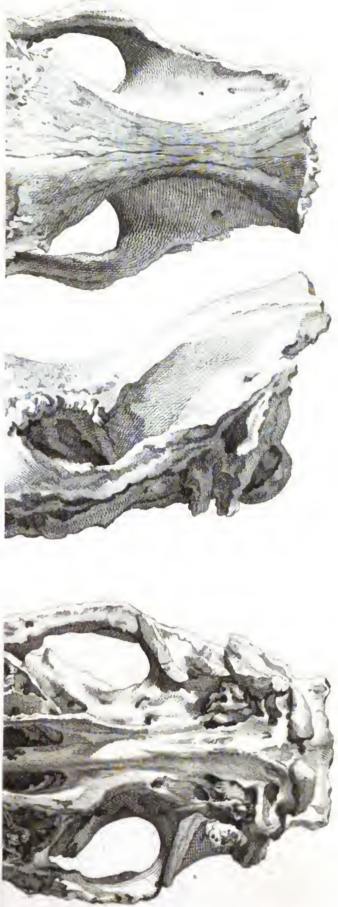


Fig. 21.



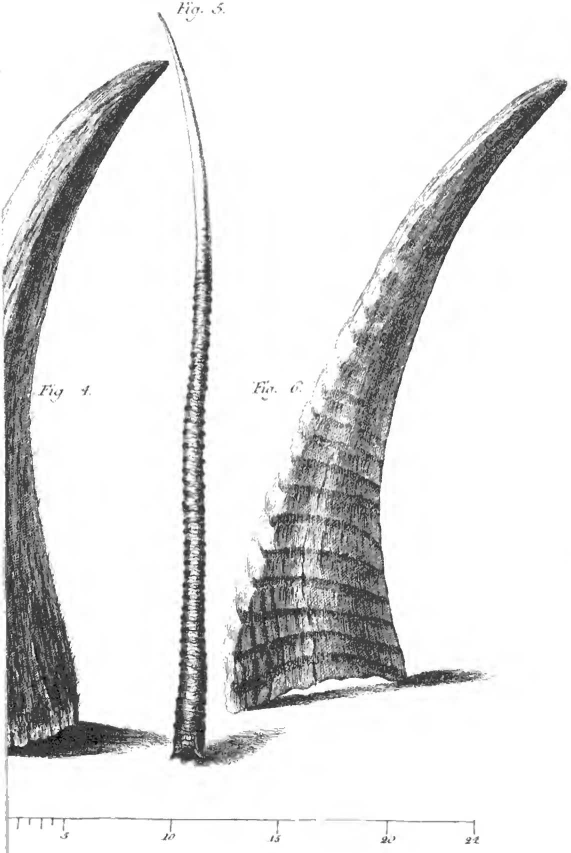

Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 6.
5
10
15
20
24



Fig. 2.

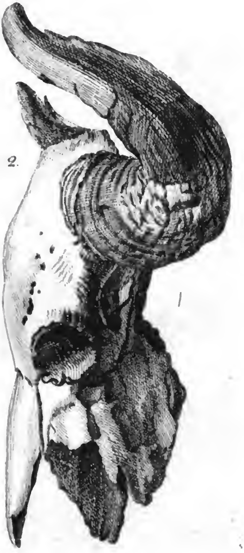




Fig. 1.





Fig. 2.

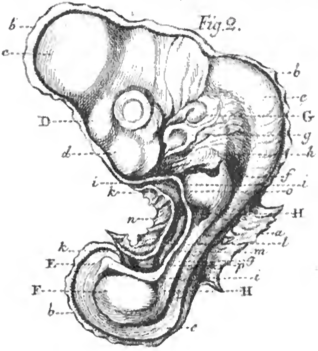


Fig. 4.

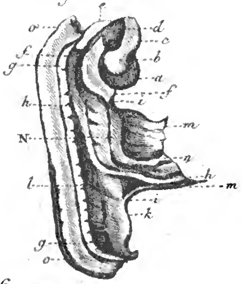
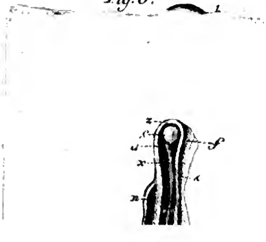
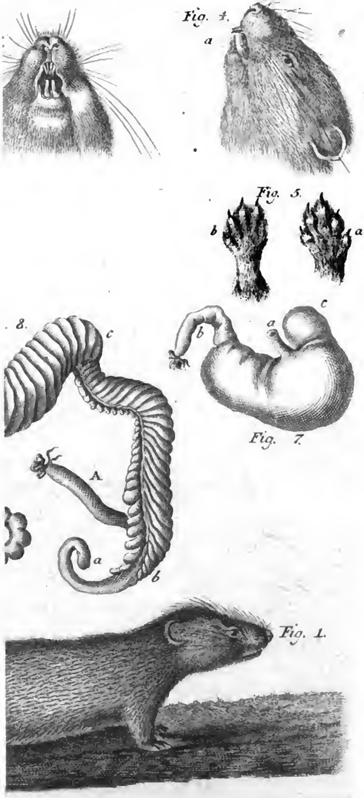
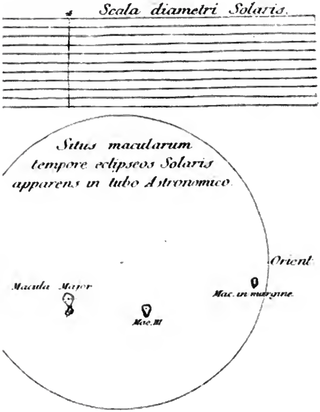


Fig. 6.



Nov. Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. XIII. Tab. XIV.




Scala diametri Solaris.
Situs macularum
tempore eclipseos Solaris
apparens in tubo Astronomico.
Orient.
Macula Major
Mac. in margine.
Mac. III

SEP 3 1937